

## PŘÍKLADY K MATEMATICE 3

ZDENĚK ŠIBRAVA

### 1. KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

#### 1.1. Křivkový integrál prvního druhu.

**Příklad 1.1.** Vypočítejme křivkový integrál  $\int_C \frac{1}{x-y} ds$ , kde  $C$  je úsečka  $AB$ ,  $A = (0, -2)$ ,  $B = (4, 0)$ .

**Řešení:** Úsečka  $AB$  je hladká křivka. Funkce

$$\psi(t) = (4t, -2 + 2t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

je parametrizace křivky  $C$ . Protože

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

je potom

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ds}{x-y} &= \int_0^1 \frac{1}{4t - (-2 + 2t)} \sqrt{4^2 + 2^2} dt = \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \sqrt{5} [\ln |t+1|]_0^1 = \sqrt{5} \ln 2. \end{aligned}$$

**Příklad 1.2.** Vypočítejme křivkový integrál  $\int_C (x+y) ds$ , kde  $C$  je obvod trojúhelníku  $ABC$ ,  $A = (0, 1)$ ,  $B = (2, 1)$ ,  $C = (0, 3)$ .

**Řešení:**  $C$  není hladká křivka, ale vznikne spojením tří na sebe navazujících křivek  $C_1, C_2, C_3$  (stran trojúhelníku  $ABC$ ), kde

$$C_1 : \quad x = 0 + 2t, \quad y = 1 + 0 \cdot t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

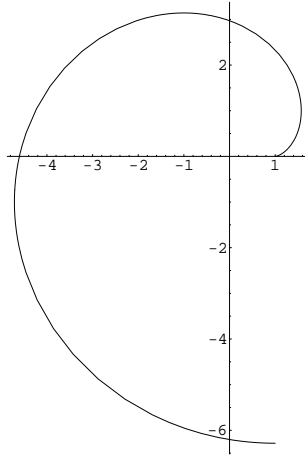
$$C_2 : \quad x = 2 - 2t, \quad y = 1 + 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$C_3 : \quad x = 0 + 0 \cdot t, \quad y = 1 + 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_C (x+y) ds &= \int_0^1 (2t+1)2 dt + \int_0^1 ((2-2t) + (1+2t)) \sqrt{8} dt + \\ &+ \int_0^1 (2t+1)2 dt = 8 + 3\sqrt{8}. \end{aligned}$$

**Příklad 1.3.** Vypočítejme křivkový integrál  $\int_C x^2 ds$ , kde  $C$  je graf funkce  $f(x) = \ln x$ ,  $x \in \langle 1, 2 \rangle$ .



Obr. 1

**Řešení:** Položíme-li  $x = t$ , potom  $y = \ln t$  je  $\psi(t) = (t, \ln t)$ ,  $t \in \langle 1, 2 \rangle$  parametrizace křivky  $C$ . Potom

$$\int_C x^2 ds = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt.$$

Označíme-li  $u = t^2 + 1$  a dále  $du = 2t dt$  dostaneme

$$\int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

**Příklad 1.4.** Vypočítejme křivkový integrál  $\int_C (x^2 + y^2) ds$ , kde  $C$  je křivka (Obr. 1 pro  $a = 1$ ) s parametrizací

$$\psi(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad (a > 0).$$

**Řešení:** Předně je

$$\psi'(t) = (at \cos t, at \sin t) \quad \text{a} \quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(at)^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = at.$$

Potom

$$\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} a^2 ((\cos t + t \sin t)^2 + (\sin t - t \cos t)^2) at dt = 2a^3 \pi^2 (1 + 2\pi^2).$$

**Příklad 1.5.** Vypočítejme křivkový integrál  $\int_C (2\sqrt{x^2 + y^2} - z) ds$ , kde  $C$  je křivka (jeden „závit“ kuželové šroubovice) s parametrizací

$$\psi(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

**Řešení:** Opět nejříve vypočítáme

$$\psi'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1) \quad \text{a} \quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{2 + t^2}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_C \left( 2\sqrt{x^2 + y^2} - z \right) ds &= \int_0^{2\pi} \left( 2\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} - t \right) \sqrt{2 + t^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{3} \left( \sqrt{(2 + 4\pi^2)^3} - 2\sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

V příkladech 1.6 – 1.15 vypočítejte křivkové integrály podél křivky  $C$ .

**Příklad 1.6.**  $\int_C \frac{x+2y+2}{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ , kde  $C$  je úsečka s krajními body  $(1, -1)$ ,  $(4, 0)$ .

