Matematika 4 - výběrová

Přednášející – Aleš Nekvinda

Obsah

KAPITOLA 1

Hlubší studium matic

1. Základní definice a vlastnosti

V této části budeme mimořádně pracovat s komplexními čísly $\mathbb{C}$. Označme pro $z = a + bi$ číslo komplexně združené $\overline{z} = a - bi$, velikost z je dána $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Označme ještě $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$ reálnou a imaginární část z.

Definice 1.1. *Buď* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. *Označme symbolem*

$$(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$$

skalární součin vektorů x, y *a*

$$\|x\| = \sqrt{x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

velikost (nebo **normu***) vektoru* x.

Tvrzení 1.2 (Vlastnosti skalárního součinu). *Buď* $x, y, z \in \mathbb{C}^n$, $a \in \mathbb{C}$. *Pak*

(i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
(ii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
(iii) $(ax, y) = a(x, y)$;
(iv) $(x, x) \geq 0$ *a* $(x, x) = 0$ *jenom pro* $x = 0$.

Důkaz. Snadný. □

Poznamenejme, že z těchto vlastností ihned plyne $(x, x) \in \mathbb{R}$, $(x, ay) = \overline{a}(x, y)$ a $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

Věta 1.3 (Cauchy-Schwarzova nerovnost). *Buď* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. *Pak*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \; \|y\|.$$

Důkaz. Zvolme $x, y \in \mathbb{C}^n$. Díky tvrzení 1.2 máme

$$|(x, y)|^2 = \operatorname{Re}^2(x, y) + \operatorname{Im}^2(x, y) = \Big(\frac{(x, y) + \overline{(x, y)}}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{(x, y) - \overline{(x, y)}}{2}\Big)^2$$
$$\frac{1}{2}\big((x, y)^2 + \overline{(x, y)}^2\big) = \frac{1}{2}\big((x, y)^2 + (y, x)^2\big).$$

a opět užitím tvrzení 1.2 dostaneme pro libovolné $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\le (x - ty, x - ty) = (x, x) - t(x, y) - t(y, x) + t^2(y, y) \\ &= \|x\|^2 - t\big((x, y) + (y, x)\big) + t^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Tedy diskriminant je nekladný, tj.

$$\big((x, y) + (y, x)\big)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0.$$

Díky předchozí identitě je

$$\begin{aligned} \big((x, y) + (y, x)\big)^2 &= (x, y)^2 + (y, x)^2 + 2(x, y)(y, x) \\ &= 2|(x, y)|^2 + 2(x, y)\overline{(x, y)} = 4|(x, y)|^2 \end{aligned}$$

což dává spolu s nekladností diskriminantu

$$4|(x, y)|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0.$$

což je ekvivalentní s požadovanou nerovností.

□

Věta 1.4. *Buď $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dán a nechť pro každý vektor $= (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$(x, h) = 0.$$

Pak $x = 0$.

Důkaz. Buď x dán. Za h volme postupně $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ vektory kanonické báze. Dostaneme

$$0 = (x, e_i) = x_i$$

a tedy $x_i = 0$ pro všechna i.

□

Definice 1.5. *Buď A matice typu $n \times n$. Definujme normu matice*

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ \|x\| \le 1\}$$

Věta 1.6. *Buď A matice typu $n \times n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak*

$$|(Ax, y)| \le \|A\|\ \|x\|\ \|y\|.$$

Důkaz. Ze Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$|(Ax, y)| \le \|Ax\|\ \|y\|.$$

Vezmeme $x \ne 0$ a položme $z = \frac{x}{\|x\|}$. Zřejmě $\|z\| = 1$ a díky definici $\|A\|$

$$\|Ax\| = \left\|A\ \frac{x}{\|x\|}\right\|\ \|x\| = \|A\ z\|\ \|x\| \le \sup\{\|Az\|;\ \|z\| \le 1\}\ \|x\| = \|A\|\ \|x\|$$

a tedy

$$|(Ax, y)| \le \|Ax\|\ \|y\| \le \|A\|\ \|x\|\ \|y\|.$$

□

2. Vlastní čísla a vlastní vektory matic

DEFINICE 1.7. *Buď A čtvercová matice komplexních čísel řádu n. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice A, pokud existuje* <u>*nenulový*</u> *n-rozměrný komplexní vektor u takový, že*

$$Au = \lambda u. \tag{1.1}$$

Je-li λ vlastní číslo matice A, pak se každý vektor , kteý splňuje (1.1)*, nazývá vlastním vektorem.*

VĚTA 1.8. *Nechť λ je vlastní číslo matice A, pak množina všech vlastních vektorů příslušných k λ tvoří vektorový podprostor v $\mathbb{C}^n$.*

VĚTA 1.9. *Buď A matice typu $n \times n$. Nechť $u \neq o$ splňuje* (1.1)*, Pak*

$$(A - \lambda E)u = 0, \quad \textit{tedy} \quad \det(A - \lambda E) = 0.$$

PŘÍKLAD 1.10. *Buď $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory.*

Řešení. Vezmeme matici

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Tedy vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Spočtěme k nim příslušné vlastní vektory.

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

což dává $u_1 + 2u_2 = 0$. Např. vektor $(2, -1)$ je tedy vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 1$.

$$\lambda_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

což dává $u_1 - u_2 = 0$. Např. vektor $(1, 1)$ je tedy vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 4$.

□

3. Symetrické a pozitivně definitní matice

Nejprve si definujeme pojem symetrické pozitivně definitní matice.

DEFINICE 1.11. *Matice typu $n \times n$ se nazývá symetrická, pokud $A^T = A$. Symetrická matice A se nazývá pozitivně definitní, pokud existuje $c > 0$ takové, že*

$$(Ax, x) \geq c\|x\|^2.$$

Zabývejme se nyní řešením problému $Ax = b$, kde A je čtvercová matice typu $n \times n$ reálných čísel, $b \in \mathbb{R}^n$ je zadaný vektor a $x \in \mathbb{R}^n$ je hledaný vektor. Tuto úlohu už umíme řešit Gaussovou eliminací. My si zde najdeme trochu jiné metody pro speciální matice A, které bodou fungovat i v teorii parciálních diferenciálních rovnic.

Uvažujme nejprve jednodimenzionální případ, tj. rovnici

$$ax = b \tag{1.2}$$

v $\mathbb{R}$. Každý ví, že pro $a \neq 0$ je $x = \frac{b}{a}$. Náš speciální požadavek na a je $a > 0$. Utvořme kvadratickou funkci

$$F(x) = ax^2 - 2bx. \tag{1.3}$$

Snadno zjistíme, že $y \in \mathbb{R}$ je řešením (1.2) pokud $F(y)$ je minimem $F(x)$. Skutečně, jelikož $F''(x) = 2a > 0$, je $ay = b$ právě tehdy, je-li $F'(y) = 2ay - 2by = 0$ a y je tedy bodem minima F. Můžeme tedy vyslovot tvrzení:

Tvrzení 1.12. *Nechť $a > 0$. Buď $b \in \mathbb{R}$ dáno. Definujme $F(x) = ax^2 - 2bx$. Pak*

$$ay = b \iff F(y) = \min\{F(x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Vezmeme nyní dvou dimenzionální případ. Chceme naložit na matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ takové předpoklady, že platí analogie tvrzení (1.12).

Nechť je tedy dána matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ a hledejme vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tak, že $Ay = b$. Utvořme kvadratickou funkci dvou proměnných

$$F(x) = (Ax, x) - 2(b, x),$$

tj.

$$F(x_1, x_2) = ax_1^2 + (b + c)x_1x_2 + dx_2^2 - 2b_1x_1 - 2b_2x_2.$$

Chceme, najít minimum $F(x)$, pokud existuje. Především musíme najít stacionární bod. Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2ax_1 + (b + c)x_2 - 2b_1 = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2dx_2 + (b + c)x_1 - 2b_2 = 0,$$

což je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Tato soustava je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

jedině pro symetrickou matici A. Chceme-li tedy zachovat tvrzení 1.12, musíme od začátku předpokládat, že A je symetrická matice.

Nechť tedy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ je symetrická matice. Utvořme pro vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ kvadratickou formu

$$F(x_1, x_2) = (Ax, x) - 2(b, x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 - 2b_1x_1 - 2b_2x_2.$$

Snadno ověříme ,že soustava rovnic $Ax = b$ je totéž jako

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2ax_1 + 2bx_2 - 2b_1 = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2bx_1 + 2cx_2 - 2b_2 = 0,$$

Tedy vektor $y \in \mathbb{R}^2$ jeřešením rovnice $Ax = b$ právě když je stacionárním bodem kvadratické funkce $F(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$. Na to, abychom zaručili, že existuje nějaký stacionární bod, stačí vědět např.,že $F(x)$ má minimum (maximum, sedlový bod). Za chvíli si ukážeme, že pokud A je pozitivně definitní matice, pak $F(x)$ má pro každé $b \in \mathbb{R}^2$ jednoznačně určené minimum. Pokud by A byla negativně definitní matice, pak $F(x)$ má pro každé $b \in \mathbb{R}^2$ jednoznačně určené maximum, ale to je totéž jako pro pozitivně definitní matice, protože matice $-A$ je pozitivně definitní, pokud A je negativně definitní. Stačí nám tedy vědět něco o pozitivně definitních maticích. Poznamenejme, že zde zcela pomineme mimochodem velmi zajímavý, případ indefinitní matice.

Nyní si zformulujme dvě klíčové věty, ovšem již pro matice typu $n \times n$.

VĚTA 1.13. *Buď A symetrická pozitivně definitní matice a $b \in \mathbb{R}^n$. Položme $F(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$. Pak*

$$Ay = b \iff F(y) = \min\{F(x); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Důkaz. Dokažme nejprve implikaci $Ay = b \;\Rightarrow\; F(y) = \min\{F(x); x \in \mathbb{R}^n\}$. Nechť tedy $Ay = b$. Volme $x \in \mathbb{R}^n$ libovolné. Pak

$$\begin{aligned}
&F(x) = (Ax, x) - 2(b, x) = (A(x-y), x-y) + (Ax, y) + (Ay, x) - (Ay, y) - 2(b, x) \\
&=^{\text{symetrie}}= (A(x-y), x-y) + 2(Ay, x) - (Ay, y) - 2(b, x) =^{\text{použijeme} Ay=b} \\
&= (A(x-y), x-y) - (Ay, y) = (A(x-y), x-y) + (Ay, y) - 2(Ay, y) \\
&=^{\text{použijeme} Ay=b}= (A(x-y), x-y) + (Ay, y) - 2(b, y) \geq^{\text{pozitivní definitnost} A} \\
&\geq c\|x-y\|^2 + (Ay, y) - 2(b, y) = c\|x-y\|^2 + F(y) \geq F(y).
\end{aligned}$$

Dokažme opačnou implikaci $F(y) = \min\{F(x); x \in \mathbb{R}^n\} \;\Rightarrow\; Ay = b$. Předpokládejme, že y je takové, že $F(y) \leq F(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Označíme-li $h = x - y$, máme

$$F(y+h) \geq F(y) \quad \text{pro každé } h \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
&(A(y+h), y+h) - 2(b, y+h) \geq (Ay, y) - 2(b, y) \\
\Leftrightarrow &(A(y+h), y+h) - 2(b, y+h) - (Ay, y) + 2(b, y) \geq 0 \\
\Leftrightarrow &2(Ay, h) + (Ah, h) - 2(b, h) \geq 0 \\
\Leftrightarrow &2(Ay, h) - 2(b, h) \geq -(Ah, h) \\
\Leftrightarrow &(Ay - b, h) \geq -\frac{1}{2}(Ah, h).
\end{aligned}$$

Pišme na moment v poslední nerovnosti $-h$ místo h a dostaneme

$$\begin{aligned}
&(Ay - b, -h) \geq -\frac{1}{2}(A) - h), -h) \\
\Leftrightarrow &(Ay - b, h) \leq \frac{1}{2}(Ah, h)
\end{aligned}$$

což dává pro každé $h \in \mathbb{R}^n$

$$-\frac{1}{2}(Ah, h) \leq (Ay - b, h) \leq \frac{1}{2}(Ah, h).$$

Pišme v poslední nerovnosti th místo h a dostaneme pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ a pro každé $t \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2}t^2(Ah, h) \leq t(Ay - b, h) \leq \frac{1}{2}t^2(Ah, h).$$

Z toho plyne, že pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ a pro každé $0 \neq t \in \mathbb{R}$ je

$$-\frac{1}{2}t(Ah,h) \leq (Ay-b,h) \leq \frac{1}{2}t(Ah,h).$$

Limitním přechodem $t \to 0$ získáme pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ vztah

$$(Ay-b,h)=0.$$

Díky větě 1.4 máme

$$Ay-b=0$$

což jsme chtěli.

□

Věta 1.14. *Buď A symetrická pozitivně definitní matice a $b \in \mathbb{R}^n$. Položme $F(x)=(Ax,x)-2(b,x)$. Pak existuje jednoznačne určené $y \in \mathbb{R}^n$ takové, že*

$$F(y)=\min\{F(x); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Důkaz. Položme $a=\inf\{F(x); x\in\mathbb{R}^n\}$. Zřejmě platí

$$F(x)=(Ax,x)-2(b,x) \geq^{A \text{ je pozitivně definitní}} \geq c\|x\|^2-2(b,x)$$
$$\geq^{\text{Cauchyova nerovnost}} \geq c\|x\|^2-2\|b\|\,\|x\| = c\Big(\|x\|-\frac{\|b\|}{c}\Big)^2-\frac{1}{c}\|b\|^2 \geq -\frac{1}{c}\|b\|^2$$

a tedy $a\in\mathbb{R}$ (není $-\infty$).

Počítejme pro x,y

$$\begin{aligned}F(x)+F(y)-2F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= (Ax,x)+(Ay,y)-2(b,x+y)\\ &\quad -2\Big(A\Big(\frac{x+y}{2}\Big),\frac{x+y}{2}\Big)+4\Big(b,\frac{x+y}{2}\Big)\\ &=(Ax,x)+(Ay,y)-\frac{1}{2}(A(x+y),x+y)\\ &=(Ax,x)+(Ay,y)-\frac{1}{2}(Ax,x)-\frac{1}{2}(Ay,y)-(Ax,y)\\ &=\frac{1}{2}\big((Ax,x)-2(Ax,y)+(Ay,y)\big)=\frac{1}{2}(A(x-y),x-y).\end{aligned}$$

Nechť posloupnost vektorů slňuje $F(x_n)\to a$. Pak

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c}\|x_n-x_m\|^2 &\leq^{A \text{ je pozitivně definitní}} \leq \frac{1}{2}(A(x_n-x_m),x_n-x_m)\\ &=F(x_n)+F(x_m)-2F\Big(\frac{x_n+x_m}{2}\Big) \leq F(x_n)+F(x_m)-2a.\end{aligned}$$

Protože $F(x_n)\to a$, $F(x_m)\to a$, platí $F(x_n)+F(x_m)-2a\to 0$ a tedy $\|x_n-y_n\|^2\to 0$. To znamená, že posloupnost x_n je Cauchyovská a protože $\mathbb{R}^n$ je úplný, existuje $y=\lim_{n\to\infty}x_n$. Protože F je spojitá funkce n proměnných, máme $F(y)=a$ a tedy

$$F(y)=\inf\{F(x);x\in\mathbb{R}^n\} \quad (=\min\{F(x);x\in\mathbb{R}^n\} \quad)$$

neboť minima se nabývá pro y.

Nyní ukážeme jednoznačnost y. Nechť z splňuje $z=\min\{F(x);x\in\mathbb{R}^n\}$. Pak $F(z)=F(y)$ a

$$\frac{1}{2}\|z-y\|^2 \leq\leq \frac{1}{2}(A(z-y),z-y)=F(z)+F(y)-2F\Big(\frac{z+y}{2}\Big)\leq 2a-2a-0$$

a tedy $z=y$.

□

KAPITOLA 2

Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^N$

1. Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$

Je celkem přirozené, že délka intervalu (a,b) je $b-a$. Asi se shodneme na tom, že délka množiny, která obsahuje jeden bod, je 0. Ale jaká je délka libovolné podmnožiny $\mathbb{R}$. A jde to vůbec udělat rozumně?

Snaha je připsat délku co nejširší třídě množin tak, aby to bylo rozumné. Délku (míru) budeme značit m a tedy $m(A)$ je míra množiny A. Jak jsem již řekli, je $m((a,b)) = b-a$. Nechť množina $A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$ (sjednocení konečně mnoha intervalů), kde intervaly (a_i, b_i) jsou po dvou disjunktní. Potom je jasné, že $m(A) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Ale skutečně podstatná je následující vlastnost. Nechť

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$$

(sjednocení <u>nekonečně</u> mnoha intervalů), kde intervaly (a_i, b_i) jsou po dvou disjunktní. Pak definujme

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i).$$

Definice 2.1. *Říkáme, že $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená, pokud pro každé $x \in G$ existuje $\delta > 0$ tak, že $(x-\delta, x+\delta) \subset G$.*

Věta 2.2. *Buď G otevřená množina v $\mathbb{R}$. Pak existuje konečný či nekonečný počet α disjunktních intervalů (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ tak, že*

$$G = \bigcup_{i=1}^{\alpha} (a_i, b_i).$$

Takže $m(G) = \sum_{i=1}^{\alpha} (b_i - a_i)$ a my umíme změřit délku libovolné otevřené množiny.

Definice 2.3. *Říkáme, že $F \subset \mathbb{R}$ je uzavřená, pokud $\mathbb{R} \setminus F$ je otevřená.*

Umíme tedy změřit délku libovolné uzavřené omezené množiny. Víme totiž že $F \subset (-K, K)$ pro dostatečně velké K a je celkem přirozené, že $m(F) = m(-K,K) - m((-K,K) \setminus F)$. Podotkněme, že $(-K,K) \setminus F$ je oteřená množina a tedy umíme změřit její délku. Naučili jsme se tedy změřit délku otevřené a omezené uzavřené množiny.

Definice 2.4. *Buď $A \subset \mathbb{R}$ libovolná. Definujme*

$$m^*(A) = \inf\{m(G); A \subset G \text{ a } G \text{ je otevřená}\}$$

a

$$m_*(A) = \sup\{m(F); F \subset A \text{ a } F \text{ je omezená uzavřená}\}.$$

Definice 2.5. *Buď $A \subset \mathbb{R}$ libovolná omezená. Říkáme, že A je (Lebesgueovsky) měřitelná, pokud*

$$m^*(A) = m_*(A).$$

a definujeme $m(A) = m_*(A)$.

Věta 2.6. *Existuje $M \subset (0,1)$ taková, že $0 = m_*(M) < m^*(M) = 1$.*

Důkaz. Toto tedy vynecháme, neboť to není dostupné.

□

Předchozí věta vlastně říká, že existuje neměřitelná množina.

Definice 2.7. *Buď $A \subset \mathbb{R}$ libovolná. Říkáme, že A je (Lebesgueovsky) měřitelná, pokud $A \cap I$ je (Lebesgueovsky) měřitelná pro každý omezený interval. Pak definujeme $m(A) = m_*(A)$.*

Věta 2.8. *Nechť $A, B, A_n \subset \mathbb{R}$ jsou měřitelné množiny. Pak*

(i) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *a* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *jsou měřitelné;*
(ii) $A \setminus B$ *je měřitelná;*
(iii) $\emptyset$ *je měřitelná;*
(iv) $\mathbb{R}$ *je měřitelná.*

Věta 2.9. *Nechť $A \subset B$ jsou měřitelné množiny, $m(B) < \infty$. Pak*

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

Věta 2.10. *Nechť A_n jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny. Pak*

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Věta 2.11. *Nechť $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ jsou měřitelné množiny, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak*

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} m(A_n).$$

2. Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^N$

Konstrukce je skoro stejná jako v případě $\mathbb{R}$, jenom míra otevřených množin se musí udělat opatrněji.

Definice 2.12. *Obdélníkem v $\mathbb{R}^N$ nazveme každou množinu $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Dva obdélníky O_1, O_2 nazveme skoro disjunktními, pokud se "dotknou" maximálně nějakou "stěnou", tj. O_1, O_2 neobsahuje žádnou otevřenou množinu.*

Množinu P nazveme polyedrem, pokud existuje konečně mnoho vzájemně po dvou skoro disjunktních obdélníků $O_1, O_2, \dots, O_n$ takových, že

$$P = \bigcup_{j=1}^{n} O_j.$$

Je celkem přirozené, že míra $M(O)$ obdélníku $O = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je

$$m(O) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

a míra polyedru $P = \bigcup_{j=1}^{n} O_j$ je

$$m(P) = \sum_{j=1}^{n} m(O_j).$$

Definice 2.13. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená. Definujme*

$$m(G) = \sup\{m(P); P \subset G, P \text{ polyedr}\}.$$

Snaha je opět připsat míru co nejširší třídě množin tak, aby to bylo rozumné.

Definice 2.14. *Říkáme, že $F \subset \mathbb{R}^N$ je uzavřená, pokud $\mathbb{R} \setminus F$ je otevřená.*

Umíme tedy změřit délku libovolné uzavřené omezené množiny. Víme totiž že $F \subset (-K, K)^n$ pro dostatečně velké K a je celkem přirozené, že $m(F) = m\big((-K, K)^n\big) - m((-K, K) \setminus F)$. Podotkněme, že $(-K, K)^n \setminus F$ je oteřená množina a tedy umíme změřit její délku. Naučili jsme se tedy změřit délku otevřené a omezené uzavřené množiny.

Definice 2.15. *Buď $A \subset \mathbb{R}^N$ libovolná. Definujme*

$$m^*(A) = \inf\{m(G); A \subset G \text{ a } G \text{ je otevřená}\}$$

a

$$m_*(A) = \sup\{m(F); F \subset A \text{ a } F \text{ je omezená uzavřená}\}.$$

Definice 2.16. *Buď $A \subset \mathbb{R}^N$ libovolná omezená. Ríkáme, že A je (Lebesgueovsky) měřitelná, pokud*

$$m^*(A) = m_*(A).$$

a definujeme $m(A) = m_*(A)$.

