

Studenti stupně "medium" či "professional" si vyberou téma semestrální práce. Oznámí to A. Nekvindovi v kteroukoliv dobu, pokud bude přítomen na katedře. Je ovšem možné zamluvit si téma i telefonem (224 354 410) nebo e-mailem na adresu nales@mat.fsv.cvut.cz. Pokud si student vybere nějaké téma, je toto téma zadane a ostatní studenti si musí najít nějaké jiné. Je ovšem možné dohodnout se s vyučujícím i na nějakém jiném tématu než je v seznamu, ale musí se to opět nahlásit A. Nekvindovi (stačí opět telefonicky nebo e-mailem), aby to mohl do seznamu připsat.

V seznamu jsou označena vybraná témata zářezovaným jménem.

Témata semestrálních prací

1. Achilleus a želva - zadal Aleš Nekvinda

Řeší

Achilleus běží v rovině a táhne za sebou plášť uchycený v počátku. Jeho poloha v čase t je dána vektorem $(a(t), b(t))$, kde $a(t), b(t)$ jsou předepsané funkce. Plášť je kouzelný a má schopnost se libovolně natahovat. V momentě uchycení pláště se po něm vydává želva proměnnou rychlostí $v(t)$ (vzhledem k plášti) směrem k Achilleovi. Dokážete najít podmínku, za jaké dohoní želva Achillea?

2. Výstup ve vzduchu - zadal Aleš Nekvinda

Řeší

Hmotný bod je vržen svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0 . Předpokládejme, že kromě gravitační síly na něj působí odpor prostředí úměrný čtverci rychlosti pohybu hmotného bodu. Vypočtete dobu výstupu t_0 , výšku výstupu h , rychlost dopadu v_1 a dobu sestupu t_1 hmotného bodu. Porovnejte v_1, t_1, v_0 a t_0 .

3. Druhá kosmická rychlost - zadal Aleš Nekvinda

Řeší

Označme poloměr Země R a hmotnost M . Najděte nejmenší rychlost, s jakou musíme vystřelit těleso z povrchu zemského kolmo vzhůru, aby se nevrátilo.

4. Vytékání z nádoby - zadal Aleš Nekvinda

Řeší

Nádoba tvaru kužele s dolním poloměrem r , výškou h a horním poloměrem R je naplněna vodou. Předpokládejme $r < R$. Za jak dlouho z ní voda vyteče?

5. Zavěšená nit - zadal Aleš Nekvinda

Řeší

Tenká ohebná nit je zavěšena ve dvou bodech. Jaký tvar nit zaujme?

6. Psí křivka - zadal Aleš Někunda

Řeší

Z počátku souřadného systému vybíhá zajíc ve směru osy x rychlostí u . V ten samý moment ho z bodu vzdáleném a od počátku na ose y začíná sledovat pes rychlostí w tak, že jeho směr míří pořád k zajíci. Najděte trajektorii pohybu psa.

7. Problém míchání - zadal Aleš Někunda

Řeší

Jsou dány dvě nádoby objemu V spojené trubicí o průřezu naplněné nějakou kapalinou. Do jedné z nich přitéká otvorem průřezu S rychlostí v voda, z druhé stejnou rychlostí odtéká trubicí opět o průřezu S . Směsi v obou nádobách považujeme za homogenní. Jak závisí koncentrace kapaliny ve druhé nádobě na čase?

8. Pohyb hmotného bodu v centrálním gravitačním poli - zadal Aleš Někunda

Řeší

Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje v rovině v gravitačním poli vytvořeném hmotným bodem o hmotnosti M umístěným v počátku. Dokažte, že trajektorie pohybu je kuželosečka.

9. Kulička na pružině ve vodě - zadal Aleš Někunda

Řeší

Ve vodě je zavěšena kulička o hmotnosti m na pružině o tuhosti k . Vychýlením o A z rovnovážné polohy a puštěním je kulička uvedena do pohybu. Odpor vody uvažujeme úměrný rychlosti kuličky. Popište pohyb kuličky.