**Výsledek:**  $\sqrt{5}(2\sqrt{2} - 1)$ .

**Příklad 1.7.**  $\int_C xy ds$ , kde  $C$  je obvod obdélníku určeného přímkami  $x = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ .

**Výsledek:** 24

**Příklad 1.8.**  $\int_C \frac{x^2}{y} ds$ , kde  $C$  je část paraboly  $y^2 = 2x$ ,  $y \in \langle \sqrt{2}, 2 \rangle$ .

**Výsledek:**  $(25\sqrt{5} - 6\sqrt{3})/30$

**Příklad 1.9.**  $\int_C x^2 y ds$ , kde  $C$  je oblouk kružnice  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) s koncovými body  $(a, 0)$ ,  $(0, a)$ .

**Výsledek:**  $a^4/3$

**Příklad 1.10.**  $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , kde  $C$  je kružnice  $x^2 + y^2 - ax = 0$  ( $a > 0$ ).

**Výsledek:**  $2a^2$

**Příklad 1.11.**  $\int_C |y| ds$ , kde  $C$  je lemniskáta  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  ( $a > 0$ ).

**Výsledek:**  $2a^2(2 - \sqrt{2})$

**Příklad 1.12.**  $\int_C \sqrt{2y} ds$ , kde  $C$  část cykloidy s parametrizací

$\psi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  ( $a > 0$ ).

**Výsledek:**  $4\pi a^{3/2}$

**Příklad 1.13.**  $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2} ds$ , kde  $C$  je šroubovice  $\psi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Výsledek:**  $8\pi^3\sqrt{2}/3$

**Příklad 1.14.**  $\int_C x^2 ds$ , kde  $C$  je průniková křivka ploch  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x - z = 0$ .

**Výsledek:**  $\pi/2$

**Příklad 1.15.**  $\int_C (x + y) ds$ , kde  $C$  je část kružnice  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $y = x$  ( $a > 0$ ), ležící v prvním oktantu.

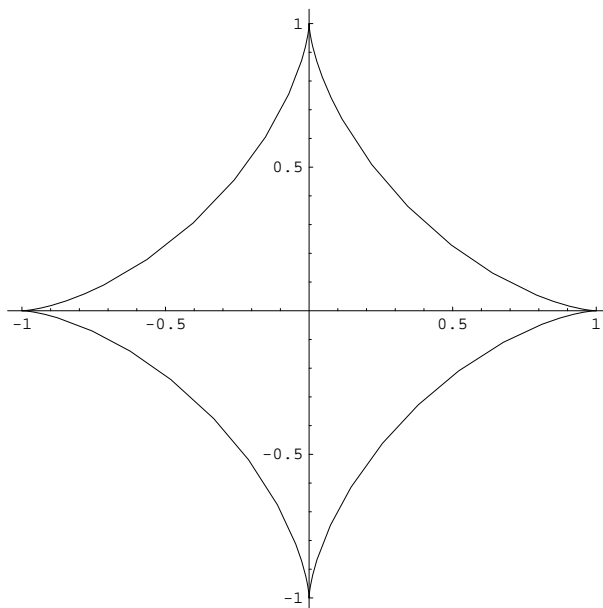
**Výsledek:**  $\sqrt{2}a^2$

## Aplikace křivkového integrálu prvního druhu

### Geometrické aplikace

(I) Nechť  $C$  je jednoduchá křivka. Potom délka této křivky je dána vztahem

$$(1) \quad \int_C ds.$$



Obr. 2

(II) Necht'  $C$  je jednoduchá rovinná křivka (v rovině  $xy$ ),  $f$  je spojitá funkce dvou proměnných nezáporná v bodech křivky  $C$  a

$$\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

je válcová plocha (určená řídicí křivkou  $C$  s přímkami rovnoběžnými s osou  $z$ , zdola omezená křivkou  $C$  a shora průnikem grafu funkce  $z = f(x, y)$  a plochy  $\kappa$ ). Potom pro obsah  $S$  válcové plochy  $\kappa$  platí