Definice 2.17. *Buď $A \subset \mathbb{R}^N$ libovolná. Ríkáme, že A je (Lebesgueovsky) měřitelná, pokud $A \cap I$ je (Lebesgueovsky) měřitelná pro každý obdélník. Pak definujeme $m(A) = m_*(A)$.*

Věta 2.18. *Nechť $A, B, A_n \subset \mathbb{R}^N$ jsou měřitelné množiny. Pak*

(i) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *a* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *jsou měřitelné;*
(ii) $A \setminus B$ *je měřitelná;*
(iii) $\emptyset$ *je měřitelná;*
(iv) $\mathbb{R}^N$ *je měřitelná.*

Věta 2.19. *Nechť $A \subset B$ jsou měřitelné množiny, $m(B) < \infty$. Pak*

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

Věta 2.20. *Nechť A_n jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny. Pak*

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Věta 2.21. *Nechť $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ jsou měřitelné množiny, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak*

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} m(A_n).$$

3. Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^N$

DEFINICE 2.22. *Buď $M \subset \mathbb{R}^N$. Definujme charakteristickou funkci χ_M množiny M předpisem*

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud} \quad x \in M \\ 0 & \text{pokud} \quad x \notin M. \end{cases}$$

DEFINICE 2.23. *Buď $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$. Říkáme, že f je měřitelná funkce, pokud je množina*

$$\{x \in \mathbb{R}^N; f(x) > a\}$$

měřitelná pro každé reálné a.

DEFINICE 2.24. *Buď $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$. Říkáme, že f je jednoduchá funkce, pokud má konečně mnoho hodnot, tj. existuje konečně mnoho množin $M_1, M_2, \dots, M_n$ po dvou disjunktních a čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, že*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{M_j}(x).$$

DEFINICE 2.25. *Buď $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ jednoduchá,*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{M_j}(x).$$

Pak f je měřitelná právě tehdy, pokud M_j jsou měřitelné pro všechna j.

VĚTA 2.26. *Buď $f, g : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ měřitelné, pak Pak $f \pm g$, fg, f/g, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ a $|f|^\alpha$ jsou měřitelné.*

VĚTA 2.27. *Buď $f_n : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ měřitelné a $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Pak f je měřitelná.*

VĚTA 2.28. *Buď $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ měřitelná a buď $H = \{[x, y]; x \in \mathbb{R}^n \wedge y \leq f(x)\}$. Pak H je měřitelná množina v $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Vybudujeme nyní integrál, nejprve pro nezáporné funkce.

DEFINICE 2.29. *Buď $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ jednoduchá měřitelná, $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{M_j}(x)$. Definujme*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} a_j m(M_j).$$

DEFINICE 2.30. *Buď $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ měřitelná. Definujme*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx; g \text{ je jednoduchá nezáporná měřitelná}\Big\}.$$

VĚTA 2.31. *Buď $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ měřitelná. Pak existuje posloupnost jednoduchých měřitelných nezáporných funkcí f_n takových, že pro každé x je*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Navíc,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)dx$$

Definice 2.32. *Buď* $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ *měřitelná a* $M \subset \mathbb{R}^n$ *měřitelná. Definujme*

$$\int_M f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)_M(x)dx.$$

Věta 2.33. *Buď* $f : M \subset \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ *měřitelná a* $H = \{[x, y]; x \in \mathbb{R}^n \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\}$. *Pak*

$$\int_M f(x)dx = m(H).$$

Navíc

$$\int_M dx = m(M).$$

Nyní zavedeme Lebesgueův integrál pro funkce, které mohou mít i záporné hodnoty. Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$. Označme

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0).$$

Zřejmě je $f^+ \geq 0, f^- \geq 0$ a

$$f = f^+ - f^-.$$

Navíc je $|f| = f^+ + f^-$.

Definice 2.34. *Buď* $f : M \subset \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ *měřitelná. Definujme*

$$\int_M f(x)dx = \int_M f^+(x)dx - \int_M f^-(x)dx$$

pokud výraz vpravo má smysl, tj. není to neurčitý výraz $\infty - \infty$.

Věta 2.35. *Buď* $f : M \subset \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ *omezená a* M *buď oblast po částech hladká. Nechť existuje Riemannův integrál*

$$(R)\int_M f(x)dx.$$

Pak f *je měřitelná a existuje Lebesgueův integrál* $\int_M f(x)dx$. *Navíc*

$$\int_M dx = (R)\int_M f(x)dx.$$

KAPITOLA 3

Prostory funkcí

1. Prostory se skalárním součinem a Hilbertovy prostory

DEFINICE 3.1. *Buď V vektorový prostor a $(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ zobrazení. Pak toto zobrazení nazýváme skalárním součinem, pokud splňuje*

(i) $(x, y) = (y, x)$;
(ii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
(iii) $(ax, y) = a(x, y)$;
(iv) $(x, x) \geq 0$ *a* $(x, x) = 0$ *jenom pro* $x = 0$.

VĚTA 3.2. *Buď V vektorový prostor a $(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ skalární součin. Položme*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Pak

(i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
(ii) $\|ax\| = |a| \ \|x\|$;
(iii) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Výraz $\|x\|$ nazýváme normou x.

DEFINICE 3.3. *Buď V vektorový prostor a $(.,.) : V \times V \to R$ skalární součin a $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Říkáme, že posloupnost x_n ja Cauchyovská, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \ \big(n > n_0 \wedge m > n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon\big).$$

DEFINICE 3.4. *Buď V vektorový prostor a $(.,.) : V \times V \to R$ skalární součin. Říkáme, V je úplný prostor, pokud každá Cauchyovská posloupnost x_n má ve V limitu, tj. existuje $x \in V$ tak, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Každý úplný prostor se skalárním součinem nazýváme Hilbertovým prostorem.

2. Lebesgueův prostor $L^2(M)$

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Definujme

$$\mathscr{L}^2(M) = \Big\{f; \int_M f^2(x)dx < \infty\Big\}.$$

VĚTA 3.5. *Polož*

$$(f, g) = \int_M f(x)g(x)dx.$$

Pak (f, g) je zobrazení z $\mathscr{L}^2(M) \times \mathscr{L}^2(M) \to \mathbb{R}$, které splňuje vlastnosti (i), (ii), (iii) *z definice 3.1, ale nesplňuje* (iv).

Důkaz. Vlastnosti (i), (ii), (iii) jsou snadné. Připomeňme, že nulový prvek v $\mathscr{L}^2(M)$ je nulová funkce. Vezmeme nyní např. Derichletovu funkci definovanou

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pokud} \quad x \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Protože $m(\mathbb{Q}) = 0$, je

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx = 0$$

přestože f není identicky rovna nulové funkci.

□

Definice 3.6. *Řekneme, že dvě funkce f, g jsou ekvivalentní, pokud existuje množina M nulové míry taková, že*

$$f(x) = g(x) \qquad \text{pro} \quad x \notin M.$$

Tato definice nám definovala rozklad $\mathscr{L}^2(M)$ na jednotlivé podmnožiny (třídy ekvivalence) takový, že libovolné dvě funkce v nějaké podmnožině jsou ekvivalentní.

Definice 3.7. *Definujme prostor $L^2(M)$ jakožto množinu všech tříd ekvivalence. Čili prvkem $L^2(M)$ je třída ekvivalentních funkcí.*

Z každé třídy lze vybrat reprezentanta f. Označme pak tuto třídu $[f]$. Je jasné, že pokud $f(x) = g(x)$ s vyjímkou množiny nulové míry, je $[f] = [g]$.

Definice 3.8. *Definujme nyní*

$$([f], [g]) = \int_M f(x)g(x)dx \qquad a \qquad \| \, [f] \, \| = \Big(\int_M f^2(x)dx \Big)^{1/2}.$$

Tato definice nezávisí na výběru f, g a splňuje vlastnosti (i), (ii), (iii) z definice 3.1. Navíc nám odpadla potíž s vlastností (iv) a platí tedy věta:

Věta 3.9. *$L^2(M)$ je prostor se skalárním součinem.*

Následující věta je hluboká, její důkaz se opírá o větu 2.31.

Věta 3.10. *$L^2(M)$ je Hilbertův prostor (tj. úplný se skalárním součinem).*

3. Slabé derivace funkce

Definice 3.11. *Označme symbolem $\mathcal{C}_0^1(0,1)$ množinu všech funkcí $\varphi(x)$ definovaných na $[0,1]$ s vlastnostmi*

existuje $\varphi'(x)$v každém bodě $x \in (0,1)$;

funkce $x \mapsto \varphi'(x)$je spojitá ;

existuje $\delta > 0$ takové, že $\varphi(x) = 0$ v intervalech $[0, \delta]$ a $[1-\delta, 1]$.

Věta 3.12. *Nechť $f \in L^2(0,1)$ a nechť platí pro každou $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(0,1)$*

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Pak $f(x) = 0$ skoro všude (tj. $f(x) = 0$ s vyjímkou množiny nulové míry).

Důkaz. Jen náznak. Předpokládejme, že f je spojitá a fixujme bod $x_0 \in (0,1)$. Buď $\varepsilon > 0$ a zvolme $\varphi_\varepsilon(x)$ takto

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{v intervalu } (0, x_0 - \varepsilon); \\ \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}(x - x_0) & \text{v intervalu } (x_0 - \varepsilon, x_0); \\ \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2}(x - x_0) & \text{v intervalu } (x_0, x_0 + \varepsilon); \\ 0 & \text{v intervalu } (x_0 + \varepsilon, 1); \end{cases}$$

Funkce $\varphi_\varepsilon(x)$ je spojitá po částech lineární a $\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)dx = 1$. Bohužel nemá spojitou první derivaci a $\varphi'_\varepsilon(x)$ dekonce není definovaná v bodech $x_0 - \varepsilon, x_0, x_0 + \varepsilon$. Ale tak si ji v těchto bodech zhladíme tak, aby integrál byl pořád 1 a aby zhlazená funkce byla nenulová pouze v intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. (Takové zhlazení se sice lehce namaluje, ale ve skutečnosti to je hluboká věc!)

Podle předpokladu víme, že

$$\int_0^1 f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx = 0$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Protože $f(x)$ je spojitá, její hodnota se na intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ příliš nezmění, pokud ε je malé. Lze tedy psát $f(x) \doteq f(x_0)$ v $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ pro malá ε. Potom je tedy

$$0 = \int_0^1 f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx \doteq f(x_0)\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)dx = f(x_0).1 = f(x_0).$$

Tedy $f(x_0) = 0$ v každém bodě x_0 a f je nulová. Nyní by se musel tento postup precizovat i pro měřitelné funkce, nejen pro spojité. To je další netriviální krok a opírá se např. o tzv. Luzinovu větu.

□

Buď nyní $f(x)$ diferencovatelná funkce definovaná na intervalu $(0,1)$. Pak pro každou $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(0,1)$ platí

$$\int_0^1 f'(x)\varphi(x)dx = \big[f(x)\varphi(x)\big]_0^1 - \int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx.$$

To nám s předchozí větou umožní definovat derivaci pomocí integrálu. Předpokládejme že $f(x)$ je daná diferencovatelná funkce a $g(x)$ je nějaká funkce (vůbec nepředpokládáme, že je to derivace f), pro kterou platí

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx \quad \text{pro všechny} \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^1(0,1). \tag{3.1}$$

Užitím per-partes a jednoduché úpravy máme

$$-\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 f'(x)\varphi(x)dx$$

a následně

$$\int_0^1 (g(x) - f'(x))\varphi(x)dx = 0.$$

Díky předchozí větě je nutně $g(x) - f'(x) = 0$ v $(0,1)$ a tedy g je derivace f.

Integrální vztah (3.1) ale nepotřebuje, aby f měla derivaci. Stačí, aby byla měřitelná. To nám umožňuje definovat derivaci funkcí z $L^2(0,1)$.

Definice 3.13. *Nechť $f \in L^2(0,1)$. Říkáme, že g je slabá derivace f, pokud platí*

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx$$

pro všechny $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(0,1)$.

Tatop definice má ještě jednu nevýhodu. Jak bychom definovali f''? Příslušná integrální identita by měla tvar

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi''(x)dx$$

a platila by pro všechny $\varphi \in \mathcal{C}_0^2(0,1)$. Oproti předchozí definici požadujeme vyšší hladkost φ. Pro f''' bychom chtěli $\varphi \in \mathcal{C}_0^3(0,1)$ atd. Abychom tomu dali jednotný rámec, zavedeme jednotný prostor testovacích funkcí.

Definice 3.14. *Označme symbolem $\mathcal{C}_0^\infty(0,1)$ množinu všech funkcí $\varphi(x)$ definovaných na $[0,1]$ s vlastnostmi*

existuje $\varphi^{(k)}(x)$v každém bodě $x \in (0,1)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$;
existuje $\delta > 0$ takové, že $\varphi(x) = 0$ v intervalech $[0,\delta]$ a $[1-\delta,1]$.

Následně platí, že funkce $x \mapsto \varphi^{(k)}(x)$ jsou spojité v každém bodě $x \in (0,1)$ a pro každé multiindex $k \in \mathbb{N}$.

Definice 3.15. *Nechť f je měřitelná. Říkáme, že g je slabá derivace f (popř. slabá derivace f řádu k), pokud platí*

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx$$

pro všechny $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, popř.

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = (-1)^k \int_0^1 f(x)\varphi^{(k)}(x)dx$$

pro všechny $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$.

Věta 3.16. *Nechť f má spojitou derivaci $f^{(k)}$ a nechť g je slabá derivace řádu k, tj. platí*

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = (-1)^k \int_0^1 f(x)\varphi^{(k)}(x)dx$$

pro všechny $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$. Pak $g(x) = f^{(k)}(x)$ pro skoro všechna x.

Důkaz. Jenom upozornění. Tato věta je poněkud obtížnější, neboť máme méně testovacích funkcí a přesto je nutné, aby platila analogie věty 3.12 pro $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$ (ne tedy jen pro $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(0,1)$).

□

Nyní si zavedeme pojem slabých parciálních derivací. Buď dána otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Buď $M \subset \Omega$. Uzávěrem $\overline{M}$ množiny M nazýváme průnik všech uzavřených množin F, $M \subset F$. Je to tedy nejmenší uzavřená množina obsahující M. Omezenou uzavřenou množinu nazýváme kompaktní. Označme ještě pro $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$$

Protože v dalším budeme potřebovat parciální derivace vyšších řádů, přijmeme toto značení. Nechť $\alpha = (k_1, k_2, \dots, k_N)$, $k_1, k_2, \dots, k_N \in \mathbb{N}_0$, je tzv. multiindex a $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_N$. Pak

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_N^{k_N}}.$$

Číslo k je řád multiindexu α a budeme ho značit $|\alpha|$. Označme $\mathcal{M}$ množinu všech multiindexů.

Definice 3.17. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřená množina. Symbolem $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ označme množinu funkcí $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ splňující*

existuje $D^\alpha \varphi(x)$ v každém bodě $x \in \Omega$ a pro každý multiindex $\alpha \in \mathcal{M}$
$\operatorname{supp}\varphi$ *je kompaktní podmnožina v Ω.*

Následně platí, že funkce $x \mapsto D^\alpha \varphi(x)$ jsou spojité v každém bodě $x \in \Omega$ a pro každý multiindex $\alpha \in \mathcal{M}$.

Definice 3.18. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřená množina. Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je měřitelná. Říkáme, že $g : \Omega \to \mathbb{R}$ je slabá derivace f podle multiindexu α, pokud*

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x) \varphi(x) dx$$

pro všechny $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Můžeme psát $g = D_w^\alpha f$.

Věta 3.19. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřená množina. Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ a nechť f má klasickou derivaci $D^\alpha f$ pro nějaké $\alpha \in \mathcal{M}$. Pak f má slabou derivaci $D_w^\alpha f$ a platí*

$$D^\alpha f(x) = D_w^\alpha f(x)$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$.

4. Sobolevovy prostory

Dále budeme psát $D^\alpha f(x)$ místo $D_w^\alpha f(x)$ a všechny derivace budeme chápat slabě.

Definice 3.20. *Definujme Sobolevův prostor $W^{1,2}(0,1)$ jako množinu funkcí $f \in L^2(0,1)$, které mají slabou derivaci f' a navíc $f' \in L^2(0,1)$. Skalární součin ve $W^{1,2}(0,1)$ je definován vztahem*

$$(f, g)_{W^{1,2}(0,1)} = \int_0^1 \big(f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\big) dx.$$

Ze skalárního součinu můžeme definovat normu

$$\|f\|_{W^{1,2}(0,1)} = \Big(\int_0^1 \big(f^2(x) + f'^2(x)\big) dx \Big)^{1/2}.$$

Nyní tuto definici zobecníme jednak do $\mathbb{R}^N$ a jednak pro vyšší derivace. Nejprve pro první derivace.

Definice 3.21. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřená množina. Definujme Sobolevův prostor $W^{1,2}(\Omega)$ jako množinu funkcí $f \in L^2(\Omega)$, které mají slabé parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$,*

$i = 1, 2, \ldots, N$ *a navíc* $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(0,1)$. *Skalární součin ve* $W^{1,2}(\Omega)$ *je definován vztahem*

$$(f,g)_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \Big[f(x)g(x) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \Big] dx.$$

Ze skalárního součinu můžeme definovat normu

$$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \Big[f^2(x) + \sum_{i=1}^N \Big(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Big)^2 \Big] dx \Big)^{1/2}.$$

Nyní v plné obecnosti.

Definice 3.22. *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *otevřená množina. Definujme Sobolevův prostor* $W^{k,2}(\Omega)$ *jako množinu funkcí* $f \in L^2(\Omega)$, *které mají slabé parciální derivace* $D^\alpha f$, $|\alpha| \le k$ *a navíc* $D^\alpha f \in L^2(0,1)$. *Skalární součin ve* $W^{k,2}(\Omega)$ *je definován vztahem*

$$(f,g)_{W^{k,2}(\Omega)} = \int_\Omega \Big(f(x)g(x) + \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) \Big) dx.$$

Ze skalárního součinu můžeme definovat normu

$$\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \Big[f^2(x) + \sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha f(x))^2 \Big] dx \Big)^{1/2}.$$

Věta 3.23. *Prostor* $W^{k,2}(\Omega)$ *je Hilbertův prostor.*

Poznamenejme, že v předchozí větě je nejzajímavější vlastnost úplnost. Ta souvisí s úplností prostoru $L^2(\Omega)$ a proto uvažujeme všechny integrály Lebesgueovy a všechny derivace slabé.

Definujme si ještě Sobolevovy prostory s nulou na hranici $\partial\Omega$, ale jen pro první derivaci.

Definice 3.24. *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *otevřená množina. Definujme Sobolevův prostor* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *jako uzávěr množiny* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *v prostoru* $W^{1,2}(\Omega)$.

Předchozí definici chápeme takto: Pokud $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pak $f \in W^{1,2}(\Omega)$ a navíc $f(x) = 0$ pro $x \in \partial\Omega$. Musíme si ovšem uvědomit, že pojem $f(x) = 0$ je značně nepřesný, protože např. pro kruh $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \le 1\}$ je $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$ (tj. kružnice) míry nula a tudíž pokud funkci $f \in W^{1,2}(\Omega)$ změníme právě na $\partial\Omega$, jedná se vlastně o stejnou funkci, protože jsme ji změnili na nulové množině. A přesto chceme vědět, co jsou funkce s nulovou hodnotou právě na $\partial\Omega$.

KAPITOLA 4

Elementy funkcionální analýzy

1. Lineární a bilineární formy na Hilbertových prostorech

DEFINICE 4.1. *Nechť H je Hilbertův prostor a $b : H \to \mathbb{R}$ zobrazení. Říkáme, že b patří do duálu H, značíme $b \in H^*$, pokud*

(i) $b(x + y) = b(x) + b(y)$ *pro každé* $x, y \in H$;
(ii) $b(\alpha x) = \alpha b(x)$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a* $x \in H$;
(iii) *existuje konstanta* $B > 0$ *tak, že* $|b(x)| \leq B\|x\|$ *pro všechna* $x \in H$.

DEFINICE 4.2. *Zobrazení $A(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ se nazývá symetrická bilineární forma, pokud*

(i) $(Ax, y) = (Ay, x)$ *pro každé* $x, y \in H$;
(ii) $(A(x + y), z) = (Ax, z) + (Ay, z)$ *pro každé* $x, y, z \in H$;
(iii) $(A\alpha x, y) = \alpha(Ax, y)$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a* $x, y \in H$;
(iv) *existuje konstanta* $C > 0$ *tak, že* $|(Ax, y)| \leq C\ \|x\|\ \|y\|$ *pro všechna* $x, y \in H$.

LEMMA 4.3. *Buď $A(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $b \in H^*$. Položme $F(x) = (Ax, x) - 2b(x)$. Pak $F : H \to H$ je spojitá, tj. $x_n \to x$ v H, pak $F(x_n) \to F(x)$ v H.*

Důkaz. Nechť $x_n \to x$. Pak $\|x_n - x\| \to 0$ a víme. že konvergentní posloupnost reálných čísel je omezená. Existuje tedy $D > 0$ takové, že $\|x_n - x\| \leq D$ pro všechna n. Z toho máme

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq D + \|x\| := L. \tag{4.1}$$

Dokažme spojitost A. Snadno máme

$$\begin{aligned}
&|(Ax_n, x_n) - (Ax, x)| = |(A(x_n - x), x_n) + (Ax, x_n) - (Ax, x)| \\
&= |(A(x_n - x), x_n) + (A(x, x_n - x)| \leq |(A(x_n - x), x_n)| + |(A(x, x_n - x)| \\
&\leq K\|x_n - x\|\ \|x_n\| + K\|x\|\ \|x_n - x\| \leq (KL + K\|x\|)\|x_n - x\|.
\end{aligned}$$

Jelikož $\|x_n - x\| \to 0$, nutně $|(Ax_n, x_n) - (Ax, x)| \to 0$. Protože $b \in H^*$, je zobrazení $x \to (b, x)$ spojité a tedy $F(x)$ je spojité jakožto rozdíl dvou spojitých zobrazení.