10. Řetěz jede ze stolu - zadal Aleš Někunda

Řeší

Řetěz délky d částečně visí ze stolu částí dlouhou $d - a$ a částečně leží na stole částí dlouhou a . V čase 0 začne padat se stolu. Za jak dlouho spadne, pokud neuvažujeme tření?

11. Řetěz jede ze stolu s třením - zadal Aleš Někunda

Řeší

Řetěz délky d částečně visí ze stolu částí dlouhou $d - a$ a částečně leží na stole částí dlouhou a . V čase 0 začne padat se stolu. Uvažujeme, že třecí síla je přímo úměrná délce té části řetězu, která je ještě na stole. Za jak dlouho spadne?

12. Cisterna - zadal Aleš Někunda

Řeší

Cisterna tvaru válce je tažena konstantní silou po kolejích a uniká z ní voda otvorem o průřezu S navrtaném ve dnu nádrže. Jak závisí ujetá dráha nádrže na čase?

13. Cisterna s reakcí - zadal Aleš Někveda

Řeší

Cisterna tvaru položeného válce je tažena konstantní silou po kolejích a uniká z ní voda otvorem o průřezu S navrtaném vespod zadní části nádrže tvaru kruhu. Jak závisí ujetá dráha nádrže na čase?

14. Klepsidra - zadal Aleš Někveda

Řeší

Najděte tvar rotační nádoby s otvorem vespod takový, aby hladina klesala konstantní rychlostí.

15. Golf - zadal Aleš Někveda

Golfisté udávají, že při letu golfového míčku je odpor vzduchu úměrný $v^{1.3}$, kde v je velikost rychlosti míčku. Najděte dolety pro různé počáteční rychlosti a úhly.

16. Balistická křivka - zadal Aleš Někveda

Řeší

Předpokládejme, že při letu střely je odpor vzduchu úměrný v^2 , kde v je velikost rychlosti střely. Najděte dolety pro různé počáteční rychlosti a úhly.

17. Tyč nad zemí - zadal Aleš Někveda

Řeší

Jak dlouhá má být tyč kolmo visící nad rovníkem země se spodním okrajem vzdáleném a od povrchu Země tak, že nespadne. Poloměr Země je R , hmotnost M a úhlová rychlost otáčení je ω .

18. Lev a gladiátor poprvé - zadal Aleš Někveda

Řeší

V aréně tvaru kruhu je uprostřed lev a na okraji je gladiátor. V přímém souboji nemá gladiátor šanci. Jediná možnost je lvovi utíkat. Předpokládejme, že lev i gladiátor mají stejnou maximální rychlost a gladiátor se může pohybovat jen po hranici kruhu. Dále předpokládejme, že lev se snaží gladiátora chytit "lvovským způsobem", t.j. sleduje ho neustále tak, prodloužení jeho vektoru rychlosti směřuje neustále na gladiátora. Chytne ho lev?

19. Lev a gladiátor podruhé - zadal Aleš Někveda

Řeší

V aréně tvaru kruhu je uprostřed lev a na okraji je gladiátor. V přímém souboji nemá gladiátor šanci. Jediná možnost je lvovi utíkat. Předpokládejme, že lev i gladiátor mají stejnou maximální rychlost a

gladiátor se může pohybovat kdekoli v kruhu. Dále předpokládejme, že lev i gladiátor umí myslet. Reakční doba obou soupeřů je nekonečně rychlá. Má lev vyhrávající strategii?

20. Plavci v bazénu - zadal Aleš Někveda

Řeší

V bazénu tvaru pravidelného n -úhelníku je v každém vrcholu plavec. Všichni začnou plavat ve stejném čase tak, že směřují na svého souseda po pravici. Rychlosti všech plavců jsou stejné. Po jakých drahách plavou a za jak dlouho se potkají?

21. Vytékající voda z kohoutku - zadal Aleš Někveda

Řeší

Jistě jste si všimli, že pomalu vytékající voda z kohoutku zaujímá jakýsi rotační tvar, který se směrem k zemi zužuje. Jaký je to tvar?

22. Pro golfisty v křesle - zadala Ivana Pultarová

Řeší

Zkoumejte dráhu letícího golfového míče. Uvažujte let bez rotace a s rotací. Při rotaci míče se projeví tzv. Magnusova síla, která např. při horní rotaci tlačí míč k zemi.