$$(2) \quad S = \int_C f(x, y) ds.$$

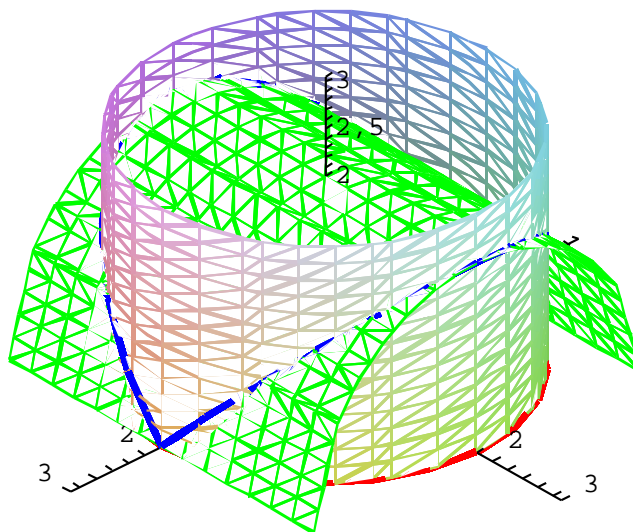
**Příklad 1.16.** Vypočítejme délku asteroidy  $C$  jejíž parametrizace je  $\psi(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$   $a > 0$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Řešení:** Asteroida není hladká křivka, neboť v bodech  $(a, 0)$ ,  $(0, a)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, -a)$  k ní neexistuje tečný vektor. Platí totiž

$$\psi'(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t),$$

a např. pro  $t = 0$  je  $\psi(0) = (a, 0)$  a  $\psi'(0) = (0, 0)$ , tj. v bodě  $(a, 0)$  neexistuje tečný vektor. Analogicky je tomu i v ostatních uvedených bodech. V těchto bodech jsou na křivce body vratu (Obr. 2 pro  $a = 1$ ).

Křivku  $C$  tedy budeme uvažovat jako spojení čtyř jednoduchých křivek, které na sebe navazují. Protože funkce  $F(x, y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{a^2}$  je sudá v proměnné  $x$  i v proměnné  $y$ , je zřejmé, že křivka  $C$  je souměrná podle osy  $y$  i podle osy  $x$  a k výpočtu její délky stačí vypočítat pouze délku její části  $C_1$  ležící v první kvadrantu a její délku pak násobit čtyřmi.



Obr. 3

Nejdříve určíme

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} = 3a \cos t \sin t.$$

Odtud

$$\int_C ds = 4 \int_{C_1} ds = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t dt = 12a \left[ \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a.$$

**Příklad 1.17.** Vypočítejme obsah válcové plochy (Obr.3)

$$\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

**Řešení:**

Podle (2) je obsah válcové plochy roven číslu

$$\int_C f(x, y) ds,$$

kde  $C$  je její řídicí křivka a plocha je zdola omezena rovinou  $z = 0$  a shora grafem funkce  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$ .

Křivka  $C$  (kružnice) je parametrizována funkcí  $\psi(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Potom  $\psi'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$  a odtud

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{4 - x^2} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 4 \cos^2 t} 2 dt = 4 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t} dt = 4 \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi} \sin t dt + 4 \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt = 4 \left( [-\cos t]_0^{\pi} + [\cos t]_{\pi}^{2\pi} \right) = 16. \end{aligned}$$

**Příklad 1.18.** Vypočítejte délku křivky  $C$  s parametrizací  $\psi(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ , jejímiž krajními body jsou  $(0, 0, 0)$ ,  $(3, 3, 2)$ . **Výsledek:** 5

**Příklad 1.19.** Vypočítejte délku křivky  $C$  s parametrizací  $\psi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ . **Výsledek:**  $\sqrt{3}(e-1)$

V příkladech 1.20 – 1.27 vypočítejte obsahy daných válcových ploch.

**Příklad 1.20.**  $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{9x^2}{4} + \frac{4y^2}{9}} \right\}$ . **Výsledek:**  $13\pi$

**Příklad 1.21.**  $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4x^2 + \frac{y^2}{4}} \right\}$ . **Výsledek:**  $5\pi$

**Příklad 1.22.**  $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{2}x^2 \wedge 0 \leq z \leq x + \sqrt{2y} \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$ . **Výsledek:**  $2(2\sqrt{2} - 1)/3$

**Příklad 1.23.**  $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{3}x^3 \wedge 0 \leq z \leq x^3 + 3y \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$ . **Výsledek:**  $(2\sqrt{2} - 1)/3$

**Příklad 1.24.**  $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2\sqrt{x} \wedge 0 \leq z \leq \frac{y}{x+1} \wedge x \in \langle 0, 3 \rangle \right\}$ . **Výsledek:** 4

**Příklad 1.25.**  $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{2y} \wedge 0 \leq z \leq \frac{x}{2y+1} \wedge y \in \langle 0, 4 \rangle \right\}$ . **Výsledek:** 2

**Příklad 1.26.**  $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \ln x \wedge 0 \leq z \leq \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \wedge x \in \langle 1, e \rangle \right\}$ . **Výsledek:**  $1/2$

**Příklad 1.27.**  $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sin x \wedge 0 \leq z \leq \frac{y \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} \wedge x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \right\}$ . **Výsledek:**  $1/2$

### *Fyzikální aplikace*

Nechť  $C$  je jednoduchá hmotná křivka, jejíž hustota v každém jejím bodě  $(x, y, z)$  je  $h(x, y, z)$ .