□

DEFINICE 4.4. *Symetrická bilineární forma $A(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ se nazývá pozitivně definitní (či eliptický), pokud*

(v) *existuje konstanta* $c > 0$ *tak, že* $(Ax, x) \geq C\ \|x\|^2$ *pro všechna* $x \in H$ *(pozitivní definitnost).*

2. Kvadratické funkcionály na Hilbertových prostorech a existence minima

Věta 4.5. *Buď $A(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ symetrická pozitivně definitní bilineární forma a $b \in H^*$. Položme $F(x) = (Ax, x) - 2b(x)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $(Ay, x) = b(x)$ *pro každé* $x \in H$*;*
(ii) $F(y) = \min\{F(x); x \in H\}$.

Důkaz. Dokažme nejprve implikaci $(Ay, x) = b(x)$ pro každé $x \in H \;\Rightarrow\; F(y) = \min\{F(x); x \in H\}$. Nechť tedy $(Ay, x) = b(x)$ pro každé $x \in H$. Volme $x \in H$ libovolné. Pak

$$
\begin{aligned}
&F(x) = (Ax, x) - 2b(x) = (A(x-y), x-y) + (Ax, y) + (Ay, x) - (Ay, y) - 2b(x)\\
&=^{\text{symetrie}}= (A(x-y), x-y) + 2(Ay, x) - (Ay, y) - 2b(x) =^{\text{použijeme } (Ax,y)=(x,Ay)}\\
&= (A(x-y), x-y) - (Ay, y) = (A(x-y), x-y) + (Ay, y) - 2(Ay, y)\\
&=^{\text{použijeme } (Ax,y)=(x,Ay)}= (A(x-y), x-y) + (Ay, y) - 2(b, y) \geq^{\text{pozitivní definitnost} A}\\
&\geq c\|x-y\|^2 + (Ay, y) - 2(b, y) = c\|x-y\|^2 + F(y) \geq F(y).
\end{aligned}
$$

Dokažme opačnou implikaci $F(y) = \min\{F(x); x \in H\} \;\Rightarrow\; (Ax, y) = (x, Ay)$ pro každé $x \in H$. Předpokládejme, že y je takové, že $F(y) \leq F(x)$ pro každé $x \in H$. Označíme-li $h = x - y$, máme

$$
F(y+h) \geq F(y) \quad \text{pro každé } h \in H. \tag{4.2}
$$

Pak můžeme psát

$$
\begin{aligned}
&(A(y+h), y+h) - 2b(y+h) \geq (Ay, y) - 2b(y)\\
\Leftrightarrow &(A(y+h), y+h) - 2b(y+h) - (Ay, y) + 2b(y) \geq 0\\
\Leftrightarrow &2(Ay, h) + (Ah, h) - 2b(h) \geq 0\\
\Leftrightarrow &2(Ay, h) - 2b(h) \geq -(Ah, h)\\
\Leftrightarrow &(Ay, h) - b(h) \geq -\frac{1}{2}(Ah, h).
\end{aligned}
$$

Pišme na moment v poslední nerovnosti $-h$ místo h a dostaneme

$$
\begin{aligned}
&(Ay, -h) - b(-h) \geq -\frac{1}{2}(-Ah, -h)\\
\Leftrightarrow &(Ay, h) - b(h) \leq \frac{1}{2}(Ah, h)
\end{aligned}
$$

což dává pro každé $h \in H$

$$
-\frac{1}{2}(Ah, h) \leq (Ay, h) - b(h) \leq \frac{1}{2}(Ah, h).
$$

Pišme v poslední nerovnosti tx místo h a dostaneme pro každé $x \in H$ a pro každé $t \in \mathbb{R}$

$$
-\frac{1}{2}t^2(Ax, x) \leq t\big((Ay, x) - b(x)\big) \leq \frac{1}{2}t^2(Ax, x).
$$

Z toho plyne, že pro každé $h \in H$ a pro každé $0 \neq t \in \mathbb{R}$ je

$$
-\frac{1}{2}t(Ax, x) \leq (Ay, x) - b(x) \leq \frac{1}{2}t(Ax, x).
$$

Limitním přechodem $t \to 0$ získáme pro každé $x \in H$ vztah

$$(Ay, x) - b(x) = 0,$$

což jsme chtěli.

$\square$

VĚTA 4.6. *Buď $A(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ symetrická pozitivně definitní bilineární forma a $b \in H^*$. Položme $F(x) = (Ax, x) - 2b(x)$. Pak existuje jednoznačně určené $y \in H$ takové, že*

$$F(y) = \min\{F(x); x \in H\}.$$

Důkaz. Položme $a = \inf\{F(x); x \in H\}$. Zřejmě platí

$$F(x) = (Ax, x) - 2b(x) \geq^{A \text{ je pozitivně definitní}} \geq c\|x\|^2 - 2b(x)$$

$$\geq^{\text{Cauchyova nerovnost}} \geq c\|x\|^2 - 2\|b\|\,\|x\| = c\Big(\|x\| - \frac{\|b\|}{c}\Big)^2 - \frac{1}{c}\|b\|^2 \geq -\frac{1}{c}\|b\|^2$$

a tedy $a \in \mathbb{R}$ (není $-\infty$).

Počítejme pro x, y

$$\begin{aligned} F(x) + F(y) - 2F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= (Ax, x) + (Ay, y) - 2b(x+y) \\ &\quad - 2\Big(A\Big(\frac{x+y}{2}\Big), \frac{x+y}{2}\Big) + 4b\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \\ &= (Ax, x) + (Ay, y) - \frac{1}{2}(A(x+y), x+y) \\ &= (Ax, x) + (Ay, y) - \frac{1}{2}(Ax, x) - \frac{1}{2}(Ay, y) - (Ax, y) \\ &= \frac{1}{2}\big((Ax, x) - 2(Ax, y) + (Ay, y)\big) = \frac{1}{2}(A(x-y), x-y). \end{aligned}$$

Nechť posloupnost vektorů slňuje $F(x_n) \to a$. Pak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c}\|x_n - y_n\|^2 &\leq^{A \text{ je pozitivně definitní}} \leq \frac{1}{2}(A(x_n - x_m), x_n - x_m) \\ &= F(x_n) + F(x_m) - 2F\Big(\frac{x_n + x_m}{2}\Big) \leq F(x_n) + F(x_m) - 2a. \end{aligned}$$

Protože $F(x_n) \to a$, $F(x_m) \to a$, platí $F(x_n)+F(x_m)-2a \to 0$ a tedy $\|x_n-y_n\|^2 \to 0$. To znamená, že posloupnost x_n je Cauchyovská aprotože H je úplný, existuje $y = \lim_{n\to\infty} x_n$. Protože F je podle lemmatu 4.3 spojitá funkce na H, máme $F(y) = a$ a tedy

$$F(y) = \inf\{F(x); x \in H\} \quad (= \min\{F(x); x \in H\} \quad)$$

neboť minima se nabývá pro y.

Nyní ukážeme jednoznačnost y. Nechť z splňuje $z = \min\{F(x); x \in H\}$. Pak $F(z) = F(y)$ a

$$\frac{1}{2c}\|z - y\|^2 \leq \frac{1}{2}(A(z-y), z-y) = F(z) + F(y) - 2F\Big(\frac{z+y}{2}\Big) \leq 2a - 2a - 0$$

a tedy $z = y$.

$\square$

KAPITOLA 5

Rovnice nosníku

Malé prohnutí vodorovného nosníku zatíženého silou $f(x)$ a stlačeného silou F je dán rovnicí

$$-EIy'' = Fy + \int_0^x (x-t)f(t)dt,$$

kde E je Youngův modul pružnosti materiálu a I moment setrvačnosti průřezu. Dvojnásobným derivováním máme

$$-EIy'''' = Fy'' + f(x).$$

KAPITOLA 6

Aplikace na obyčejné diferenciální rovnice

1. Úvod

Z teorie rovnice nosníku máme rovnici

$$-u'' + \lambda u = g(x) \tag{6.1}$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(l) = 0. \tag{6.2}$$

řešení budeme chápat ve slabém smyslu.

2. Případ $\lambda > 0$

Definice 6.1. *Nechť $g \in L^2(0,l)$. Funkci $u \in W_0^{1,2}(0,l)$ nazveme slabým řešením problému* (6.1) *a* (6.2)*, pokud pro každou funkci $v \in W_0^{1,2}(0,l)$ platí*

$$\int_0^l \big(u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x)\big)dx = \int_0^l g(x)v(x)dx. \tag{6.3}$$

Věta 6.2. *Nechť $\lambda > 0$. Potom zobrazení $A(u,v) : W_0^{1,2}(0,l) \times W_0^{1,2}(0,l) \to \mathbb{R}$ definované předpisem*

$$A(u,v) = \int_0^l \big(u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x)\big)dx$$

je symetrická pozitivně definitní bilineární forma.

Důkaz. Ověříme postupně platnost (i), (ii), (iii) a (iv) z definice (4.2) a potom (v) z definice (4.4).

Vlastnost (i).

$$\begin{aligned}(Au,v) &= \int_0^l \big(u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x)\big)dx \\ &= \int_0^l \big(v'(x)u'(x) + \lambda v(x)u(x)\big)dx = (Av,u)\end{aligned}$$

Vlastnost (ii).

$$\begin{aligned}&(A(u+v),w) = \int_0^l \big((u'(x)+v'(x))w'(x) + \lambda(u(x)+v(x))w(x)\big)dx \\ &= \int_0^l \big(u'(x)w'(x) + v'(x)w'(x) + \lambda u(x)w(x) + \lambda v(x)w(x)\big)dx \\ &= \int_0^l \big(u'(x)w'(x) + \lambda u(x)w(x)\big)dx + \int_0^l \big(v'(x)w'(x) + \lambda v(x)w(x)\big)dx \\ &= (Au,w) + (Av,w)\end{aligned}$$

Vlastnost (iii).

$$
\begin{aligned}
(A\alpha u, v) &= \int_0^l \big(\alpha u'(x)v'(x) + \lambda\alpha u(x)v(x)\big)dx \\
&= \alpha \int_0^l \big(u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x)\big)dx = \alpha(Au, v)
\end{aligned}
$$

Vlastnost (iv).

$$
\begin{aligned}
&|(Au, v)| = \Big|\int_0^l \big(u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x)\big)dx\Big| \\
&\leq \int_0^l |u'(x)v'(x)|dx + \lambda \int_0^l |u(x)v(x)|dx \leq^{\text{Schwarzova nerovnost}} \\
&\leq \Big(\int_0^l u'^2(x)dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^l v'^2(x)dx\Big)^{1/2} + \lambda\Big(\int_0^l u^2(x)dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^l v^2(x)dx\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\int_0^l u'^2(x) + u^2(x)\ dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^l v'^2(x) + v^2(x)\ dx\Big)^{1/2} \\
&\qquad + \lambda\Big(\int_0^l u'^2(x) + u^2(x)\ dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^l v'^2(x) + v^2(x)\ dx\Big)^{1/2} \\
&\leq (1+\lambda)\Big(\int_0^l u'^2(x) + u^2(x)\ dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^l v'^2(x) + v^2(x)\ dx\Big)^{1/2} \\
&= (1+\lambda)\|u\|_{W_0^{1,2}(0,l)}\|v\|_{W_0^{1,2}(0,l)}.
\end{aligned}
$$

Vlastnost (v) z definice (4.4).

$$
\begin{aligned}
(Au, u) &= \int_0^l u'^2(x) + \lambda u^2(x)\ dx \\
&\geq \min(1,\lambda) \int_0^l u'^2(x) + u^2(x)\ dx = \min(1,\lambda)\|u\|^2_{W_0^{1,2}(0,l)}.
\end{aligned}
$$

Tím je důkaz hotov.

□

VĚTA 6.3. *Nechť $g \in L^2(0,l)$. Potom zobrazení $b(v) : W_0^{1,2}(0,l) \to \mathbb{R}$ definované předpisem*

$$b(v) = \int_0^l g(x)v(x)dx.$$

Potom $A(.,.) : W_0^{1,2}(0,l) \times W_0^{1,2}(0,l) \to \mathbb{R}$ je prvek $(W_0^{1,2}(0,l))^*$.

Důkaz. Vlastnost (i) z definice (4.1):

$$
\begin{aligned}
b(u+v) = \int_0^l g(x)(u(x)+v(x))dx = \\
\int_0^l g(x)u(x)dx + \int_0^l g(x)v(x)dx = b(u) + b(v).
\end{aligned}
$$

Vlastnost (ii) z definice (4.1):

$$b(\alpha v) = \int_0^l g(x)(\alpha u(x))dx = \alpha \int_0^l g(x)u(x)dx = \alpha b(u).$$

Vlastnost (iii) z definice (4.1):

$$
\begin{aligned}
|b(v)| &= \Big| \int_0^l g(x)u(x)dx \Big| \leq^{\text{Schwarzova nerovnost}} \\
&\leq \Big(\int_0^l g^2(x)dx \Big)^{1/2} \Big(\int_0^l u^2(x)dx \Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\int_0^l g^2(x)dx \Big)^{1/2} \Big(\int_0^l u'^2(x) + u^2(x)dx \Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Protože $g \in L^2(0,l)$, je $C := \int_0^l g^2(x)dx < \infty$. Navíc $\int_0^l u'^2(x) + u^2(x)dx = \|u\|^2_{W_0^{1,2}(0,l)}$ a tedy $|b(v)| \leq \sqrt{C}\|u\|_{W_0^{1,2}(0,l)}$, což dokazuje (iii).

□

Věta 6.4. *Buď $g \in L^2(0,l)$ a $\lambda > 0$. Potom existuje jednoznačné slabé řešení problému* (6.1) *a* (6.2).

Důkaz. Slabé řešení definované (6.3) problému (6.1) a (6.2) lze přepsat takto: hledáme $u \in W_0^{1,2}(0,l)$ tak, že

$$(Au, v) = (g, v), \quad v \in W_0^{1,2}(0,l).$$

protože dle věty 6.2 je (Au, v) symetrická pozitivně definitní bilineární forma a dle věty 6.3 je (g, v) prvkem $\big(W_0^{1,2}(0,l)\big)^*$, existuje dle vět 4.6 a 4.5 jedoznačné slabé řešení.

□

3. Případ $\lambda = 0$

V případě $\lambda = 0$ se nedá použít přímo věta 4.6, protože věta 6.2 nám nezaručuje, že bilineární forma $(Au, v) = \int_0^l u'v'$ je positivně definitní na $W_0^{1,2}(0,l)$. Ale pokud se nám to podaří dokázat nějak jinak, pak máme opět existenci a jednoznačnost slabého řešení. Věta 6.6 ukazuje, že tomu tak skutečně je. Nejprve si ale dokážeme lemma.

Lemma 6.5. *Pro všechna $u \in W_0^{1,2}(0,l)$ platí*

$$\int_0^l u^2(x)dx \leq l^2 \int_0^l u'^2(x)dx.$$

Důkaz. Protože $u(0) = 0$, platí

$$u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t)dt \;\Rightarrow\; u(x) = \int_0^x u'(t)dt$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
u^2(x) &= \Big(\int_0^x u'(t)dt \Big)^2 \leq^{\text{Schwarzova nerovnost}} \\
&\leq \Big(\int_0^x 1dt \Big) \Big(\int_0^x u'^2(t)dt \Big) \leq \Big(\int_0^l 1dt \Big) \Big(\int_0^l u'^2(t)dt \Big) \\
&= l \, \Big(\int_0^l u'^2(t)dt \Big).
\end{aligned}
$$

Integrací máme

$$\int_0^l u^2(x)dx \le l \int_0^l \Big(\int_0^l u'^2(t)dt \Big) dx = l^2 \int_0^l u'^2(t)dt = l^2 \int_0^l u'^2(x)dx.$$

$\square$

VĚTA 6.6. *Zobrazení* $A(u,v) : W_0^{1,2}(0,l) \times W_0^{1,2}(0,l) \to \mathbb{R}$ *definované předpisem*

$$A(u,v) = \int_0^l u'(x)v'(x)dx$$

je symetrická pozitivně definitní bilineární forma.

Důkaz. Ověříme postupně platnost (i), (ii), (iii) a (iv) z definice (4.2) a potom (v) z definice (4.4).

Vlastnosti (i), (ii) a (iii) se ověří analogicky jako ve větě 6.2.

Vlastnost (iv).

$$\begin{aligned} |(Au,v)| &= \Big| \int_0^l u'(x)v'(x)dx \Big| \le \int_0^l |u'(x)v'(x)|dx \le^{\text{Schwarzova nerovnost}} \\ &\le \Big(\int_0^l u'^2(x)dx \Big)^{1/2} \Big(\int_0^l v'^2(x)dx \Big)^{1/2} \\ &\le \Big(\int_0^l u'^2(x) + u^2(x)\ dx \Big)^{1/2} \Big(\int_0^l v'^2(x) + v^2(x)\ dx \Big)^{1/2} \\ &= \|u\|_{W_0^{1,2}(0,l)} \|v\|_{W_0^{1,2}(0,l)}. \end{aligned}$$

Vlastnost (v) z definice (4.4). Díky lemmatu 6.5 máme

$$\int_0^l u^2(x)dx \le l^2 \int_0^l u'^2(x)dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{l^2} \int_0^l u^2(x)dx \le \int_0^l u'^2(x)dx.$$

Přičteme nyní $\frac{1}{l^2} \int_0^l u'^2(x)dx$ a dělíme $1 + \frac{1}{l^2}$. Dostaneme

$$\frac{1}{1+l^2} \Big(\int_0^l u'^2(x)dx + \int_0^l u^2(x)dx \Big) \le \int_0^l u'^2(x)dx$$

a tedy

$$\begin{aligned} (Au,u) &= \int_0^l u'^2(x) \ge \frac{1}{1+l^2} \Big(\int_0^l u'^2(x)dx + \int_0^l u^2(x)dx \Big) \\ &= \frac{1}{1+l^2} \|u\|^2_{W_0^{1,2}(0,l)}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

$\square$

VĚTA 6.7. *Buď* $g \in L^2(0,l)$ *a* $\lambda = 0$. *Potom existuje jednoznačné slabé řešení problému* (6.1) *a* (6.2).

Důkaz. Slabé řešení definované (6.3) problému (6.1) a (6.2) lze přepsat takto: hledáme $u \in W_0^{1,2}(0,l)$ tak, že

$$(Au,v) = (g,v), \quad v \in W_0^{1,2}(0,l).$$

protože dle věty 6.6 je (Au,v) symetrická pozitivně definitní bilineární forma a dle věty 6.3 je (g,v) prvkem $\big(W_0^{1,2}(0,l)\big)^*$, existuje dle vět 4.6 a 4.5 jedoznačné slabé řešení.

$\square$

4. Případ $\lambda < 0$

V tomto případě naprosto ztrácíme pozitivní definitnost formy (Au, v) a předchozích vět nelze použít. Zkoumejme tedy problém (6.1) a (6.2) klasickým přístupem. Nechť $\lambda = -\omega^2 < 0$ a řešme nejprve

$$-u'' - \omega^2 u = 0, \qquad u(0) = u(l) = 0. \tag{6.4}$$

Charakteristická rovnice je $-\lambda^2 - \omega^2 = 0$ a tedy $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Fundamentální sytém je $\cos\omega x,\ \sin\omega x$ a obecné řešení je

$$u(x) = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x.$$

počítejme nyní c_1 a c_2 z okrajových podmínek. Dosaďme $x = 0$ a máme $0 = c_1$. Tedy

$$u(x) = c_2 \sin\omega x.$$

Dosaďme $x = l$ a dostaneme

$$0 = u(l) = c_2 \sin\omega l.$$

Nechť $\sin\omega l = 0$

Je-li $\sin\omega l = 0$, je $\omega l = k\pi$ pro nějaké přirozené k. Tedy

$$\lambda = -\omega^2 = -\Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2.$$

V takovém případě je ovšem řešením libovolná funkce

$$u(x) = c\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Daný problém (6.4) má tedy nekonečně mnoho řešení.

Nechť $\sin\omega l \neq 0$

Je-li $\sin\omega l \neq 0$, je $\omega l \notin \{k\pi, k \in \mathbb{N}\}$. Tedy

$$\lambda \neq -\omega^2 = -\Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2.$$

V takovém případě je ovšem řešením jediná funkce

$$u(x) = 0.$$

Daný problém (6.4) má tedy jediné řešení.

Definice 6.8. *Čísla $\lambda_k = \big(\frac{k\pi}{l}\big)^2$ se nazývají vlastní čísla problému* (6.4) *a funkce $u_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$ se nazývají vlastní funkce problému* (6.4).

Platí následující věta.

Věta 6.9. *Nechť $\lambda \notin \{-\big(\frac{k\pi}{l}\big)^2, k \in \mathbb{N}\}$. Pak existuje právě jedno řešení problému* (6.4) *a to je nulová funkce.*

Nechť $\lambda = -\big(\frac{k\pi}{l}\big)^2$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak existuje nekonečně mnoho řešení problému (6.4), *množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor ve $W_0^{1,2}(0, l)$ a*

$$\mathcal{P} = \{c\sin\frac{k\pi x}{l}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Zkoumejme nyní nehomogenní problém, tj. pro danou funkci $f \in L^2(0,l)$ nalézt slabé řešení okrajového problému

$$-u'' - \lambda u = f(x), \qquad u(0) = u(l) = 0. \tag{6.5}$$

Platí následující klíčová věta.

VĚTA 6.10. *Buď $f \in L^2(0,l)$.*

(i) *Nechť $\lambda \notin \{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}\}$. Pak existuje právě jedno řešení problému (6.5).*

(ii) *Nechť $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak*

1. *Pokud*
$$\int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \neq 0,$$
neexistuje žádné řešení.

2. *Pokud*
$$\int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0,$$
existuje nekonečně mnoho řešení problému (6.5), množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří afinní (posunutý vektorový) prostor ve $W_0^{1,2}(0,l)$ a
$$\mathcal{P} = \{u_0(x) + c \sin \frac{k\pi x}{l}, c \in \mathbb{R}\},$$
kde $u_0(x)$ je libovolné řešení problému (6.5).