23. Metoda konečných prvků - zadala Ivana Pultarová

Řeší

Zkoumejte jednorozměrnou diferenciální rovnici druhého řádu a hledejte přibližné řešení metodou konečných prvků.

24. Vedení tepla - zadala Ivana Pultarová

Řeší

Vhodné uložení vyhořelého jaderného paliva je úkol pro současnou generaci. Zaměřme se na jednu nepatrnou část tohoto problému. Jaderný odpad je i po dlouhé době zdrojem tepla. Počítejme např. s objemovou produkcí q o hodnotě $1036 \cdot 10^{-0.056t} \text{ W/m}^3$, kde t je čas v letech. Předpokládejme, že jaderný odpad je uložen ve válcové nádobě o průměru 1 m uložené v hloubce několik set metrů. Rovnice popisující vedení tepla

$$\nabla(k\nabla T) + q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

je odvozena např. v textu <http://mat.fsv.cvut.cz/ivana/tt3.pdf>. Teplota T závisí na prostorových souřadnicích x, y, z a na čase t . Konstanty potřebné pro výpočet jsou tepelná vodivost k , měrná tepelná kapacita c a hustota ρ . Pro nádobu s odpadem máme hodnoty

$$k = 3.1 \text{ W/mK}, \quad c = 509 \text{ J/kgK}, \quad \rho = 5400 \text{ kg/m}^3$$

a pro okolní terén

$$k = 3.0 \text{ W/mK}, \quad c = 760 \text{ J/kgK}, \quad \rho = 2670 \text{ kg/m}^3.$$

Úkolem je realizovat výpočet vycházející z představy, že nádoba je nekonečně dlouhá a tudíž celá úloha je rotačně symetrická.

- Použijte v rovnici pro vedení tepla polární souřadnice (neboli převedte rovnici do polárních souřadnic), označme je ϕ a r . Díky symetrii hodnoty řešení na ϕ nezávisí.
- Použijte numerickou metodu pro přibližné řešení získané rovnice. Např. metodu konečných diferencí kombinovanou s vhodným časovým krokem. Za počáteční stav lze vzít situaci, kdy nádoba i okolní prostor má teplotu 10°C .
- Získané výsledky uveďte ve vhodné formě.

25. Trochu základní numerické matematiky - zadala Ivana Pultarová

Řeší

Ortogonalizace bázových funkcí konečných prvků na intervalu. Co vyjde po přesném výpočtu, co vyjde po přibližném výpočtu, záleží na volbě první funkce? (K řešení tohoto úkolu student potřebuje umět derivovat a integrovat polynom a vědět, co je matice.)

26. Trochu moderní numerické matematiky - zadala Ivana Pultarová

Řeší

Budeme hledat numericky (metodou konečných prvků v nejjednodušší variantě) přibližné řešení obyčejné diferenciální rovnice $-y'' = f$ na intervalu (a, b) s okrajovými podmínkami $y(a) = y(b) = 0$. Dále se budeme zabývat jednou z klíčových otázek numeriky, a to je odhad chyby (tj. jak "dalece" se liší přibližné řešení od přesného). Při horním odhadu chyby použijeme znalost přibližného řešení.

27. Praktický problém pro šoféry teoretiky - zadala Ivana Pultarová

Řeší

Vozidla se na kruhovém objezdu pohybují tak, že každé z nich mění rychlost v závislosti na rychlosti "předchozího" vozidla a na vzdálenosti od něj. Jak se dá určit okamžitá rychlost vozidla? Jaká bude rychlost v "nekonečném" čase? (K řešení tohoto úkolu student potřebuje vědět, co je lineární diferenciální rovnice a co je matice.)

28. Zeměpád

Řeší

Ve filmu Total Recall (2012) cestují dělníci skrz zemský střed tzv. zeměpádem (v originále jen "the Fall"). Cesta jim údajně zabere 17 minut. Odpovídá tento čas realitě? Jakou rychlostí se pohybují při "průletu" středem Země?