Důkaz. Jen náznak. Nechť existuje slabé řešení $u(x)$ problému (6.5) s vlastním číslem $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$. Předpokládejme, že toto řešení má dokonce spojité druhé derivace (to nastane, pokud $f(x)$ je spojitá). Pak je toto řešení klasické a platí

$$-u''(x) - \lambda_k u(x) = f(x), \quad u(0) = u(l) = 0$$

v každém bodě $x \in (0,l)$. Násobíme tuto rovnost vlastní funkcí $u_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$, integrujeme od 0 do l a dostaneme

$$\int_0^l (-u''(x) - \lambda_k u(x)) u_k(x) dx = \int_0^l f(x) u_k(x) dx.$$

Užitím per partes (a vlastností $u(0) = u(l) = 0$, $u_k(0) = u_k(l) = 0$) máme

$$\begin{aligned}
&\int_0^l u''(x) u_k(x) dx = [u'(x) u_k(x)]_0^l - \int_0^l u'(x) u_k'(x) dx \\
&= -\int_0^l u'(x) u_k'(x) dx = -[u(x) u_k'(x)]_0^l + \int_0^l u(x) u_k''(x) dx \\
&= \int_0^l u(x) u_k''(x) dx
\end{aligned}$$

a dosazením máme

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (-u''(x) - \lambda_k u(x)) u_k(x) dx = -\int_0^l u''(x) u_k(x) dx - \lambda_k \int_0^l u(x) u_k(x) dx \\
&= -\int_0^l u(x) u_k''(x) dx - \lambda_k \int_0^l u(x) u_k(x) dx = \int_0^l u(x)(-u_k''(x) dx - \lambda_k u_k(x)) dx,
\end{aligned}$$

tedy

$$\int_0^l u(x)(-u_k''(x)dx - \lambda_k u_k(x))dx = \int_0^l f(x)u_k(x)dx.$$

Nyní využijeme té vlastnosti, že vlastní funkce $u_k(x)$ řeší problém (6.4) pro $\lambda = -\lambda_k$ a tedy je

$$-u_k''(x)dx - \lambda_k u_k(x) = 0$$

což dává

$$\int_0^l f(x)u_k(x)dx = 0.$$

Pokud má tedy úloha (6.5) řešení, je $\int_0^l f(x)u_k(x)dx = 0$. A platí to i naopak. Ale to už nebudeme dokazovat.

□

KAPITOLA 7

Parciální diferenciální rovnice

1. Úvodní definice

DEFINICE 7.1. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ libovolná. Říkáme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ splňuje Lipschitzovu podmínku, pokud existuje $L \geq 0$ taková, že*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

pro libovolné $x, y \in M$.

VĚTA 7.2. *Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská. Pak existuje $N \subset (a, b)$ Lebesgueovy míry nula taková, že $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in (a, b) \setminus N$.*

Důkaz. Toto je poměrně hluboké tvrzení z teorie míry a důkaz vyžaduje znalost jistých pokrývacích vět. Proto ho nebudeme provádět.

□

DEFINICE 7.3. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otevřená množina. Říkáme, že Ω je oblast s Lipschitzovskou hranicí (píšeme $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$), pokud jsou splněny následijící podmínky:*

(i) *existuje konečný počet m kartézských systémů (x_r, y_r), $r = 1, 2, \ldots, m$, a stejný počet funkcí $a_r(.)$ definovných na intervalech $\triangle_r = [x'_r - \delta_r; x_r + \delta_r]$ tak, že pro libovolný bod $z \in \partial\Omega$ existuje $1 \leq r \leq m$, které splňuje*

$$z = [x_r, y_r], \quad x_r \in \triangle_r, \quad y_r = a_r(x_r),$$

(ii) *funkce a_r jsou lipschitzovské na $\triangle_r$,*

(iii) *existuje $\beta > 0$ takové, že pro všechna r můžeme množina*

$$B_r = \{[x_r, y_r]; x_r \in \triangle_r, a_r(x_r) - \beta < y_r < a_r(x_r) + \beta\}$$

splňuje

$$\begin{aligned} V_r &= B_r \cap \Omega = \{[x_r, y_r]; x_r \in \triangle_r, a_r(x_r) - \beta < y_r < a_r(x_r)\}, \\ \Gamma_r &= B_r \cap \partial\Omega = \{[x_r, y_r]; x_r \in \triangle_r, a_r(x_r) = y_r\}, \\ B_r \setminus \overline{\Omega} &= \{[x_r, y_r]; x_r \in \triangle_r, a_r(x_r) < y_r < a_r(x_r) + \beta\}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že čtverec, obdélník, trojúhelník, obecný n-úhelník (jehož hrany se nepritínají uvnitř) jsou všechno oblasti s lipschitzovskou hranicí.

Následující věta uvádí speciální část tzv. Greenovy věty. Je to vlastně perpartes pro vícerozměrný integrál.

VĚTA 7.4 (Greenova věta). *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Nechť f, g jsou hladké funkce definované v oblasti Ω, $\underline{f = 0, g = 0 \text{ na hranici } \partial\Omega}$. Pak*

$$\int_\Omega f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dxdy = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)g(x,y)dxdy \tag{7.1}$$

$$\int_\Omega f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)dxdy = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)g(x,y)dxdy \tag{7.2}$$

$$\int_\Omega f(x,y)\Delta g(x,y)dxdy = -\int_\Omega \nabla f(x,y)\nabla g(x,y)dxdy \tag{7.3}$$

$$\left(= -\int_\Omega \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy\right).$$

Samozřejmě by bylo možné formulovat obecnější větu bez předpokladu $f = 0, g = 0$ na hranici $\partial\Omega$, ale pak tam vyskakuje (jako v jedné dimenzi) nějaký hraniční člen (něco jako $\int_{\partial\Omega}\dots$) a my bychom ho museli definovat, což sice není nijak obtížné, ale dá to dost technické práce.

2. Rovnice $-\Delta u + \lambda u = f$ s nulovou okrajovou podmínkou

Je dána oblast Ω v rovině a reálné číslo λ. Hledáme funkci, která splňuje

$$-\Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) := -\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \lambda u(x,y) = f(x,y) \tag{7.4}$$

$$u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \partial\Omega. \tag{7.5}$$

Slabá formulace problému.

Vynásobíme (7.4) testovací funkcí $v(x,y)$ takovou že $v(x,y) = 0$ na $\partial\Omega$ a integrujeme přes Ω. Užitím (7.3) dostaneme následující slabou formulaci (7.4).
Hledáme $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ takovou, že

$$\int_\Omega (\nabla u(x,y)\nabla v(x,y) + \lambda\ u(x,y)v(x,y))dxdy = \int_\Omega f(x,y)v(x,y)dxdy \tag{7.6}$$

pro každou funkci $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Označme v dalším

$$H = W_0^{1,2}(\Omega),$$
$$(Au, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda uv,$$
$$(f, v) = \int_\Omega fv.$$

Případ $\lambda > 0$.

VĚTA 7.5. *Bilineární forma (Au, v) je symetrická pozitivně definitní na H.*

Důkaz. Symetrie je jasná. Dokažme omezenost.

$$\begin{aligned}
(Au,v) &= \Big|\int_\Omega \nabla u\nabla v + \lambda uv\Big| \le \Big|\int_\Omega \nabla u\nabla v\Big| + \lambda\Big|\int_\Omega uv\Big| \\
&\le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2\Big)^{1/2} + \lambda\Big(\int_\Omega |u|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |v|^2\Big)^{1/2} \\
&\le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2\Big)^{1/2} \\
&\qquad + \lambda\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2\Big)^{1/2} \\
&\le (1+\lambda)\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2\Big)^{1/2} = (1+\lambda)\|u\|_H\ \|v\|_H.
\end{aligned}$$

Pozitivní definitnost.

$$(Au,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda|u|^2 \ge \min(1,\lambda)\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 = \min(1,\lambda)\|u\|_H^2.$$

□

VĚTA 7.6. *Nechť $f \in L^2(\Omega)$. Pak lineární zobrazení (f,v) je prvek H^*.*

Důkaz. Linearita je jasná. Dokažme omezenost.

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega fv\Big| &\le \Big(\int_\Omega f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega v^2\Big)^{1/2} \\
&\le \Big(\int_\Omega f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2\Big)^{1/2} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|u\|_H.
\end{aligned}$$

□

Následující věta je snadný důsledek vět (7.5), (7.6), (4.6) a (4.5).

VĚTA 7.7. *Nechť $f \in L^2(\Omega)$ a $\lambda > 0$. Pak existuje právě jedno slabé řešení problému* (7.7).

Případ $\lambda = 0$ - rovnice membrány.

Je dána oblast Ω v rovině a membrána je připevněná k hranici $\partial\Omega$. Na tuto membránu působí nějaká kolmá síla $f(x,y)$. Jaký tvar zaujme membrána? Matematická formulace problému je následující: membrána zaujímá tvar funkce $u(x,y)$, která splňuje

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \partial\Omega \tag{7.7}$$

což je úloha (7.5) a (7.4) pro $\lambda = 0$.

Slabá formulace problému.

Z (7.6) dostaneme následující slabou formulaci (7.7).
Hledáme $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ takovou, že

$$\int_\Omega \nabla u(x,y)\nabla v(x,y)dxdy = \int_\Omega f(x,y)v(x,y)dxdy \tag{7.8}$$

pro každou funkci $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Nyní ale forma (Au,v) není tak evidentně pozitivně symetrická. To se musí ukázat pomoc í následující věty.

VĚTA 7.8. *Existuje $c > 0$ takové, že*
$$\int_\Omega |u|^2 \le c \int_\Omega |\nabla u|^2$$
pro každou funkci $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Důkaz. Buď $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pak $u = 0$ na $\partial\Omega$. Rozšiřme u nulou mimo Ω a označme toto rozšíření $\widetilde{u}$. Protože $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, je Ω omezená a tedy existuje $T > 0$ takové, že $\overline{\Omega} \subset (-T,T)^2 := \mathcal{T}$. Zřejmě je $\widetilde{u} \in W_0^{1,2}(\mathcal{T})$ a $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|\widetilde{u}\|_{W_0^{1,2}(\mathcal{T})}$. Buď $(x,y) \in \mathcal{T}$. Pak
$$u(x,y) = u(x,y) - u(-T,y) = \int_{-T}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(t,y)dt.$$
Následně máme
$$|u(x,y)| \le \int_{-T}^{x} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\Big| dt \le^{\text{Schwarz}} \le \sqrt{2T}\left(\int_{-T}^{x} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\Big|^2 dt\right)^{1/2}.$$
Tedy
$$|u(x,y)|^2 \le 2T \int_{-T}^{T} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\Big|^2 dt.$$
Integrací od $-T$ do T podle y dostaneme
$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} |u(x,y)|^2 dy &\le 2T \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\Big|^2 dtdy \\ &= 2T \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 \le 2T \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial y}\Big|^2.\end{aligned}$$
Integrací poslední nerovnosti podle od $-T$ do T podle x dostaneme
$$\int_\Omega |u|^2 = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} |u(x,y)|^2 dxdy \le (2T)^2 \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial y}\Big|^2 = (2T)^2 \int_\Omega |\nabla u|^2.$$
□

Označme v dalším $H = W_0^{1,2}(\Omega)$, $(Au,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ a $(f,v) = \int_\Omega fv$.

VĚTA 7.9. *Bilineární forma (Au,v) je symetrická pozitivně definitní na H.*

Důkaz. Symetrie je jasná. Dokažme omezenost.
$$\begin{aligned}(Au,v) &= \Big|\int_\Omega \nabla u \nabla v\Big| \le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2\Big)^{1/2} \\ &\le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2\Big)^{1/2} = \|u\|_H\ \|v\|_H.\end{aligned}$$
Pozitivní definitnost.
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \ge \frac{1}{c}\int_\Omega |u|^2$$
což dává
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \ge \frac{1}{1+c}\|u\|_H^2.$$
To nám okamžitě implikuje
$$(Au,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \ge \frac{1}{1+c}\|u\|_H^2.$$

□

VĚTA 7.10. *Nechť $f \in L^2(\Omega)$. Pak lineární zobrazení (f, v) je prvek H^*.*

Důkaz. Linearita je jasná. Dokažme omezenost.

$$\Big|\int_\Omega fv\Big| \le \Big(\int_\Omega f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega v^2\Big)^{1/2}$$
$$\le \Big(\int_\Omega f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2\Big)^{1/2} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|u\|_H.$$

□

Následující věta je snadný důsledek vět (7.9), (7.10), (4.6) a (4.5).

VĚTA 7.11. *Nechť $f \in L^2(\Omega)$. Pak existuje právě jedno slabé řešení problému* (7.7).

Případ $\lambda < 0$ - problém vlastních čísel.

V tomto případě naprosto ztrácíme pozitivní definitnost formy (Au, v) a předchozích vět nelze použít. Zkoumejme tedy problém (7.5), (7.4) či jeho slabou formulaci (7.6). Zabývejme se nejprve případem $f = 0$. Pak hledáme $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ takovou, že

$$\int_\Omega (\nabla u(x,y)\nabla v(x,y) + \lambda\ u(x,y)v(x,y))dxdy = 0 \tag{7.9}$$

pro každou funkci $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

DEFINICE 7.12. *Číslo $-\lambda$ se nazývá vlastním číslem problému* (7.9)*, pokud existuje* <u>*nenulová*</u> *funkce $u(x,y) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že* (7.9) *je splněna pro každou funkci $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Funkce $u(x,y)$ se nazývá vlastní funkce příslušná k vlastnímu číslu $-\lambda$.*

Analogicky jako v jedné dimenzi platí následující věty.

VĚTA 7.13. *Existuje rostoucí posloupnost vlastních čísel $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ a ke každému vlastnímu číslu existuje konečné dimensionální podprostor H_k tvořený vlastními funkcemi.*

VĚTA 7.14. *Nechť λ není vlastní číslo. Pak existuje právě jedno řešení $u(x,y) = 0$ problému* (7.9).

Nechť $\lambda = -\lambda_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak existuje nekonečně mnoho řešení problému (7.9)*, množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor ve $W_0^{1,2}(0,l)$ a $\mathcal{P} = H_k$.*

Zkoumejme nyní nehomogenní problém, tj. pro danou funkci $f \in L^2(\Omega)$ nalézt slabé řešení okrajového problému (7.6). Platí následující klíčová věta.

VĚTA 7.15. *Buď $f \in L^2(\Omega)$.*

(i) *Nechť λ není vlastní číslo problému* (7.9)*. Pak existuje právě jedno řešení problému* (7.6).
(ii) *Nechť $\lambda = -\lambda_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak*

1. *Pokud*

$$\int_\Omega f(x,y)u(x,y)dx \neq 0,$$

pro nějakou vlastní funkci příslušnou λ_k *(tj.* f *není ortogonální k prostoru* H_k*), neexistuje žádné řešení.*

2. *Pokud*

$$\int_\Omega f(x,y)u(x,y)dx = 0,$$

pro každou vlastní funkci (tj. f *je ortogonální k prostoru* H_k*), existuje nekonečně mnoho řešení problému* (7.6)*, množina* $\mathcal{P}$ *všech řešení tvoří afinní (posunutý vektorový) prostor ve* $W_0^{1,2}(0,l)$ *a*

$$\mathcal{P} = \{u_0(x) + H_k\},$$

kde $u_0(x)$ *je libovolné řešení problému* (7.6)*.*

Případ $\Omega = (0,l_1) \times (0,l_2)$**.**

Pro tento speciální tvar lze vlastní čísla a vlastní funkce spočítat. Vlastní čísla jsou

$$\lambda_1 = \pi^2\Big(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\Big) \qquad \lambda_2 = \pi^2\Big(\frac{4}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\Big)$$

$$\lambda_3 = \pi^2\Big(\frac{1}{l_1^2} + \frac{4}{l_2^2}\Big) \qquad \lambda_4 = \pi^2\Big(\frac{9}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\Big)$$

Je-li nyní $l_1 = l_2 = l$, dostaneme $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{5\pi^2}{l^2}$ a k tomuto vlastnímu číslu existují dvě nezávislé vlastní funkce

$$\sin\frac{2\pi x}{l}\,\sin\frac{\pi y}{l}, \qquad \sin\frac{\pi x}{l}\,\sin\frac{2\pi y}{l}$$

což je rozdíl oproti jedné dimenzi.

3. Průhyb desky

V teorii rovinné pružnosti se řeší následující problém:
Je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mimo ní vystavíme betonovou stěnu. Matematicky je ta stěna množina $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \notin \Omega, -h \le z \le h\}$. ve výšce 0 vetkneme do stěny nosnou desku a zatížíme ji kolmou silou $f(x,y)$. Jak se prohne deska?

Nejprve si definujeme vnější normálu k $\partial\Omega$.

Definice 7.16. *Buď* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ *oblast v rovině a nechť* $(x,y) \in \partial\Omega$*. Potom vektor* $\nu := \nu(x,y)$ *je vektor vnější normály, pokud je kolmý k hranici* $\partial\Omega$ *v bodě* (x,y) *(to má pro* $\Omega \in \mathcal{C}^1$ *smysl), je jednotkový (tj.* $|\nu| = 1$*) a směřuje ven z oblasti* Ω*.*

Definice 7.17. *Buď* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ *oblast v a nechť* $g(x,y) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$*. Definujme derivaci* g *podle vnější normály* $\nu = (\nu_1,\nu_2)$ *v bodě* (x,y) *vztahem*

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu} = \lim_{t\to 0}\frac{g(x+t\nu_1, y+t\nu_2) - g(x,y)}{t}.$$

Matematická formulace problému je následující:
Je dána funkce $f(x,y)$ v oblasti Ω. Hledáme funkci $u(x,y)$ definovanou v Ω takovou, že

$$\Delta^2 u(x,y) := \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} = f(x,y) \text{ v } \Omega, \tag{7.10}$$

$$u(x,y) = 0 \text{ v } \partial\Omega, \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu} = 0 \text{ v } \partial\Omega. \tag{7.12}$$

VĚTA 7.18 (Varianta Greenovy věty). *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Nechť f, g jsou hladké funkce definované v oblasti Ω, $\underline{f = 0, \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0, g = 0, \frac{\partial g}{\partial \nu} = 0 \text{ na hranici } \partial\Omega}$. Pak*

$$\int_\Omega \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\, g = \int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \tag{7.13}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\, g = \int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}, \tag{7.14}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\, g = \int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}. \tag{7.15}$$

Slabá formulace problému.

Vynásobíme nyní (7.10) testovací funkcí $v(x,y)$ a integrujeme přes Ω. Užitím (7.15), (7.14) a (7.13) máme

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\, \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \\ + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\, \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \Big) dxdy = \int_\Omega f(x,y) v(x,y).\end{aligned} \tag{7.16}$$

Slabá formulce problému je tedy tato:
Je dána $f(x,y) \in L^2(\Omega)$. Hledáme funkci $u(x,y) \in W_0^{2,2}(\Omega)$ takovou, že rovnost (7.16) je splněna pro všechny funkce $v(x,y) \in W_0^{2,2}(\Omega)$.

Označme v dalším

$$H = W_0^{2,2}(\Omega),\ (f,v) = \int_\Omega fv,$$

$$(Au,v) = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Připomeňme si ještě normu v H:

$$\begin{aligned}\|u\|_H = \Big(\int_\Omega \Big| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \Big|^2 \\ + \Big| \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Big|^2 + |u(x,y)|^2 dxdy \Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

VĚTA 7.19. *Existuje konstanta $K > 0$ taková, že nerovnost*

$$\int_\Omega \Big| \frac{\partial u}{\partial x} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial u}{\partial x} \Big|^2 + |u|^2 \leq K \int_\Omega \Big| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|^2.$$

Důkaz. Nejprve si připomeneme triviální nerovnost

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

Uvědomme si, že pokud je $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$, je $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ pro všechna i, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, což dává dle věty 7.8

$$\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 dxdy \leq C \int_\Omega \Big|\nabla\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big|^2 dxdy = C \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|^2 dxdy$$
$$= 2C \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|^2 dxdy.$$

Analogicky platí

$$\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial y}\Big|^2 dxdy \leq 2C \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|^2 dxdy$$

a tedy

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \leq 4C \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\Big|^2.$$

Navíc, protože $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dostaneme

$$\int_\Omega |u|^2 dxdy \leq K \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy$$
$$\leq 4CK \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\Big|^2$$

což v kombinaci s předchozí nerovností dokazuje větu.

□

Věta 7.20. *Bilineární forma (Au, v) je symetrická pozitivně definitní na H.*

Důkaz. Symetrie je jasná. Dokažme omezenost. Ze Schwarzovy nerovnosti máme

$$|(Au,v)| = \Big|\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big|$$
$$\leq \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|\ \Big|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big| + 2\ \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|\ \Big|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\Big| + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|\ \Big|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big|$$
$$\leq \Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|^2\Big)^{1/2} + 2\Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\Big|^2\Big)^{1/2}$$
$$+ \Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big|^2\Big)^{1/2} \leq 4\|u\|_H\|v\|_H.$$

Nyní positivní definitnost. Podle věty 7.19 je

$$\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + |u|^2 \leq K \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|^2,$$

což dává

$$\|u\|_H^2 = \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + |u|^2$$
$$\leq (K+1) \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|^2$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
(Au,u) &= \int_\Omega \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 + 2\,\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 \\
&\geq \int_\Omega \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 \geq \frac{1}{K+1}\,\|u\|_H^2,
\end{aligned}
$$

což dokazuje positivní definitnost.

□

VĚTA 7.21. *Nechť* $f \in L^2(\Omega)$. *Pak lineární zobrazení* (f,v) *je prvek* H^*.

Důkaz. Linearita je jasná. Dokažme omezenost.

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega fv\Big| &\leq \Big(\int_\Omega f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega v^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\int_\Omega f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|^2 \\
&\qquad + \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 + |u|^2\Big)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_H.
\end{aligned}
$$

□

Následující věta je snadný důsledek vět (7.20), (7.21), (4.6) a (4.5).

VĚTA 7.22. *Nechť* $f \in L^2(\Omega)$. *Pak existuje právě jedno slabé řešení problému* (7.12), (7.11) *a* (7.10).

KAPITOLA 8

Nekonečné číselné řady

1. Co je řada a její součet

DEFINICE 8.1. *Buď dána posloupnost čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$. Symbolem*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

rozumíme nekonečnou číselnou řadu.

DEFINICE 8.2. *Buď dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Utvořme posloupnost částečných součtů*

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Součtem řady rozumíme reálé číslo

$$s := \lim_{N\to\infty} s_N,$$

pokud tato limita existuje. Pokud ano, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pokud nenexistuj nebo je nevlastní ($\pm\infty$), říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Symbolem

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8.1}$$

rozumíme nekonečnou číselnou řadu.

DEFINICE 8.3. *Dána čísla a a q. Potom*

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \tag{8.2}$$

se vazývá geometrická řada.

LEMMA 8.4. *Buď $a \neq 0$. Pak řada (8.2) konverguje právě když $|q| < 1$ a její součet je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

PŘÍKLAD 8.5. *Buď $r = 0,333\ldots = 0.\overline{3}$. Jak je to pomocí zlomku?*

Řešení.

$$r = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots = \frac{3}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\Big)$$
$$= \frac{3}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \Big(\frac{1}{10}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{10}\Big)^3 + \dots\Big) = \frac{3}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

□

PŘÍKLAD 8.6. *Buď* $r = 0,272727\ldots\ = 0.\overline{27}$. *Jak je to pomocí zlomku?*

Řešení.

$$\begin{aligned} r &= \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \frac{27}{1000000} + \frac{27}{100000000} + \dots \\ &= \frac{27}{100}\Big(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \dots\Big) \\ &= \frac{27}{100}\Big(1 + \frac{1}{100} + \Big(\frac{1}{100}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{100}\Big)^3 + \dots\Big) = \frac{27}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}. \end{aligned}$$

□

LEMMA 8.7. *Buď řada* (8.1) *konvergentní. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Nabízí se, zda neplatí i opačné tvrzení, tj. zda z podmínky $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ neplyne konvergence řady (8.1). Odpověď je negativní.

PŘÍKLAD 8.8 (Harmonická řada). *Nechť* $a_n = \frac{1}{n}$. *Pak evidentně* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Ale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Důkaz. Buď dáno n na moment pevné. Pak

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Nyní pišme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \Big(1 + \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) \\ &\qquad + \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\Big) + \dots \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty. \end{aligned}$$

□

Cílem dalšího vyšetřování je konvergence či divergence dané řady. Ovšem najít přesně součet nějaké řady je prakticky nemožné a lze to udělat jen pro velmi málo řad. Jednou z nich je geometrická. Ukážeme si ještě jeden příklad.

PŘÍKLAD 8.9. *Sečtěte*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení. Tato řada není geometrická. Přesto ji jistým trikem sečteme. Dáno pevné n. Pak

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Nyní pišme

$$\begin{aligned}
s_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) + \dots + \Big(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\Big) \\
&= 1 + \Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) + \Big(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\Big) + \Big(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\Big) + \dots \\
&+ \Big(-\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\Big) + \Big(-\frac{1}{N+1}\Big) = 1 - \frac{1}{N+1}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1.$$

□

2. Komutativní zákon pro řady

Co znamená komutativní zákon pro řady? Nejdříve si řekneme, co znamená přeuspořádat řadu. Např.

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \dots = &a_1 + a_3 + a_2 + (a_5 + a_7) + a_4 + (a_9 + a_{11} + a_{13}) \\
&+ a_6 + (a_{15} + a_{17} + a_{19} + a_{21}) + a_8 + \dots
\end{aligned}$$

Definice 8.10. *Buď $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zobrazení. Řekneme, že řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

je přerovnáním řady (8.1)*, pokud φ je vzájemně jednoznačné zobrazení. To znamená, že v posloupnosti $\varphi(n)$ se každé přirozené číslo vyskytne právě jednou.*

Definice 8.11. *Rekneme, že řada* (8.1) *konverguje absolutně, pokud konverguje řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Věta 8.12. *Nechť řada* (8.1) *konverguje absolutně. Pak tato řada konverguje.*

Následující věta je vlastně komutativní zákon pro absolutně konvergentní řady.

Věta 8.13. *Nechť řada* (8.1) *konverguje absolutně, $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak pro každé $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné zobrazení platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s.$$

Tvrzení 8.14. *Nechť řada* (8.1) *konverguje neabsolutně, tj.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \ \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Potom pro každé $r \in \mathbb{R}$ (dokonce je možné volit i $r = \infty$ nebo $r = -\infty$) existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = r.$$

Tedy pro neabsolutně konvergentní řady komutativní zákon neplatí.

Kriteria konvergence řad.

VĚTA 8.15 (Srovnávací kritérium). *Buď $|a_n| \le b_n$. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

VĚTA 8.16 (Srovnávací kritérium). *Buď $0 \le a_n \le b_n$. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty.$$

PŘÍKLAD 8.17. *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}.$$

Řešení. Zřejmě platí $0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2.$$

Víme tedy dle srovnávacího kriteria, že daná řada konverguje. Navíc vidíme, že

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} < 2.$$

□

PŘÍKLAD 8.18. *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

Řešení. Zřejmě platí $\frac{1}{n} < \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Víme tedy dle srovnávacího kriteria, že daná řada diverguje.

□

VĚTA 8.19 (Podílové kritérium). *Uvažujme řadu* (8.1). *Nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Je-li

$$\begin{cases} q < 1 & \text{řada konverguje;} \\ q > 1 & \text{řada diverguje;} \\ q = 1 & \text{obojí je možné.} \end{cases}$$

VĚTA 8.20 (Odmocninové kritérium). *Uvažujme řadu* (8.1). *Nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Je-li

$$\begin{cases} q < 1 & \text{řada konverguje;} \\ q > 1 & \text{řada diverguje;} \\ q = 1 & \text{obojí je možné.} \end{cases}$$

PŘÍKLAD 8.21. *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Řešení.
1. Počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 = \frac{1}{2} < 1$$

a řada je konvergentní, nebo
2. počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

a řada je konvergentní.

□

PŘÍKLAD 8.22. *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$$

v závislosti na $a > 0$.

Řešení. 1. Počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{a^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n}$$
$$= a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}.$$

a řada je

$$\begin{cases} \text{konvergentní pro} & 0 < a < \mathrm{e}, \\ \text{divergentní pro} & a > \mathrm{e}, \\ \text{nevíme pro} & a = \mathrm{e}. \end{cases}$$

□

PŘÍKLAD 8.23. *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}.$$

Řešení. To je skutečně zapeklitý úkol. Zkuste si najít tzv. Stirlingovu formuli a ta snad něco napoví.

□

VĚTA 8.24 (Integrální kritérium). *Buď dána posloupnost* $0 < a_n$ *a nechť existuje* $K > 0$ *a funkce* $f : [K, \infty) \to (0, \infty)$ *taková, že*

(i) f *je nerostoucí,*
(ii) $f(n) = a_n$ *pro* $n > K$.

Pak platí:

$$\int_K^{\infty} f(x)dx < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

PŘÍKLAD 8.25. *Vyšetřete konvergenci mocninné řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

v závislosti na $\alpha > 0$.

Řešení. Volme funkci $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Je jasné, že f je nerostoucí v $[1, \infty)$.
1. $\alpha \in (0, 1)$. Pak

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha}]_1^{\infty} = \infty$$

a řada je divergentní.
2. $\alpha \in (1, \infty)$. Pak

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha}]_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha - 1} < \infty$$

a řada je konvergentní.
3. $\alpha = 1$. Pak

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \infty$$

a řada je divergentní (Jde o nám již známou harmonickou řadu).

□

PŘÍKLAD 8.26. *Vyšetřete konvergenci mocninné řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$$

v závislosti na $\beta > 0$.

Řešení. Volme funkci $f(x) = \frac{1}{x \ln^{\beta} x}$. Je jasné, že f je nerostoucí v $[\mathrm{e}, \infty)$.
1. $\beta \in (0, 1)$. Pak

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^{\beta} x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1 \\ x = \infty \Rightarrow t = \infty \end{array} \right| = \int_1^{\infty} t^{-\beta} dt = \frac{1}{1-\beta} [t^{1-\beta}]_1^{\infty} = \infty$$

a řada je divergentní.
2. $\beta \in (1, \infty)$. Pak

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^{\beta} x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1 \\ x = \infty \Rightarrow t = \infty \end{array} \right| = \int_{1}^{\infty} t^{-\beta} dt = \frac{1}{1-\beta} [t^{1-\beta}]_1^{\infty} < \infty$$

a řada je konvergentní.
3. $\beta = 1$. Pak

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1 \\ x = \infty \Rightarrow t = \infty \end{array} \right| = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^{\infty} = \infty$$

a řada je divergentní.

□

Tvrzení 8.27.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \iff \alpha > 1.$$

Věta 8.28. *Nechť* $0 < a_n,\ 0 < b_n$ *a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \qquad 0 < c < \infty.$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Příklad 8.29. *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \ \mathrm{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Srovnejme $a_n := \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \ \mathrm{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ s mocninou. Chceme najít α tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha}} = c, \ 0 < c < \infty.$$

Pišme

$$\begin{aligned} L(\alpha) &:= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \ \mathrm{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} \ \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \ \frac{\mathrm{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \ \frac{1}{n^{\alpha+2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

Je-li

$$\begin{cases} \alpha > -2 & \text{pak } L_\alpha = 0, \\ \alpha < -2 & \text{pak } L_\alpha = \infty, \\ \alpha = -2 & \text{pak } L_\alpha = 1. \end{cases}$$

Volme tedy $\alpha = -2$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1$. Dle věty 8.28 a tvrzení 8.27 řada konverguje.

□

Příklad 8.30 (Jen pro zajímavost). *Buď posloupnost a_n dána vztahy*

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

posloupnost b_n

$$b_1 = \sqrt{2}, \quad b_n = \sqrt{2 - a_{n-1}}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Řešení. Snadno napíšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots .$$

Dokážeme matematickou indukcí, že $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Je-li $n = 1$, je $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $a_1 = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Nechť $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ pro nějaké n. Počítejme a_{n+1}. Víme (dle indukčního předpokladu) a ze známého vzorce $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2\sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} \\ &= 2\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} \end{aligned}$$

což jsme chtěli. Nyní můžeme psát

$$b_n = \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{2^n}}$$

a následně díky známému vzorci $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} 2^n b_n &= \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{2^n}}}{\frac{1}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \pi. \end{aligned}$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentní, řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dle věty 8.28 konverguje.

Navíc vztah $\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n b_n$ nám dává možnost spočítat hodnotu čísla π. Prvních pár členů je

$$\begin{array}{ll} 3.12144515225805; & 3.14157294036788; \\ 3.13654849054594; & 3.14158772527996; \\ 3.14033115695474; & 3.14159142150464; \\ 3.14127725093276; & 3.14159234561108; \\ 3.14151380114415; & 3.14159257654500 \approx \pi; \end{array}$$

Tato konvergence je ale relativně pomalá, existují lepší metody.

□

Nyní se podíváme na jistý typ řad, které konvergují neabsolutně.

VĚTA 8.31. *Nechť*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Za jednoduché příklady mohou sloužit třeba

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Snadno si můžete ověřit, že první řada konvrguje absolutně, druhé a třetí neabsolutně.

KAPITOLA 9

Nekonečné řady funkcí

1. Pojem řady funkcí a obor konvergence

Buď dána posloupnost funkcí $f_n(x)$ definovaných na stejném intervalu $I = (a, b)$ (nebo $[a, b)$, $(a, b]$ či $[a, b]$). Potom symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

znamená řadu funkcí nebo též funkční řadu.

Řekněme si, co znamená její součet. Zvolme pevně $c \in I$ a označme $a_n = f_n(c)$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

je obyčejná řada čísel a lze ji, pokud možno, sčítat. Množina těch c, pro která řada konverguje, se nazývá obor konvergence.

Definice 9.1. *Buď dána posloupnost funkcí $f_n(x)$ na intervalu I a buď $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ příslušná řada. Oborem konvergence dané řady nazýváme množinu*

$$\Big\{x \in I;\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty\Big\}.$$

Příklad 9.2. *Buď $M \subset I$ libovolná. Pak existuje funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ taková, že její obor konvergence je M.*

Důkaz. Definujme

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \notin M, \\ 0 & x \in M. \end{cases}$$

Zkoumejme součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
1. $x \in M$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 < \infty.$$

2. $x \notin M$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

M je tedy oborem konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

□

Předchozí příklad ukazuje, že obor konvergence řady funkcí může vypadat zcela libovolně. Ale tato situace se zcela změní, pokud klademe na funkce $f_n(x)$ další požadavky.

Předpokládejme, že funkce $f_n(x)$ jsou spojité. Pak skutečně obor konvergence této řady funkcí nemůže vypadat libovolně, ale zjistit, jak může vypadat, je poněkud obtížné. Např. je-li $f_n(x) = 1$ v I, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nekonverguje nikde. V následujícím příkladě si ukážeme, že řada spojitých funkcí může konvergovat všude s vyjímkou jednoho bodu.

Příklad 9.3. *Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n|x|}$$

konverguje pro každé nenulové reálné číslo a diverguje pro 0.

Důkaz. Pro $x = 0$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n|x|} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Pro $x \neq 0$ je $e^{-|x|} < 1$ a daná řada je geometrická s qocientem menším než 1. Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n|x|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-|x|}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-|x|}} = \frac{e^{|x|}}{e^{|x|} - 1} < \infty.$$

□

Předpokládejme nyní, že od někud víme, že řada spojitých funkcí konverguje všude v I. Je potom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

spojitá v I? Odpověd̆ je negativní, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 9.4. *Řada*

$$\sum_{n=}^{\infty} (\operatorname{arctg} nx - \operatorname{arctg}(n-1)x)$$

konverguje pro každé reálné x, ale součet není spojitá funkce.

Důkaz. Najdeme částečné součty. Zřejmě

$$\begin{aligned} s_N = \sum_{n=1}^{N} (\operatorname{arctg} nx - \operatorname{arctg}(n-1)x) = {} & (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 2x) \\ & + (\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} 3x) \\ & + (\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} 4x) \\ & + (\operatorname{arctg} 4x - \operatorname{arctg} 5x) \\ & \quad \vdots \\ & + (\operatorname{arctg} Nx - \operatorname{arctg}(N-1)x) = \operatorname{arctg} Nx. \end{aligned}$$

Tedy

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{arctg} Nx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pro} \quad x > 0; \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro} \quad x < 0. \end{cases}$$

Výsledná funkce je tedy všude definovaná, ale není spojitá.

□

DEFINICE 9.5. *Buď* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in I$ *řada funkcí s oborem konvergence* I. *Pak* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *je dobře definovaná funkce a říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje k* $f(x)$ *bodově. Pokud toto přepíšeme do kvantifikátorů, můžeme dostat formální definici:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \to f(x) \iff \forall\ x \in I\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \Big(N \geq n_0 \Rightarrow \Big| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \Big| < \varepsilon \Big)$$

2. Stejnoměrná konvergence

Viděli jsme, že $f(x)$ nemusí být spojitá při bodové konvergenci ani pro spojité funkce $f_n(x)$. Zkusme tedy najít jiný typ konvergence takový, aby se zachovala spojitost.

DEFINICE 9.6. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in I$ *řada funkcí. Říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje k* $f(x)$ *stejnoměrně, pokud*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \forall\ x \in I\ \Big(N \geq n_0 \Rightarrow \Big| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \Big| < \varepsilon \Big)$$

a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Všimněme si, že rozdíl v definicích bodové a stejnoměrné konvergence je v přesunu kvantifikátoru $\forall\ x \in I$ až za kvantifikátor $\exists n_0$, což znamená, že při stejnoměrné konvergenci n_0 příslušné k $\varepsilon > 0$ je stejné (či stejnoměrné) vzhledem k x (tedy na x nezávislé). Navíc je z toho vidět následující tvrzení.

TVRZENÍ 9.7. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *v* I, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \to f(x)$ *v* I.

VĚTA 9.8. *Buď* $f_n(x)$ *spojité v* I *a* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *v* I. *Pak* f *je spojitá v* I.

Ověřit ale stejnoměrnou konvergenci přímo z definice je prakticky nemožné. Zformulujeme si proto rozumnou postačující podmínku.

VĚTA 9.9 (Weirestrassovo kriterium). *Buď* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *řada spojitých funkcí v intervalu* I *a nechť*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad x \in I.$$

Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *k nějaké* f *v* I *a tedy, v důsledku věty 9.8 je* f *spojitá v* I.

PŘÍKLAD 9.10. *Nechť*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1 + n^2x^2)}.$$

Vyšetřete definiční obor $\mathcal{D}(f)$ *a zjistěte, v kterých bodech* $\mathcal{D}(f)$ *je* f *spojitá.*

Snadno zjistíme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\left|\frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}\right| \leq \frac{1}{n^2} := a_n$$

a protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$ podle Weirstrassova kriteria k nějaké spojité funkci definované v $\mathbb{R}$.

$\square$

Klasická aplikace Weirstrassova kriteria spočívá v tom, že položíme $a_n = \max f_n(x)$ a vyšetříme konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad 9.11. *Nechť*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}.$$

Vyšetřete definiční obor $\mathcal{D}(f)$ a zjistěte, v kterých bodech $\mathcal{D}(f)$ je f spojitá.

Najdeme $\max f_n(x)$. Extrém funkce hledáme pomocí derivace. Zřejmě pro $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$ je

$$f_n'(x) = \frac{1+n^4x^2-2n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}$$

f_n je lichá, $f_n(0) = 0$, $f_n(\infty) = 0$, derivace existuje všude a je rovna nule jen pro $x = \frac{1}{n^2}$, pokud nás zajímají jen kladná x (to nám vzhledem k lichosti stačí). Tedy v bodě $x = \frac{1}{n^2}$ je maximum a platí

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{1+n^4\left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{2n^2} := a_n.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} < \infty$, konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ podle Weirstrassova kriteria k nějaké spojité funkci definované v $\mathbb{R}$.

$\square$

3. Derivování a integrování řady funkcí

Vyšetřeme nyní, za jakých podmínek můžeme derivovat či integrovat funkční řadu člen po členu (u konečných součtů je to jasné).

Věta 9.12. *Dána posloupnost funkcí $f_n(x)$ v intervalu (a,b) a nechť existuje $f_n'(x)$ pro každé n a $x \in (a,b)$. Předpokládejme, že*

(i) *existuje $c \in (a,b)$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje a*
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ *v* (a,b).

Potom existuje $f(x)$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad v \quad (a,b)$$

a navíc

$$f'(x) = g(x).$$

POZNÁMKA 9.13. *Věta 9.12 říká prakticky, že za předpokladu* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \rightrightarrows$ *můžeme psát (záměna sumy a derivace)*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Předpoklad (i) *je ovšem podstatný. Jinak by se mohlo stát*

$$f_n(x) = 1 \quad a \quad f_n'(x) = 0.$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \rightrightarrows 0$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

VĚTA 9.14. *Dána posloupnost funkcí* $f_n(x)$ *v intervalu* (a,b) *a nechť existují* $\int_a^b f_n(x)dx$ *pro každé* n. *Předpokládejme, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad v \quad [a,b].$$

Pak

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

POZNÁMKA 9.15. *Je to vlastně integrování člen po členu (záměna sumy a integrálu)*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

VĚTA 9.16. *Dána posloupnost funkcí* $f_n(x)$ *v intervalu* (a,b) *mající primitivn 'i funkci* $F_n(x)$ *pro každé* n. *Předpokládejme, že*

(i) *existuje* $c \in (a,b)$ *tak, že* $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(c)$ *konverguje a*
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *v* (a,b).

Potom existuje $F(x)$ *tak, že* $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \rightrightarrows F(x)$ *a*

$$F'(x) = f(x).$$

POZNÁMKA 9.17. *Je to vlastně integrování člen po členu (záměna sumy a integrálu)*

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)dx.$$

Předpoklad (i) *je ovšem opět podstatný.*

KAPITOLA 10

Mocninné řady

1. Pojem mocninné řady a poloměr konvergence

V této kapitole budeme zkoumat speciální typ funkčních řad, a to řady mocninné. Jde o řady typu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad \text{kde} \quad f_n(x) = a_n(x-c)^n,$$

tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots .$$

Čísla a_n bedeme uvažovat reálná.

Už jsme viděli, že o oboru konvergence libovolné řady nemůžeme nic říci. Ale situace v případě mocninné ředy je lepší. Tady má již obor konvergence svá přesná pravidla.

Věta 10.1 (O poloměru konvergence). *Buď dána mocninná řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n. \tag{10.1}$$

Pak existuje R (tzv. poloměr konvergence), $0 \le R \le \infty$, takový, že

$$|x-c| < R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad \textit{konverguje (dokonce absolutně)},$$

$$|x-c| > R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad \textit{diverguje.}$$

Poznámka 10.2. *Uvažujme na moment řadu* (10.1) *s c a a_n komplexnímy. Pak věta o poloměru konvergence platí opět a geometricky množina $\{x \in \mathbb{C}; |x-c| < R\}$ je v komlexní rovině kruh se středem c a ploměrem R. V reálném případě jde o interval délky $2R$ a středem c.*

Příklad 10.3. *Najdi poloměr konvergence řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}.$$

Řešení. Je to geometrická řada s qocientem $\frac{x}{a}$. Pak

$$\left|\frac{x}{a}\right| < 1 \implies \text{řada konverguje,}$$

$$\left|\frac{x}{a}\right| > 1 \implies \text{řada diverguje.}$$

Tedy $R = a$.

□

PŘÍKLAD 10.4. *Najdi poloměr konvergence řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n a^n.$$

Řešení. Podílovým kriteriem

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{n^n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)(1+1/n)^n |x| = \mathrm{e}|x| \lim_{n\to\infty} (n+1)$$
$$= \infty \quad \text{pro} \quad x \neq 0.$$

Tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} n^n a^n$ diverguje pro $x \neq 0$ a $R = 0$.

□

PŘÍKLAD 10.5. *Najdi poloměr konvergence řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Řešení. Podílovým kriteriem

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$
$$= 0 \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro $x \in \mathbb{R}$ a $R = \infty$.

□

Vidíme tedy, že R může skutečně nabývat všech hodnot včetně 0 či ∞. Je jasné, že v bodě c mocninná řada vždy konverguje. Jak je to ale v bodech $c - R, c + R$?

PŘÍKLAD 10.6. *Najdi obor konvergence řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Řešení. Podílovým kriteriem

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|.$$

Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konverguje pro $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$. Tedy $R = 1$.

Dosaďme nyní $x = 1$ a máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Dosaďme $x = -1$ a máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} < \infty.$$

Obor konvergence dané řady je tedy $[-1, 1]$.