Při výpočtu uvažujte volný pád přímým tunelem vedoucím skrz zemský střed a spojujícím dvě protilehlá místa na zemském povrchu. Zanedbejte odpor vzduchu, Zemi považujte za homogenní kouli a měnění se gravitačního zrychlení spočtete s využitím druhé Newtonovy věty (tzv. "Shell theorem"). Jak se změní čas průletu, pokud zvolíme na povrchu Země libovolná dvě místa a prokopeme tunel z jednoho místa do druhého? Jaké hodnoty bychom získali na jiných planetách Sluneční soustavy?

29. Lišky a zajáci

Řeší

Počet kusů lišek a zajíců v lese je popsán soustavou diferenciálních rovnic (systém Lotka-Volterra)

$$z' = 2z - \alpha z l, \quad z(0) = z_0, \quad \alpha = 0.01, \quad (0.1)$$

$$l' = -l + \alpha z l, \quad l(0) = l_0 \quad (0.2)$$

Podle sčítání zvířete došlo díky mírné zimě k přemnožení zajíců. Díky dostatku potravy tak hrozí, že se přemnoží i lišky, které následně většinu zajíců snědí a může tak dojít ke kolapsu celého systému. Zajíců je nyní $z_0 = 500$ kusů, lišek $l_0 = 100$ kusů. Jakých minimálních počtů dosáhnou za stávajícího stavu lišky a jakých zajáci? Kolik zajíců musejí myslivci odlovit, aby počet lišek v lese nikdy neklesl pod 50? (Vnější vlivy, jako opětovná mírná či naopak tuhá zima, zanedbejte.) Úlohu řešte jak analyticky, tak numericky. Řešení znázorněte graficky.

30. Gaussova kvadratura v 1D

Řeší

Pro každé $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ nalezněte hodnoty $w_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, (tzv. váhy) a uzlové body $x_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, tak, aby formule

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) \quad (0.3)$$

byla přesná pro všechny polynomy $f(x)$ z množiny $\{1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}\}$. Spočtete, jaké chyby se dopustíme, použijeme-li kvadraturní formule na některé základní nepolynomialní funkce.

31. Gaussova kvadratura ve 2D

Řeší

Nalezněte hodnoty w_i , $i = 1, 2, 3, 4$, (tzv. váhy) a uzlové body $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, 3, 4$, tak, aby formule

$$\int_T f(x, y) dA = \sum_{i=1}^4 w_i f(x_i, y_i) \quad (0.4)$$

byla přesná pro všechny polynomy $f(x, y) = x^k y^l$, kde $k + l \leq 3$. Množina T je trojúhelník $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Spočtete, jaké chyby se dopustíme, použijeme-li kvadraturní formuli na některé základní nepolynomialní funkce. Zvládnete odvodit i přesnější formuli?

32. Průhyb nosníku

Řeší

Odvoďte diferenciální rovnici čtvrtého řádu popisující průhyb ohybové osy nosníku délky l , s modulem pružnosti $E(x)$, momentem setrvačnosti průřezu vzhledem k ohybové ose $I(x)$ a s příčným zatížením $q(x)$.

Diferenciální rovnici řešte numericky některou (některými) z následujících metod: metoda konečných diferencí (metoda sítí), Ritzova metoda, metoda konečných prvků, konstrukcí kvartického splinu nebo Fourierovou metodou (pomocí vlastních funkcí příslušného diferenciálního operátoru).

Pro konstantní funkce E a I a jednoduchý tvar (tvary) $q(x)$ vyřešte úlohu analyticky. Porovnejte numerické a přesné řešení a spočítejte chybu numerického řešení ve vhodné normě.

Při řešení uvažujte různé typy okrajových podmínek (předepsané funkční hodnoty, resp. hodnoty prvních nebo druhých derivací v krajních bodech intervalu $\langle 0, l \rangle$).

Jako rozšíření úlohy, můžete rovněž zkusit uvažovat některý z modelů podloží (např. Winklerův model).

33. Vliv přeuspořádání na Choleského rozklad řídkých symetrických pozitivně definitních matic - zadal Petr Mayer

Řeší

Cílem je popsat některé metody přeuspořádání řídkých matic a srovnat je s ohledem jednak na celkovou spotřebu paměti počítače, jednak s ohledem na jednoduchost a efektivitu implementace.