□

PŘÍKLAD 10.7. *Najdi obor konvergence řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Řešení. Podílovým kriteriem

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje pro $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$. Tedy $R = 1$.
Dosaďme nyní $x = 1$ a máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Dosaďme $x = -1$ a máme podle Leibnitzova kriteria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty.$$

Obor konvergence dané řady je tedy $[-1, 1)$.

□

PŘÍKLAD 10.8. *Najdi obor konvergence řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Řešení. Podílovým kriteriem

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|.$$

Tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje pro $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$. Tedy $R = 1$.
Dosaďme nyní $x = 1$ a máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Dosaďme $x = -1$ a máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad \text{diverguje, neboť} \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0.$$

Obor konvergence dané řady je tedy $(-1, 1)$.

□

Na předchozích třech příkladech vidíme, že řada může na krajích intervalu konvergence dělat cokoli.

Nyní si ukážeme, jak se dá prakticky spočítat poloměr konvergence. Jako v předchozích příkladech to uděláme z podílového či odmocninového kriteria. Nechť je dána mocninná řada jako v (10.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Podílové kriterium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x-c|^{n+1}}{|a_n||x-c|^n} = |x-c| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Přdpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| := A$ existuje (Buď reálné číslo, 0 či nekonečno). Je-li $|x-c|A < 1 \Leftrightarrow |x-c| < 1/A$, pak dle podílového kriteria daná řada konverguje a je-li $|x-c|A > 1 \Leftrightarrow |x-c| > 1/A$, pak dle podílového kriteria daná řada diverguje. To znamená, že $R = 1/A$. Platí tedy vzoreček $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Úplně analogicky bychom dokázali z odmocninového kriteria vzorec $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. Předchozí úvahy shrneme do věty.

VĚTA 10.9. *Nechť je dána řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *pak*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *pak*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

PŘÍKLAD 10.10. *Najdi poloměr konvergence mocninné řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Řešení.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n)^2} = 1.$$

□

PŘÍKLAD 10.11. *Najdi poloměr konvergence mocninné řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n}.$$

Řešení.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n.2^n}}{\frac{1}{(n+1).2^{(n+1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2.$$

□

Příklad 10.12. *Najdi poloměr konvergence mocninné řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Snadno

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad .$$

Řešení. Tady je

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro} \quad n \text{ liché;} \\ 0 & \text{pro} \quad n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ neexistuje. Přesto se ale dá poloměr konvergence spočítat následující úvahou.

Polož $y = x^2$. Pak daná řada přejde na řadu

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2n+1}.$$

Její poloměr konvergence spočítat lze:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2(n+1)+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$$

a tedy víme, že pokud $|x^2| = |y| < 1$, řada konverguje a pokud $|x^2| = |y| > 1$, řada diverguje. Tedy $R = 1$.

□

Věta 10.13. *Nechť je dána řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

s poloměrem konvergence R, $0 < R \le \infty$. Je-li $0 < r < R$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konverguje stejnoměrně v intervalu $[c-r, c+r]$.

2. Derivování a integrování mocninných řad

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ definuje tedy v $(c-R, c+R)$ spojitou funkci. Napišme pod sebe dvě řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n; \tag{10.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}. \tag{10.3}$$

Řada (10.3) vznikla z řady (10.2) formálním derivováním člen po členu. Vypočítejme poloměr konvergence R_1 řady (10.3).

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = R.$$

Obě řady mají tedy stejný poloměr konvergence a v každém intervalu $[c-r, c+r]$ $(0 < r < R)$ řada (10.3) konverguje stejnoměrně. Dle věty 9.12 tedy platí vzoreček

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} \tag{10.4}$$

pro $x \in [c-r, c+r]$ a tedy pro každé $x \in (c-R, c+R)$. Mocninnou řadu lze tedy derivovat člen po členu.

PŘÍKLAD 10.14. *Sečti řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Řešení. Snadno ukážeme dle podílového kriteria konvergenci. Položme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

Můžeme zase snadno ověřit, že poloměr konvergence R této mocninné řady je $R = 1$. Lze tedy psát pro $x \in (-1, 1)$ (s vyjímkou 0)

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Protože $(x^n)' = nx^{n-1}$, platí dle vzorce (10.4)

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)' \qquad \text{v intervalu } \ (-1, 1)$$

a následně

$$\int \frac{f(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + c =^{\text{geom. ředa}}= \frac{1}{1-x} + c.$$

Tedy

$$\frac{f(x)}{x} dx = \Big(\frac{1}{1-x} + c\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

a tedy v intervalu $(-1, 1)$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Dosadíme-li $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

□

Položme si následující otázku. Nechť funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ je dána mocninnou řadou v intervalu $(c-R, c+R)$. Co lze říci o $\lim_{x\to(c+R)_-} f(x)$ popř. $\lim_{x\to(c-R)_+} f(x)$?

Tvrzení 10.15. *Nechť*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \qquad v\ intervalu \qquad (c-R, c+R).$$

Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *konverguje* *absolutně, tj.* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n < \infty$. *Pak*

$$\lim_{x \to (c+R)_-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Důkaz. V intervalu $[c, c+R]$ evidentně platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-c)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n <^{\text{předpoklad}} < \infty.$$

Podle Weirstrassova kriteria víme, že řada konverguje stejnoměrně v $[c, c+R]$. Podle věty 9.8 je funkce $f(x)$ spojitá (tedy i v bodě $c+R$) a proto platí

$$\lim_{x \to (c+R)_-} f(x) = f(c+R) \quad (= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n).$$

□

Síla následující věty spočívá v tom, že z předchozí věty odstraní předpoklad absolutní konvergence.

Věta 10.16 (Abelova věta). *Nechť*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \qquad v\ intervalu \qquad (c-R, c+R).$$

Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *konverguje* *absolutně či neabsolutně, tj.* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n < \infty$. *Pak*

$$\lim_{x \to (c+R)_-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Příklad 10.17. *Sečtěte řadu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad .$$

Řešení. Polož $a_n = \frac{1}{n}$. Potom a_n je klesající posloupnost s nulovou limitou. Dle Leibnitzova kriteria je

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty. \tag{10.5}$$

Buď

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \tag{10.6}$$

Poloměr konvergence této řady je

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Protože mocninnou řadu lze derivovat člen po členu, platí v intervalu $(-1,1)$

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1}$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots =^{\text{geometrická řada}} = \frac{1}{1+x}.$$

Integrací máme

$$f(x) = \ln(1+x) + c.$$

Dosazením $x = 0$ do (10.6) dostaneme $f(0) = 0$ a tedy $0 = f(0) = \ln(1+0) + c$ a $c = 0$. Platí tedy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x), \qquad x \in (-1,1).$$

My ale chceme dosadit $x = 1$, neboť $s = f(1)$. Protože díky (10.5) je $s < \infty$ můžeme použít Abelovu větu a máme

$$s = \lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1_-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Tím jsme našli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

□

PŘÍKLAD 10.18. *Sečtěte řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad .$$

Řešení. Polož $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Potom a_n je klesající posloupnost s nulovou limitou. Dle Leibnitzova kriteria je

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} < \infty. \tag{10.7}$$

Buď

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \tag{10.8}$$

Poloměr konvergence této řady je

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

Protože mocninnou řadu lze derivovat člen po členu, platí v intervalu $(-1,1)$

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$
$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots =^{\text{geometrická řada}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrací máme

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + c.$$

Dosazením $x = 0$ do (10.8) dostaneme $f(0) = 0$ a tedy $0 = f(0) = \ln(1+0) + c$ a $c = 0$. Platí tedy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x, \qquad x \in (-1, 1).$$

My ale chceme dosadit $x = 1$, neboť $s = f(1)$. Protože díky (10.7) je $s < \infty$ můžeme použít Abelovu větu a máme

$$s = \lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1_-} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Tím jsme našli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Zopakujme si před dalším příkladem Taylorovy rozvoje

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad ;$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad .$$

PŘÍKLAD 10.19. *Vuřešme pomocí mocninných řad diferenciální rovnici*

$$y'' + y = 0.$$

Řešení. Samozřejmě víme, že obecné řešení je dáno vztahem $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$.

My se to pokusíme najít pomocí řad. Hledejme řešení ve tvaru

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pak

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n;$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Dále je

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big(a_n + (n+2)(n+1) a_{n+2} \Big) = 0.$$

Mocninná řada se rovná 0 jedině pokud všechny koeficienty jsou 0. Z toho máme

$$a_n + (n+2)(n+1) a_{n+2} = 0,$$

nebo ekvivalentně

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, \qquad n \geq 0.$$

Volme a_0 libovolně. Pak $a_2 = -\frac{a_0}{1.2} = -\frac{a_0}{2!}$, $a_4 = -\frac{a_2}{3.4} = \frac{a_0}{4!}$ a indukcí by nám vyšlo

$$a_2 = -\frac{a_0}{2!}, \; a_4 = \frac{a_0}{4!}, \; a_6 = -\frac{a_0}{6!}, \; atd.$$

Volme a_1 libovolně. Pak $a_3 = -\frac{a_1}{2.3} = -\frac{a_1}{3!}$, $a_5 = -\frac{a_3}{4.5} = \frac{a_1}{5!}$ a indukcí by nám vyšlo

$$a_3 = -\frac{a_1}{3!},\ a_5 = \frac{a_1}{5!},\ a_7 = -\frac{a_1}{7!},\ atd.$$

Řešení je tedy

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - -\frac{a_0}{6!}x^6 - \frac{a_1}{7!}x^7 + \dots \\ &= a_0 \underbrace{\Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\Big)}_{\cos x} + a_1 \underbrace{\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\Big)}_{\sin x} \\ &= a_0 \cos x + a_1 \sin x. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 10.20. *Ukažme, že*

$$\int_0^{\mathrm{e}} \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} dx \leq 2.$$

Řešení. Není těžké ukázat, že $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} dx < \infty$. Substitucí máme.

$$I := \int_0^{\mathrm{e}} \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{e}^x,\ x = \ln t \\ dx = -\frac{1}{t} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \left| \begin{array}{l} s = 1 - t \\ ds = -dt \\ t = 0 \Rightarrow s = 1 \\ t = 0 \Rightarrow s = 1 \end{array} \right|$$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln(1-s)}{s} ds.$$

Definujme funkci

$$f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-s)}{s} ds.$$

Rozviňme $-\ln(1-s)$ do Taylorovy řady, tj.

$$-\ln(1-s) = s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^\infty \frac{s^n}{n}, \qquad s \in (-1, 1).$$

Potom

$$f(x) = \int_0^x \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{s^{n-1}}{n}\Big) ds = \sum_{n=1}^\infty \int_0^x \frac{s^{n-1}}{n} ds = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}.$$

Tedy

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}, \qquad s \in (-1, 1).$$

Protože $\sum_{n=1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{n^2} < \infty$, je podle Abelovy věty

$$\begin{aligned} f(1) = \int_0^\infty \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} dx &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^\infty \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = 2. \end{aligned}$$

□

KAPITOLA 11

Fourierovy řady

1. Ortonormalita systému cosinů a sinů

Npišme si několik známých goniometrických vzorečků:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big],\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big],\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big],\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\big].
\end{aligned}
$$

Uvažujme interval $(-l, l)$ a něm soustavu funkcí 1, $\cos\frac{\pi nx}{l}$, $\sin\frac{\pi nx}{l}$, $n \geq 0$. Nechť $m, n \geq 1$, $m \neq n$. Potom

$$
\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi mx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi(m-n)x}{l}-\cos\frac{\pi(m+n)x}{l}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{l}{\pi(m-n)}\sin\frac{\pi(m-n)x}{l}-\frac{l}{\pi(m+n)}\sin\frac{\pi(m+n)x}{l}\Big]_{-l}^{l} = 0.
\end{aligned}
$$

Analogicky

$$
\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi mx}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi(m-n)x}{l}+\cos\frac{\pi(m+n)x}{l}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{l}{\pi(m-n)}\sin\frac{\pi(m-n)x}{l}+\frac{l}{\pi(m+n)}\sin\frac{\pi(m+n)x}{l}\Big]_{-l}^{l} = 0.
\end{aligned}
$$

Dále

$$
\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi mx}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi(m+n)x}{l}+\sin\frac{\pi(m-n)x}{l}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[-\frac{l}{\pi(m+n)}\cos\frac{\pi(m+n)x}{l}-\frac{l}{\pi(m-n)}\cos\frac{\pi(m-n)x}{l}\Big]_{-l}^{l} = 0.
\end{aligned}
$$

Nechť nyní $m = n$, $n \geq 1$. Pak

$$
\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi mx}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{l}{\pi n}\sin^2\frac{\pi nx}{l}\Big]_{-l}^{l} = 0.
\end{aligned}
$$

Spočtěme ještě

$$\int_{-l}^{l} 1.\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \Big[-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big]_{-l}^{l} = 0,$$
$$\int_{-l}^{l} 1.\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \Big[\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big]_{-l}^{l} = 0.$$

Tím jsme spočítali, že systém funkcí 1, $\cos\frac{\pi nx}{l}$, $\sin\frac{\pi nx}{l}$, $n \geq 1$ je na intervalu $(-l, l)$ ortogonální. Spočítejme ještě

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} 1 - \sin\frac{2\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{l}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{l}\Big]_{-l}^{l} = l,$$
$$\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} 1 + \sin\frac{2\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\Big[x + \frac{l}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{l}\Big]_{-l}^{l} = l,$$
$$\int_{-l}^{l} 1^2 dx = [x]_{-l}^{l} = 2l.$$

Ze všech těchto výpočtů plyne platnost následující věty.

VĚTA 11.1. *Systém funkcí*

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi nx}{l},\quad \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi nx}{l},\qquad n \geq 1$$

je na intervalu $(-l, l)$ *ortonormální.*

2. Formální rozvoj

Nechť $f(x)$ je dána v intervalu $(-l, l)$. Ptejme se, zda existují čísla a_n, b_n, $n \geq 0$ tak, že v nějakém smyslu platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Předpokládejme, že to platí pro každé x. Volme $k \geq 0$ a vynásobme předchozí rovnost postupně funkcemi 1, $\cos\frac{\pi kx}{l}$, $\sin\frac{\pi kx}{l}$ a integrujme od $-l$ do l. Díky ortonormalitě okamžitě vyjde pro $k \geq 1$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx$$

a pro $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Takto tedy musí vypadat a_n, b_n, pokud má mít trigonometrická řada šanci na konvergenci.

3. Bodová konvergence

Nechť $\int_{-l}^{l} |f(x)|dx < \infty$ (tento předpoklad je nutný, abychom zaručili existenci a_k, b_k). Položme v dalším pro $k \geq 0$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx$$

a definujme

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$
$$F_{f,N}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Protože $F_f(x)$ je $2l$-periodická, je výhodné rozšířit i funkci $f(x)$ $2l$-periodicky na celé $\mathbb{R}$ a ptáme se, zda pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = F_f(x).$$

Definice 11.2. *řekneme, že funkce $f(x)$ ja na $[a,b]$ po částech hladká, pokud existuje dělení $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ intervalu $[a,b]$ takové, že f más spojitou derivaci v (c_i, c_{i+1}), $i = 0,1,2,\dots,n$ a existují konečné limity*

$$f(c_{i+}) = \lim_{x\to c_{i+}} f(x), \quad f(c_{i-}) = \lim_{x\to c_{i-}} f(x),$$
$$f'(c_{i+}) = \lim_{x\to c_{i+}} f'(x), \quad f'(c_{i-}) = \lim_{x\to c_{i-}} f'(x).$$

Věta 11.3. *Nechť $f(x)$ je po částech hladká v $[-l,l]$ a periodická v $\mathbb{R}$. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$F_f(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

Věta 11.4. *Nechť $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ a periodická v $\mathbb{R}$ s periodou $2l$. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$F_f(x) = f(x)$$

a navíc je tato konvergence stejnoměrná. To znamená $F_{f,N}(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathbb{R}$, tj.

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{f,N}(x) - f(x)| = 0.$$

Poznámka 11.5. *Nechť $f(x)$ je spojitá a periodická v $\mathbb{R}$ s periodou $2l$. Pak nemusí být*

$$F_f(x) = f(x).$$

Příklad 11.6. *Nechť f je 2π-periodická,*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\pi, 0), \\ 1 & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Najdi Fourierovu řadu.

Řešení. Graf funkce f vidíme na obrázku 1.

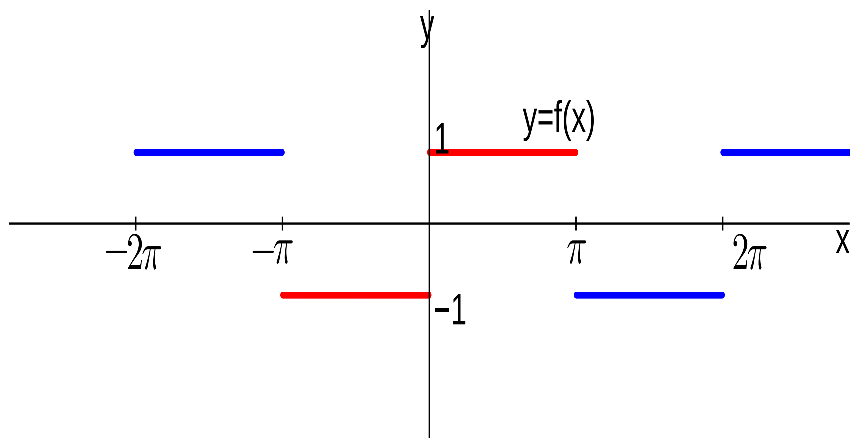
Fourierova řada vyjde

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots).$$

Poznamenejme, že dosazením $x = \pi/2$ dostaneme známý součet

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

□



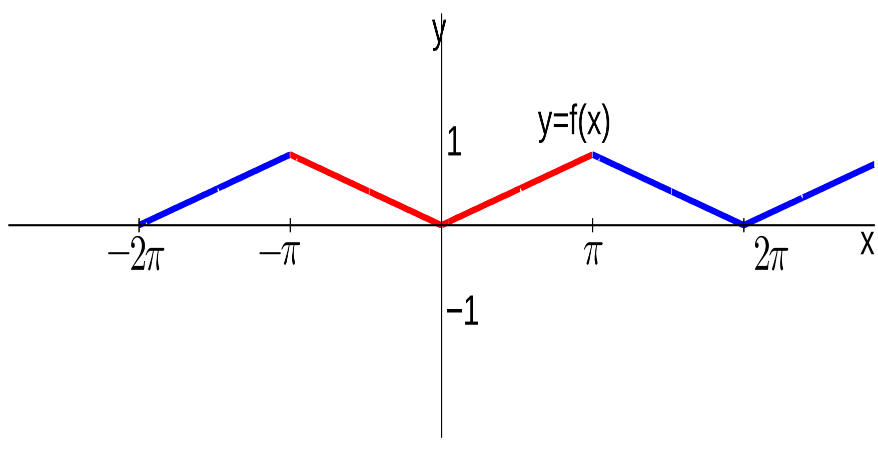
Obrázek 1. Funkce z příkladu 11.6

Příklad 11.7. *Nechť f je 2π-periodická,*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\pi} & x \in (-\pi, 0), \\ \frac{x}{\pi} & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Najdi Fourierovu řadu.

Řešení. Graf funkce f vidíme na obrázku 2.



Obrázek 2. Funkce z příkladu 11.7

Fourierova řada vyjde

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots).$$

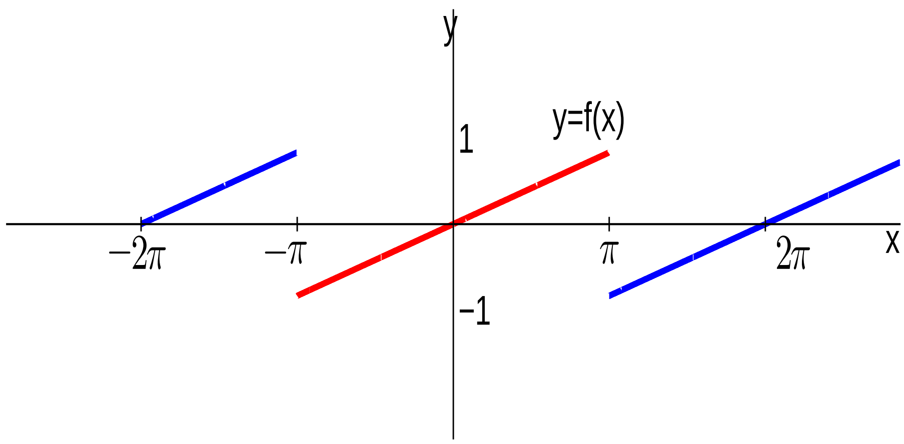
□

PŘÍKLAD 11.8. *Nechť f je 2π-periodická,*

$$f(x) = \frac{x}{\pi}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Najdi Fourierovu řadu.

Řešení. Graf funkce f vidíme na obrázku 3.



OBRÁZEK 3. Funkce z příkladu 11.8

Fourierova řada vyjde

$$f(x) = \frac{2}{\pi}(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots).$$

□

PŘÍKLAD 11.9. *Nechť f je 2π-periodická,*

$$f(x) = \frac{x-\pi}{\pi^2}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Najdi Fourierovu řadu.

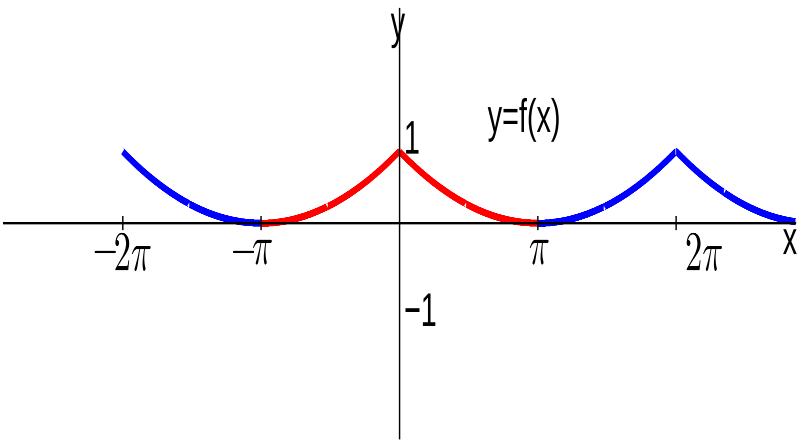
Řešení. Graf funkce f vidíme na obrázku 4.
Fourierova řada vyjde

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \dots).$$

Poznamenejme, že dosazením $x = 0$ dostaneme známý součet

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots.$$

□



Obrázek 4. Funkce z příkladu 11.9

4. Konvergence v $L^2(0,l)$

Předpokládejme, že $f \in L^2(-l,l)$. Pak ze Schwarzovy nerovnosti vyjde

$$\int_{-l}^{l} |f(x)|dx \leq \Big(\int_{-l}^{l} 1^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2} = 2l\Big(\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2} < \infty$$

a a_k, b_k jsou definovány.

Věta 11.10. *Nechť $f(x) \in L^2(-l,l)$ a periodická v $\mathbb{R}$ s periodou $2l$. Pak platí*

$$\|F_{f,N}(x) - f(x)\|_{L^2(-l,l)} \to 0 \qquad \textit{pro} \qquad N \to \infty.$$

KAPITOLA 12

Rovnice vedení tepla

Řešme následující úlohu: Představme si rovnou tyč (z nějakého materiálu) s konstantním průřezem S a délky l, která je zahřátá v čase $t = 0$ na teplotu $\varphi(x)$. Předpokládejme, že na obou okrajích tyče nějakým způsobem držíme konstantní teplotu 0. Jaké bude rozložení teploty na tyči v čase t?

1. Odvození

Nejprve zformulujme fyzikální zákony, které užijeme.

Představme si rovnou tyč (z nějakého materiálu) s konstantním průřezem (třeba kruhovým) S a délky l. Předpokládejme, že na levém okraji tyče nějakým způsobem držíme konstantní teplotu T_1, na pravém konci teplotu T_2. Po delší době se v tyči ustálí (díky přechodu tepla) nějaké rozložení teploty. Díky rozdílným teplotám na kraji dochází k přechodu tepla z teplejšího konce na studený. Na čem ale toto množství tepla závisí?

1. Jistě na času. Čím větší čas výměna tepla trvá, tím větší množství tepla se vymění. Tedy množství tepla je přímo úměrné času, po který výměna tepla trvá.
2. Jistě na rozdílu teplot $T_2 - T_1$. Čím větší rozdíl, tím větší množství tepla (za jednotku času) se vymění a uvažujme, že tato závislost je lineární.
3. Jistě na délce tyče l. Čím větší délka, tím menší množství tepla se vymění (za jednotku času) a uvažujme, že tato závislost je nepřímá úměra .
4. Jistě na plošném průřezu tyče S. Čím větší plošný průřez, tím větší množství tepla se vymění (za jednotku času) a tato závislost je přímá úměra .

Z předchozích úvah plyne, že množství vyměněného tepla Q za čas t je

$$Q = kS\frac{T_2 - T_1}{l}t, \tag{12.1}$$

kde k je nějaká materiálová konstanta.

Představme si opět stejnou rovnou tyč. Předpokládejme tuto fyzikální situaci. Na začátku má daná tyč teplotu T_1 a na konci děje má teplotu T_2. Na čem závisí úbytek tepla? V tomto případě nazávisí na době, je přímo úměrný průřezu S a dělce tyče l, ale hlavně je úměrný rozdílu teplot $T_2 - T_1$. Z toho plyne, že úbytek tepla je dán vzorcem

$$\widetilde{Q} = -cSl(T_2 - T_1). \tag{12.2}$$

Předpokládejme, že nyní máme tyč délky l a teplota se v ní nějak mění. Hledáme tedy funkci teploty $T(t, x)$. Nechť ji známe. Označme S průřez. Uvažujme nějký bod na tyči o souřadnici x a časový úsek (velmi malý) dt. Kolik tepla projde skrz plochu S za dt zprava doleva? Vezmeme bod $x + dx$ velmi blízko bodu x a množství tepla, které projde za dt přes interval $(x, x + dx)$ je podle (12.1) rovno

$$-kS\frac{T(t, x + dx) - T(t, x)}{dx}dt = -kS\frac{\partial T(t, x)}{\partial x}dt. \tag{12.3}$$

Vezmeme nyní dva blízké body $x, x + dx$ a uvažujme válec průřeszu S s těmito koncovými body. Množství tepla, které do něho vstoupí za čas dt, je podle (12.3)

$$kS\Big(\frac{\partial T(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial T(t, x + dx)}{\partial x}\Big)dt. \tag{12.4}$$

Z druhé strany lze považovat pro malé dx teplotu za konstantní vzhledem k x. Teplota za čas $t + dt$ je $T(t + dt, x)$ a úbytek tepla je tedy dle (12.2)

$$-cS\big((T(t + dt, x) - T(t, x)\big)dx.$$

Snadná tepelná bilance říká, že

$$-cS\big((T(t + dt, x) - T(t, x)\big)dx = kS\Big(\frac{\partial T(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial T(t, x + dx)}{\partial x}\Big)dt.$$

Vydělme dt a dx a dostaneme po snadných úpravách

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \frac{k}{c}\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}.$$

Označíme-li ještě $\frac{k}{c} = a^2$, dostaneme rovnici tepla ve tvaru

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = a^2\ \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}. \tag{12.5}$$

2. Matematická formulace problému

Problém 12.1. *Buď $a > 0$ a nechť je dána funkce $\varphi(x)$ na intervalu $[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Hledejme funkci $T(t, x)$ definovanou v $[0, \infty) \times [0, l]$, která splňuje*

(i) *je spojitá v $[0, \infty) \times [0, l]$,*

(ii) *splňuje rovnici*

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = a^2\ \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$$

v $(0, \infty) \times (0, l)$,

(iii) *okrajové podmínky $T(t, 0) = T(t, l) = 0$ pro každé $t > 0$,*

(iv) *počáteční podmínky $T(0, x) = \varphi(x)$ pro každé $x \in [0, l]$.*

Funkce splňující (i), (ii), (iii) a (iv) se nazývá klasické (silné) řešení problému 12.1. (na rozdíl od slabého). V následujících částech si ukážeme, že tato úloha má jednoznačné řešeni pro každou spojitou funkci $\varphi(x)$ na intervalu $[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

3. Jednoznačnost řešení - princip maxima

Následující věta vyjadřuje fyzikálně skutečnost, že pokud držíme na okrajích tyče nulovou teplotu, není teplota v libovolném čase nikdy větší než maximální teplota na začátku. To je celkem přirozené.

Věta 12.2. *Buď $a > 0$ a nechť je dána spojitá funkce $\varphi(x)$ na intervalu $[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Předpokládejme na moment, že nějaká funkce $T(t, x)$ je řešením problému 12.1.*

$$\max\{T(t, x);\ (t, x) \in [0, \infty) \times [0, l]\} = \max\{\varphi(x);\ x \in [0, l]\}.$$

Důkaz. Označme Volme konečný čas $\widetilde{t}$ a uvažujme konečný časoprostorový válec $V_{\widetilde{t}} = [0, \widetilde{t}] \times [0, l]$. Položme ještě $\Gamma = [0, l] \times \{0\}$. Označme

$$M = \max\{T(t,x); (t,x) \in V\}, \qquad m = \max\{T(t,x); (t,x) \in \Gamma\}.$$

Předpokládejme $0 \le m < M$.

Naznačíme si nejprve myšlenku. Předpokládejme, že funkce $T(t,x)$ nabývá maxima někde v $(0,\widetilde{t}) \times (0,l)$, tj. uvnitř $V_{\widetilde{t}}$. Buď tedy (t_0, x_0), $0 < t_0 < \widetilde{t}$ a $0 < x_0 < l$, bod, ve kterém $T(t_0, x_0) = M$. Protože se jedná o maximum funkce ve vnitřním bodě, je funkce v tomto bodě, platí

$$\frac{\partial^2 T(t_0,x_0)}{\partial x^2} \le 0, \quad \text{a} \quad \frac{\partial T(t_0,x_0)}{\partial t} = 0.$$

Představme si ale na okamžik, že by šlo o ostrou nerovnost, tj. $\frac{\partial^2 T(t_0,x_0)}{\partial x^2} < 0$. Pak ale

$$\frac{\partial T(t_0,x_0)}{\partial t} + \frac{\partial^2 T(t_0,x_0)}{\partial x^2} < 0$$

což je spor s faktem, že má být

$$\frac{\partial T(t_0,x_0)}{\partial t} + \frac{\partial^2 T(t_0,x_0)}{\partial x^2} = 0.$$

Tento postup má dvě slabiny. Jednak klidně může být $\frac{\partial^2 T(t_0,x_0)}{\partial x^2} = 0$ a také by mohlo být $t_0 = \widetilde{t}_0$ a tedy (t_0, x_0) není vnitřní bod. Tyto nedostatky nyní odstraníme.

Definujme funkci

$$v(t,x) = T(t,x) + \frac{M-m}{2\widetilde{t}}(t_0 - t). \tag{12.6}$$

Protože je $m < M$, platí

$$v(0,x) = T(0,x) + \frac{t_0}{2\widetilde{t}} \le m + \frac{M-m}{2\widetilde{t}}\widetilde{t} = m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M.$$

Protože je tato funkce spojitá ve $V_{\widetilde{t}}$, nabývá svého maxima v nějakém bodě (t_1, x_1). Zřejmě je

$$v(t_1,x_1) \ge v(t_0,x_0) = T(t_0,x) = M > m$$

a bod (t_1,x_1) nepatří do Γ, tj. $t_1 > 0$. Pokud by bylo $\frac{\partial^2 v(t_1,x_1)}{\partial x^2} > 0$, nebylo by v (t_1,x_1) maximum. Je tedy nutně

$$\frac{\partial^2 v(t_1,x_1)}{\partial x^2} \le 0. \tag{12.7}$$

Představme si na moment, že $t_1 < \widetilde{t}$. Protože

$$v(t,0) = T(t,0) + \frac{M-m}{2\widetilde{t}}(t_0 - t) = \frac{M-m}{2\widetilde{t}}\widetilde{t} \le M$$

a

$$v(t,l) = T(t,l) + \frac{M-m}{2\widetilde{t}}(t_0 - t) = \frac{M-m}{2\widetilde{t}}\widetilde{t} \le M,$$

nemůže být $x_0 = 0$ ani $x_0 = l$. Buď je tedy bod (t_1,x_1) vnitřním bodem $\widetilde{t}$ a v tom případě je $\frac{\partial v(t_1,x_1)}{\partial t} = 0$ (parciální derivace je nula, neboť v bodě (t_1,x_1) má

v maximum) nebo je $t_1 = \widetilde{t}$ a v tomto případě musí být $\frac{\partial v(t_1,x_1)}{\partial t} \geq 0$. V každém případě

$$\frac{\partial v(t_1,x_1)}{\partial t} \geq 0. \tag{12.8}$$

Díky (12.7), (12.8) a (12.6) máme

$$0 = \frac{\partial T(t_1,x_1)}{\partial t} - \frac{\partial^2 T(t_1,x_1)}{\partial x^2} =$$
$$\frac{\partial v(t_1,x_1)}{\partial t} + \frac{M-m}{2\widetilde{t}} - \frac{\partial^2 v(t_1,x_1)}{\partial x^2} > 0$$

a dostali jsme spor.

□

4. Existence řešení Fourierovou metodou

Nejprve najdeme nějakou množinu nenulových funkcí splňujících (ii) a (iii) z problému (12.1) a zkusíme je nakombinovat tak, aby byla splněna i podmínka (iv). Neprve budeme hledat funkci $T(t,x)$ tak, aby splňovala (ii). Hledejme ji ve tvaru

$$T(t,x) = \alpha(t)\beta(x).$$

Dosazením do (ii) máme

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = \alpha'(t)\beta(x) = a^2\alpha(t)\beta''(x) = a^2\ \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}. \tag{12.9}$$

Snadno dostaneme pro každé t, x

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = a^2\frac{\beta''(x)}{\beta(x)}. \tag{12.10}$$

Nyní přijde jedna z nejhezčích úvah celého postupu. Protože (13.5) platí pro každé t, x a jedná se tedy o rovnost dvou funkcí dvou proměnných, je i (13.6) rovnost funkcí dvou proměnných. Protože ale nalevo je funkce nezávislá na x, napravo funkce nezávislá na t a mají se rovnat jakožto funkce dvou proměnných, musí se obě rovnat stejné konstantní funkci, řekněme p. Tedy

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = a^2\frac{\beta''(x)}{\beta(x)} = p. \tag{12.11}$$

Nejprve se podívejme na část

$$a^2\frac{\beta''(x)}{\beta(x)} = p.$$

Úpravou máme

$$\beta''(x) - \frac{p}{a^2}\beta(x) = 0.$$

Funkce $\beta(x) = 0$ je jistě vždy řešení. Ale to by $T(t,x) = \alpha(t)\beta(x) = 0$ a neměli bychom nenulové řešení. V kapitole 6 je ovšem vyřešena otázka, kdy existuje nenulové řešení. To je v případě vlastních čísel. Z věty 6.9 víme, že pokud

$$\frac{p}{a^2} = -\Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2,$$

pak existuje nenulové řešení

$$\beta(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$$

a navíc $\beta(0) = \beta(l) = 0$. Podívejme se nyní na první část (12.11). Jde o rovnici

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = p = -a^2\Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2 = \Big(\frac{k\pi a}{l}\Big)^2.$$

Přímou integrací dostaneme $\ln\alpha(t) = -\Big(\frac{k\pi a}{l}\Big)^2 t$ a tedy

$$\alpha(t) = \mathrm{e}^{(\frac{k\pi a}{l})^2 t}.$$

Celkem jsme tedy dostali, že každá funkce

$$T_k(t,x) := \mathrm{e}^{(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin\frac{k\pi}{l}x$$

splňuje (ii) a (iii) z problému (12.1).

Ptejme se nyní, zda můžeme pomocí lineární kombinace těchto funkcí splnit i podmínku (iv). Je zřejmé, že každá funkce tvaru

$$T(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin\frac{k\pi}{l}x$$

splňuje (ii) a (iii). Podmínka (iv) říká, že

$$\varphi(x) = T(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Jde tedy o rozvoj funkce $\varphi(x)$ do Fourierovy řady.

KAPITOLA 13

Rovnice struny

Řešme následující úlohu: Představme si strunu (z nějakého materiálu) délky l, která je na krajích pevně uchycena (např. na kytaře). V čase $t = 0$ strunu vychýlíme z rovné polohy do polohy $\varphi(x)$ a jestě ji dodáme počáteční rychlost $\psi(x)$. Jaký tvar zaujme struna v čase t?

1. Odvození

Předpokládejme, že struna délky l je vyrobena z dokonale ohebného vlákna (neklade tedy odpor proti ohybu) a má nějakou lineární hustotu $\varrho(x)$, která se nemění s časem. Upevněme strunu na jejích koncích a napněme ji na obou koncích silou F. Můžeme si ještě představit, že na strunu působí nějaké ne moc velké kolmé zatížení $f(t,x)$, které se mění s časem. Předpokládejme, že struna nějak kmitá. Hledáme tedy její výchylku $u(t,x)$ v čase t. K odvození rovnice pro $u(t,x)$ použijeme Newtonův pohybový zákon, který říká, že časová derivace hybnosti je síla. K odvození rovnice struny budeme předpokládat, že

(i) funkce $u(t,x)$ je tolik hladká, kolik potřebujeme (bude stačit, že má spojité parciální derivace do druhého řádu),
(ii) výchylky jsou "malé", tj. hodnoty $\frac{\partial u}{\partial x}$ lze zanedbat oproti jedničce a výchylky ve směru osy x zanedbáme,
(iii) vektor síly, který napíná v každém bodě strunu, má směr její tečny, jeho velikost se nemění a je rovna F.

Vezměme nyní malý pevně zafixovaný interval $(x, x+\Delta x) \subset (0,l)$ a napišme Newtonův pohybový zákon pro odpovídající úsek struny.

Zrychlení odpovídajícího úseku struny:

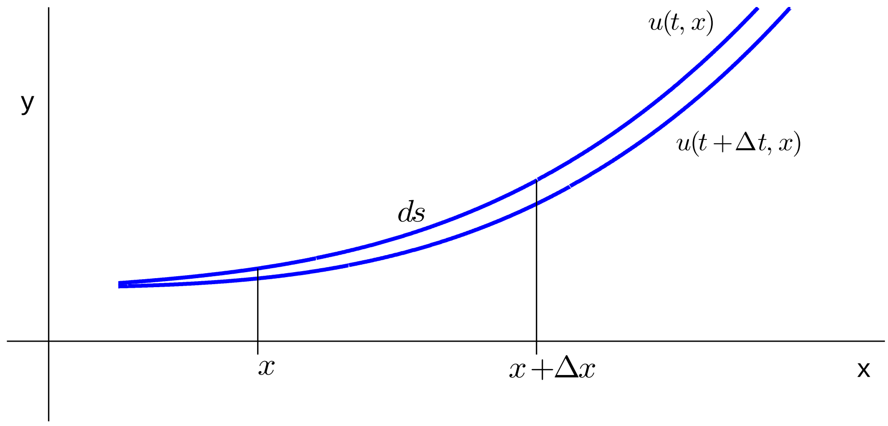
Uvažujme Δx malé. Potom délka ds na obrázku 1 je přibližně rovna délce části tečny v bodě x uvažované na intervalu $(x, x+\Delta x)$. Ta je přibližně rovna

$$\sqrt{1+\Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big)^2}\;\Delta x$$

a hmotnost této části struny je asi

$$\varrho(x)\sqrt{1+\Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big)^2}\;\Delta x.$$

Protože předpokládáme, že $\frac{\partial u}{\partial x}$ lze zanedbat oproti jedničce, je tato hmotnost rovna přibližně $\varrho(x)\Delta x$. Vypočítejme hybnost této části struny. Uvažujme časový interval $(t, t+\Delta t)$ (Δt malé) a vyjádřeme průměrnou rychlost za čas Δt. Struna má v čase t polohu $u(t,x)$ v intervalu $(x, x+\Delta x)$ a v čase $t+\Delta t$ má polohu $u(t+\Delta t, x)$. Předpokládejme, že délka zkoumaného intervalu Δx je velmi malá. To znamená,



Obrázek 1

že všechny body z intervalu $(x, x + \Delta x)$ urazí za malý čas Δt stejnou vzdálenost, viz obrázek 1. Průměrná rychlost každého tohoto bodu je potom dána výrazem

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t}.$$

Pokud limitíme $\Delta t \to 0$, dostaneme rychlost každého bodu v čase t

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$$

a vzhledem k tomu, že jsme si vyjádřili hmotnost části struny v intervalu $(x, x+\Delta x)$, máme vyjádřenou hybnost

$$\varrho(x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Delta x.$$

a konečně derivace hybnosti je

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\varrho(x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big)\Delta x = \varrho(x)\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}\Delta x.$$

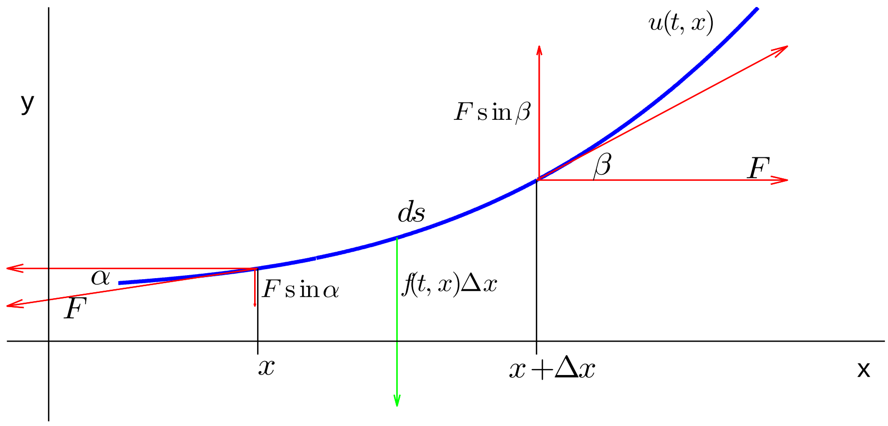
Poznamenejme, že pokud bychom uvažovali, že se hustota mění i s časem, tj. $\varrho := \varrho(t, x)$, dostaneme, že derivace hybnosti je

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\varrho(t, x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big)\Delta x$$

ale nadále budeme uvažovat, že hustota není funkcí času.

Síly působící na odpovídající úsek struny:

Spočítejme nyní síly, které působí na tuto část struny. Jednak na kraji působí síly o velikosti F a navíc působí síla $f(t, x)$, viz obrázek 2. Projekce sil F rovnoběžné s osou x lze díky malé výchylce zanedbat a zůstanou jen projekce $F \sin\alpha$ a $F \sin\beta$



Obrázek 2

sil F do osy y. Na dílek ds působí tedy síly $F\sin\alpha$, $F\sin\beta$ a $f(t,x)\Delta x$. Protože výchylky jsou malé, jsou úhly α,β malé a lze psát

$$\sin\alpha \doteq \operatorname{tg}\alpha, \qquad \sin\beta \doteq \operatorname{tg}\beta.$$

Jenomže vidíme, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\partial u(t,x+\Delta x)}{\partial x}$$

a součet sil působících na dx je

$$F\,\frac{\partial u(t,x+\Delta x)}{\partial x} - F\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + f(t,x)\Delta x.$$

Aplikace Newtonova zákona:

Protože derivace hybnosti je součet sil, platí

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\varrho(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big)\Delta x = F\Big(\frac{\partial u(t,x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big) + f(t,x)\Delta x.$$

Vydělíme Δx a dostaneme

$$\varrho(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = F\,\frac{\frac{\partial u(t,x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}}{\Delta x} + f(t,x).$$

Protože pro malá Δx je

$$\frac{\frac{\partial u(t,x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}}{\Delta x} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

a konečně dostáváme

$$\varrho(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = F\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x). \tag{13.1}$$

2. Matematická formulace problému konečné struny

Budeme úlohu formulovat jen ve speciálním případě. Je to bez vnějších sil, tj. $f(t,x) = 0$ a pro konstantní hustotu ϱ. Označme $\frac{F}{\varrho} = a^2$ a dostaneme z (13.1)

$$\frac{\partial u^2(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}.$$

Přidáme ještě počáteční a okrajové podmínky a můžeme zformulovat problém.

PROBLÉM 13.1. *Buď $a > 0$ a nechť jsou dány funkce $\varphi(x), \psi(x)$ na intervalu $[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$. Hledejme funkci $u(t,x)$ definovanou v $[0,\infty) \times [0,l]$, která splňuje*

(i) *je spojitá v $[0,\infty) \times [0,l]$,*

(ii) *splňuje rovnici*

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

v $(0,\infty) \times (0,l)$,

(iii) *okrajové podmínky $u(t,0) = u(t,l) = 0$ pro každé $t > 0$,*

(iv) *počáteční podmínku $u(0,x) = \varphi(x)$ pro každé $x \in [0,l]$,*

(v) *počáteční podmínku $\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x)$ pro každé $x \in [0,l]$.*

Funkce splňující (i), (ii), (iii), (iv) a (iv) se nazývá klasické (silné) řešení problému 13.1. (na rozdíl od slabého). V následujících částech si ukážeme, že tato úloha má jednoznačné řešení pro každé dvě dostatečně hladké funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ na intervalu $[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

3. Jednoznačnost řešení

LEMMA 13.2. *Nechť funkce $u(t,x)$ je klasické řešení problému 13.1 s $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Pak $u(t,x) = 0$ v $[0,\infty) \times [0,l]$.*

Důkaz. Nejprve si uveďme vzorec, k jehož ověření stačí elementární vzorečky pro derivování.

$$-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\Big). \tag{13.2}$$

Nechť nyní funkce $u(t,x)$ splňuje (ii), tj.

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a^2 \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

v $(0,\infty) \times (0,l)$. Zvolme $T > 0$ libovolně a vynásobíme předchozí vztah výrazem $\frac{\partial u}{\partial t}$ a integrujme pv res oblast $(0,T) \times (0,l)$. Dostaneme

$$\int_0^l \int_0^T \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a^2 \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big) dt dx = 0.$$

Snadno dostaneme

$$\int_0^l \int_0^T \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} dt dx - a^2 \ \int_0^l \int_0^T \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} dt dx = 0 \tag{13.3}$$

což lze přepsat díky snadnému vztahu

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2$$

a (13.2) jako

$$\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big)^2 dtdx + \frac{a^2}{2}\int_0^l\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big)^2 dtdx$$
$$- a^2\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big)dxdt = 0.$$

Přímou integrací máme

$$\frac{1}{2}\int_0^l \Big(\frac{\partial u(T,x)}{\partial t}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}\Big)^2 dx \tag{13.4}$$
$$+ \frac{a^2}{2}\int_0^l \Big(\frac{\partial u(T,x)}{\partial x}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}\Big)^2 dx$$
$$- a^2\int_0^T \Big(\frac{\partial u(t,l)}{\partial t}\frac{\partial u(t,l)}{\partial x}\Big) - \Big(\frac{\partial u(t,0)}{\partial t}\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}\Big)dxdt = 0.$$

Díky počátečním a okrajovým podmínkám máme

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x) = 0, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial x} = \varphi'(x) = 0$$

a protože $u(t,0) = u(t,l) = 0$, máme i

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(t,l)}{\partial t}.$$

Dosazením do (13.4) dostaneme

$$\frac{1}{2}\int_0^l \Big(\frac{\partial u(T,x)}{\partial t}\Big)^2 + \frac{a^2}{2}\int_0^l \Big(\frac{\partial u(T,x)}{\partial x}\Big)^2 = 0.$$

Z toho plyne, že

$$\frac{\partial u(T,x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(T,x)}{\partial x} = 0.$$

Protože toto platí pro libovolné $T > 0$ a $0 < x < l$, je nutně $u(t,x)$ v $(0,\infty)\times(0,l)$ konstantní. Díky počátečním podmínkám je pak identicky nulová, což jsme měli dokázat.

□

VĚTA 13.3. *Nechť funkce $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ jsou dvě klasická řešení problému 13.1. Pak $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ v $[0,\infty)\times[0,l]$.*

Důkaz. Položme

$$u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x).$$

Snadno se ověří, že $u(t,x)$ je klasické řešení problému 13.1 s $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Podle Lemmatu 13.2 je $u(t,x) = 0$, což znamená $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ a důkaz je hotov.

□

4. Existence řešení Fourierovou metodou

Postup je podobný jako u rovnice vedení tepla. Nejprve najdeme nějakou množinu nenulových funkcí splňujících (i), (ii) a (iii) z problému (13.1) a zkusíme je nakombinovat tak, aby byly splněny i podmínky (iv) a (iv). Neprve budeme hledat funkci $u(t,x)$ tak, aby splňovala (ii). Hledejme ji ve tvaru

$$u(t,x) = \alpha(t)\beta(x).$$

Dosazením do (ii) máme

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \alpha''(t)\beta(x) = a^2\alpha(t)\beta''(x) = a^2\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}. \tag{13.5}$$

Snadno dostaneme pro každé t, x

$$\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} = a^2\frac{\beta''(x)}{\beta(x)}. \tag{13.6}$$

Nyní přijde analogická úvaha jako u rovnice vedení tepla. Protože (13.5) platí pro každé t, x a jedná se tedy o rovnost dvou funkcí dvou proměnných, je i (13.6) rovnost funkcí dvou proměnných. Protože ale nalevo je funkce nezávislá na x, napravo funkce nezávislá na t a mají se rovnat jakožto funkce dvou proměnných, musí se obě rovnat stejné konstantní funkci, řekněme p. Tedy

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = a^2\frac{\beta''(x)}{\beta(x)} = p. \tag{13.7}$$

Nejprve se podívejme na část

$$a^2\frac{\beta''(x)}{\beta(x)} = p.$$

Úpravou máme

$$\beta''(x) - \frac{p}{a^2}\beta(x) = 0.$$

Funkce $\beta(x) = 0$ je jistě vždy řešení. Ale to by $u(t,x) = \alpha(t)\beta(x) = 0$ a neměli bychom nenulové řešení. V kapitole 6 je ovšem vyřešena otázka, kdy existuje nenulové řešení. To je v případě vlastních čísel. Z věty 6.9 víme, že pokud

$$\frac{p}{a^2} = -\Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2,$$

pak existuje nenulové řešení

$$\beta(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$$

a navíc $\beta(0) = \beta(l) = 0$. Podívejme se nyní na první část (13.7). Jde o rovnici

$$\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} = p = -a^2\Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2 = -\Big(\frac{k\pi a}{l}\Big)^2.$$

Řešením dostaneme

$$\alpha(t) = c_1\sin\frac{k\pi a}{l}t + c_2\cos\frac{k\pi a}{l}t.$$

Celkem jsme tedy dostali, že všechny funkce tvaru

$$u_k(t,x) := \sin\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x$$

nebo tvaru

$$u_k(t,x) := \cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x$$

splňují (i), (ii) a (iii) z problému (13.1).

Ptejme se nyní, zda můžeme pomocí lineární kombinace těchto funkcí splnit i podmínky (iv) a (v). Je zřejmé, že každá funkce tvaru

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \sin \frac{k\pi a}{l} t + b_k \cos \frac{k\pi a}{l} t\Big) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

splňuje (ii) a (iii). Spočítejme formálně

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \frac{k\pi a}{l} \cos \frac{k\pi a}{l} t - b_k \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi a}{l} t\Big) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

Podmínka (iv) říká, že

$$\varphi(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

a podmínka (v) říká, že

$$\psi(x) = \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x = \frac{\pi a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Jde tedy o rozvoj funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ do Fourierových řad.

5. Matematická formulace problému nekonečné struny

Z (13.1) máme

$$\frac{\partial u^2(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}.$$

Přidáme ještě počáteční podmínky a můžeme zformulovat problém.

Problém 13.4. *Buď $a > 0$ a nechť jsou dány funkce $\varphi(x), \psi(x)$ na intervalu $\mathbb{R}$. Hledejme funkci $u(t,x)$ definovanou v $[0,\infty) \times \mathbb{R}$, která splňuje*

(i) *je spojitá v $[0,\infty) \times \mathbb{R}$,*

(ii) *splňuje rovnici*

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

v $(0,\infty) \times \mathbb{R}$,

(iii) *počáteční podmínku $u(0,x) = \varphi(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,*

(iv) *počáteční podmínku $\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.*

Funkce splňující (i), (ii), (iii) a (iv) se nazývá klasické (silné) řešení problému 13.4 (na rozdíl od slabého). V následující části si ukážeme přímé řešení této úlohy.

Proveďme substituci proměnných

$$\alpha = x + at, \beta = x - at$$

a definujme funkci

$$v(\alpha,\beta) = u(t,x).$$

Podle vzorce pro derivování složených funkcí více proměnných dostaneme

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\Big).$$

Dále

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\Big) = a\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\Big)\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \beta}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\Big)\frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\Big)\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \beta}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\Big)\frac{\partial \beta}{\partial t}\right]$$
$$= a^2\Big(\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} - 2\,\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}\Big).$$

Analogicky platí

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\Big)$$

a dále

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\Big) = a\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\Big)\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \beta}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\Big)\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\Big)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\Big(\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\Big)\frac{\partial \beta}{\partial x}\right]$$
$$= \Big(\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} + 2\,\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}\Big).$$

Po dosazení máme

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} - 2\,\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}\Big)$$
$$- a^2\left[\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} + 2\,\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}\right] = -4a^2\,\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Přímou integrací máme

$$\frac{\partial v(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = f(\alpha)$$

a ještě jednou

$$v(\alpha,\beta) = f(\alpha) + g(\beta),$$

kde f, g jsou libovolné funkce jedné proměnné (samozřejmě dvakrát diferencovatelné). Zpětným přechodem k funkci u dostaneme

$$u(t,x) = f(x+at) + g(x-at).$$

Tím jsme nalezli všechna řešení rovnice (ii) problému (13.4). Splnit okrajové podmínky už je snadné. Snadno spočteme

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(f'(x+at) - g'(x-at)).$$

Pro $t = 0$ je

$$\varphi(x) = u(0,x) = f(x) + g(x), \qquad \psi(x) = \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = a(f'(x) - g'(x)).$$

Označme $\Psi(x)$ primitivní funkci k $\psi(x)$. Potom řěšení problému (13.4) je daný vzorcem

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\big(\Psi(x+at) - \Psi(x-at)\big).$$

Je-li navíc počáteční rychlost nulová, tj. $\psi(x) = 0$, máme $\Psi(x) = c$, tj. konstantní funkce, platí

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big).$$

6. Rovnice vedení tepla s konvektivním členem na polonekonečném intervalu

KAPITOLA 14

Numerické metody

1. Rietzova metoda pro jednorozměrnou úlohu

Nechť je dáno $\lambda \geq 0$ a $f \in L^2(0,l)$. Hledejme slabé řešení $u_0(x)$ úlohy

$$-u'' + \lambda u = g(x), \qquad u(0) = u(l) = 0,$$

tj. funkci $u \in W_0^{1,2}(0,l)$ takovou, že pro každou funkci $v \in W_0^{1,2}(0,l)$ platí

$$\int_0^l \big(u_0'(x)v'(x) + \lambda u_0(x)v(x)\big)dx = \int_0^l g(x)v(x)dx. \tag{14.1}$$

Podle vět 4.6 a 4.5 je tato úloh ekvivalentní úleze hledat minimum kvadratického funkcionálu

$$F(v) = \int_0^l \big(v'^2(x) + \lambda v^2(x)\big)dx - \int_0^l g(x)v(x)dx.$$

Předpokládejme, že máme posloupnost konečně dimenzionálních podprostorů $V_n \subset W_0^{1,2}(0,l)$, které ale jakýmsi způsobem vyčerpávají $W_0^{1,2}(0,l)$.

Idea nalezení přibližného řešení spočívá v tom, že my nebudeme hledat přímo u_0, ale budeme hledat jakési $u_n \in V_n$, které minimalizuje funkcionál $F(u)$ na prostoru V_n a budeme doufat, že $u_n \to u_0$ v prostoru $W_0^{1,2}(0,l)$.

Nyní vyslovíme dvě věty, které nás opravňují k tomuto postupu. Ale nejprve si řekneme jednu definici.

Definice 14.1. *Nechť H je Hilbertův prostor. Říkáme, že množina $M \subset H$ je hustá v H, pokud*

$$\forall u \in H \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists v \in M \quad \text{tak, že} \quad \|u - v\|_H < \varepsilon.$$

Věta 14.2. *Buď V_n konečně dimenzionální podprostor v H. Pak existuje jednoznačné u_n takové, že*

$$F(u_n) = \min\{F(u); u \in V_n\}.$$

Důkaz. Snadno se ověří, že omezenost a pozitivní definitnost kvadratického funkcionálu $F(u)$ na H implikuje jeho omezenost a pozitivní definitnost na V_n. Existence a jednoznačnost u_n pak plyne z věty 4.5.

□

Věta 14.3. *Buď (Au, v) bilineární symetrická pozitivně definitní forma na H. Nechť $V_n \subset H$, $n = 1, 2, \ldots$ je posloupnost konečně dimenzionálních podprostorů taková, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{n_k}$ je hustá množina v H pro každou posloupnost $\{n_k\}$ vybranou z posloupnosti přirozených čísel. Označme u_0 a u_n prvky, které minimalizují $F(u)$ na H a V_n. Pak $u_n \to u_0$ v prostoru H.*

Důkaz. Podle věty 4.6 víme o u_0 a o posloupnosti u_n, že

$$(Au_0, v) = (f, v) \text{ pro každé } v \in H \tag{14.2}$$

a

$$(Au_n, v) = (f, v) \text{ pro každé } v \in V_n. \tag{14.3}$$

Protože $v_n \subset H$, víme, že (14.2) platí i pro každé $v \in V_n$, tj.

$$(Au_0, v) = (f, v) \text{ pro každé } v \in V_n. \tag{14.4}$$

Odečtením (14.3) a (14.4) máme

$$(A(u_0 - u_n), v) = 0 \text{ pro každé } v \in V_n. \tag{14.5}$$

Označme $\widetilde{u}_n$ ortogonální projekci u_0 do prostoru V_n, tj. $\widetilde{u}_n$ splňuje

$$(u_0 - u_n, v) = 0 \text{ pro každé } v \in V_n. \tag{14.6}$$

Odhadujme

$$\begin{aligned}
&\|u_n - \widetilde{u}_n\|^2 = (u_n - \widetilde{u}_n, u_n - \widetilde{u}_n) \le \frac{1}{\alpha}(A(u_n - \widetilde{u}_n), u_n - \widetilde{u}_n) \\
&= \frac{1}{\alpha}(A(u_n - \widetilde{u}_n + u_0 - u_0), u_n - \widetilde{u}_n) \\
&= \frac{1}{\alpha}\Big((A(u_0 - \widetilde{u}_n), u_n - \widetilde{u}_n) - (A(u_0 - u_n), \underbrace{u_n - \widetilde{u}_n}_{\in V_n})\Big) =^{\text{díky (14.5)}} \\
&= \frac{1}{\alpha}(A(u_0 - \widetilde{u}_n), u_n - \widetilde{u}_n) \le \frac{K}{\alpha}\|u_0 - \widetilde{u}_n\| \, \|u_n - \widetilde{u}_n\|.
\end{aligned}$$

Vydělíme výrazem $\|u_n - \widetilde{u}_n\|$ a dostaneme

$$\|u_n - \widetilde{u}_n\| \le \frac{K}{\alpha}\|u_0 - \widetilde{u}_n\|.$$

Z toho okamžitě dostaneme (a z Pythagorovy věty)

$$\begin{aligned}
&\|u_0 - u_n\|^2 = \|u_0 - \widetilde{u}_n\|^2 + \|u_n - \widetilde{u}_n\|^2 \\
&\le \|u_0 - \widetilde{u}_n\|^2 + \big(K/\alpha\big)^2\|u_0 - \widetilde{u}_n\|^2 = \Big(1 + \big(K/\alpha\big)^2\Big)\|u_0 - \widetilde{u}_n\|^2,
\end{aligned}$$

což dává

$$\|u_0 - u_n\| \le \sqrt{1 + \big(K/\alpha\big)^2} \; \|u_0 - \widetilde{u}_n\|. \tag{14.7}$$

Jelikož $\widetilde{u}_n$ je ortogonální projekce u_0 do V_n, je to nebližší prvek, tj.

$$\|u_0 - \widetilde{u}_n\| = \min\{\|u_0 - v\|; v \in V_n\}. \tag{14.8}$$

Předpokládejme nyní, že neplatí $u_n \to u_0$ v prostoru H. Pak ovšem existuje $\delta > 0$ a vybraná posloupnost n_k tak, že

$$\delta \le \|u_0 - u_{n_k}\|.$$

Díky (14.7) a (14.8) můžeme psát pro libovolné $v \in V_{n_k}$

$$\delta \le \|u_0 - u_{n_k}\| \le \sqrt{1 + \big(K/\alpha\big)^2} \; \|u_0 - \widetilde{u}_{n_k}\| \le \sqrt{1 + \big(K/\alpha\big)^2} \; \|u_0 - v\|$$

a tedy libovolný prvek z V_{n_k} je od u_0 vzdálen aspoň o $\frac{\delta}{\sqrt{1+\left(K/\alpha\right)^2}}$. Protože toto platí pro každé k, je libovolný prvek z $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{n_k}$ od u_0 vzdálen aspoň o $\frac{\delta}{\sqrt{1+\left(K/\alpha\right)^2}}$ a to je spor s předpokladem, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{n_k}$ je hustá množina v H.

□

Nyní můžeme aplikovat předchozí obecné věty na prostor $H = W_0^{1,2}(0,l)$. Nechť $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ jsou lineárně nezávislé funkce ve $W_0^{1,2}(0,l)$. Položme $V_n = \operatorname{Lin}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. Hledejme

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

tak, aby minimalizovala $F(u)$ na V_n nebo ekvivalentně, aby splňovala (14.1) pro všechny $v \in V_n$. To znamená

$$\int_0^l \big(u_0'(x)v'(x) + \lambda u_0(x)v(x)\big)dx = \int_0^l g(x)v(x)dx \text{ pro každé } v \in V_n. \tag{14.9}$$

Především si uvědomme, že stačí (14.9) splnit jen pro $v = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pak máme (s využitím $u_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \int_0^l \big(\varphi_i'(x)\varphi_k'(x) + \lambda \varphi_i(x)\varphi_k(x)\big)dx = \int_0^l g(x)\varphi_k(x)dx$$
$$\text{pro každé } k = 1, 2, \dots n.$$

Označme pro jednoduchost

$$((\varphi_i, \varphi_k)) = \int_0^l \big(\varphi_i'(x)\varphi_k'(x) + \lambda\varphi_i(x)\varphi_k(x)\big)dx$$

a

$$(f, \varphi_k) = \int_0^l g(x)\varphi_k(x)dx.$$

Toto jsou známá čísla a neznámé jsou a_i, pro které máme soustavu lineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} a_i((\varphi_i, \varphi_k)) = (f, \varphi_k) \text{ pro každé } k = 1, 2, \dots n.$$

V maticovém tvaru máme

$$\begin{pmatrix} ((\varphi_1,\varphi_1)) & ((\varphi_2,\varphi_1)) & \dots & ((\varphi_n,\varphi_1)) \\ ((\varphi_1,\varphi_2)) & ((\varphi_2,\varphi_2)) & \dots & ((\varphi_n,\varphi_2)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ((\varphi_1,\varphi_n)) & ((\varphi_2,\varphi_n)) & \dots & ((\varphi_n,\varphi_n)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_1) \\ (f,\varphi_2) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}. \tag{14.10}$$

Lze ukázat, že pokud $\varphi_i(x)$ jsou lineárně nezávislé, je

$$\det \begin{pmatrix} ((\varphi_1,\varphi_1)) & ((\varphi_2,\varphi_1)) & \dots & ((\varphi_n,\varphi_1)) \\ ((\varphi_1,\varphi_2)) & ((\varphi_2,\varphi_2)) & \dots & ((\varphi_n,\varphi_2)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ((\varphi_1,\varphi_n)) & ((\varphi_2,\varphi_n)) & \dots & ((\varphi_n,\varphi_n)) \end{pmatrix} \neq 0$$

a tedy soustava (14.10) má jediné řešení $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a potom

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x).$$

Skutečné numerické kouzlo ale spočívá ve volbě prostorů V_n a zejména v jejich bázích. Rozdělme interval $(0, l)$ na $n+1$ stejných intervalů a označme dělící body $0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = l$ a $h = \frac{l}{n+1}$. Definujme $i = 1, 2, \dots, n$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (0, x_{i-1}), \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} & \text{pokud } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & \text{pokud } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{pokud } x \in (x_{i+1}, l). \end{cases} \tag{14.11}$$

Definujme prostor V_n jako lineární obal těchto $\varphi_i(x)$. Vtip je v tom, že matice utvořená z $((\varphi_i, \varphi_k))$ je pásová, neboť $((\varphi_i, \varphi_k)) = 0$ pro $|i-k| \geq 2$. Výsledná soustava se dá řešit snadno Gaussovou eliminací. Je ovšem otázka, zda u_n konvergují k řešení. Odpověd dává následující věta.

VĚTA 14.4. *Buď* $V_n = \mathrm{Lin}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$*, kde* φ_i *jsou dány* (14.11). *Pak pro každou vybranou posloupnost* n_k *platí, že* $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{n_k}$ *je hustá množina v* $W_0^{1,2}(0, l)$.

Důkaz. Zatím vynechán.

□

Literatura

[1] M. Brdička,L. Samek and B. Sopko, Mechanika kontinua. Academia, Praha, (2005).
[2] F. Martan, Fourierovy řady. Vydavatelství ČVUT, Praha 1, Husova 5, (1974).
[3] A. Nekvinda, Matematika 4. Přednáška pro magisterské studium na webu, (2007).
[4] K. Rektorys, Matematika V. Ediční středisko ČVUT, Praha 1, Husova 5, (1986).
[5] K. Rektorys, Matematika I. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, (1964).
[6] Č. Vitner, Parciální diferenciální rovnice. Vydavatelství ČVUT, Praha 1, Husova 5, (1975).
[7] O. Zindulka, Matematika 3. Nakladatelství ČVUT, (2007).