(I) Hmotnost  $m$  této křivky je

$$(3) \quad m = \int_C h(x, y, z) ds$$

(II) Statický moment této křivky vzhledem k rovině  $xy$ , resp. vzhledem k rovině  $xz$ , resp. vzhledem k rovině  $yz$  je

$$(4) \quad S_{xy} = \int_C zh(x, y, z) ds, \quad S_{xz} = \int_C yh(x, y, z) ds, \quad S_{yz} = \int_C xh(x, y, z) ds.$$

(III) Souřadnice těžiště této křivky (v pravoúhlém souřadnicovém systému) jsou

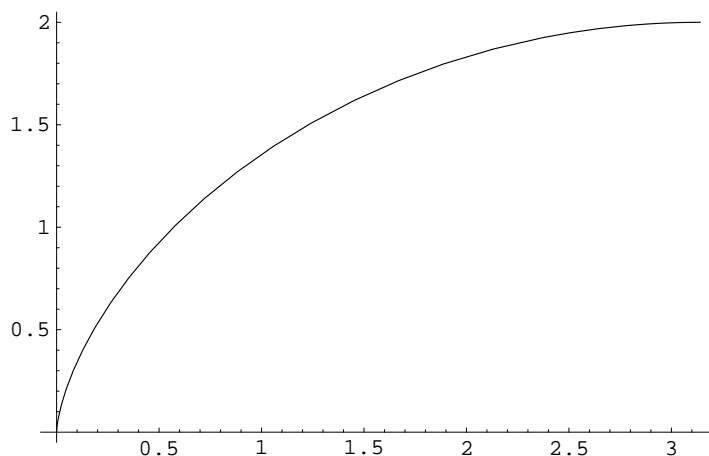
$$(5) \quad x_T = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{S_{xy}}{m}.$$

(IV) Moment setrvačnosti této křivky vzhledem k ose  $x$ , resp. vzhledem k ose  $y$ , resp. vzhledem k ose  $z$  je

$$(6) \quad \begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) h(x, y, z) \, ds, \\ I_y &= \int_C (x^2 + z^2) h(x, y, z) \, ds, \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) h(x, y, z) \, ds. \end{aligned}$$

V případě rovinné křivky platí všechny uvedené vztahy s tím, že  $z = 0$ .

**Příklad 1.28.** Vypočítejme souřadnice těžiště homogenní křivky, jejíž parametrizace je  $\psi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$  (část cykloidy, Obr.4).



Obr. 4

**Řešení:** Podobně jako u ploch a těles budeme i u homogenních křivek předpokládat, že hustota v každém bodě křivky je 1. Souřadnice těžiště jsou na této konstantě nezávislé.

Je

$$\psi'(t) = (1 - \cos t, \sin t) \quad \text{a} \quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2 \sin \frac{t}{2}.$$

Potom

$$m = \int_C ds = \int_0^\pi 2 \sin \frac{t}{2} dt = 4 \left[ -\cos \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 4.$$

Dále

$$\begin{aligned} S_x &= \int_C y \, ds = \int_0^\pi 2(1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} \, dt = 4 \int_0^\pi \frac{1 - \cos t}{2} \sin \frac{t}{2} \, dt = \\ &= 4 \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \, dt = 4 \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} \, dt = 8 \int_0^1 (1 - u^2) \, du = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(při výpočtu integrálu volíme substituci  $u = \cos \frac{t}{2}$ ) a

$$S_y = \int_C x \, ds = \int_0^\pi 2(t - \sin t) \sin \frac{t}{2} \, dt = 2 \left( \int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} \, dt - \int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} \, dt \right) = \frac{16}{3}.$$

(První integrál počítáme metodou per partes, ve druhém po úpravě  $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$  volíme substituci  $u = \sin \frac{t}{2}$ .)

Je tedy

$$x_t = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3}, \quad y_t = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3}.$$

**Příklad 1.29.** Vypočítejte hmotnost části elipsy  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , jestliže její hustota je v každém bodě  $h(x, y) = xy$ . **Výsledek:**  $38/5$

**Příklad 1.30.** Vypočítejte hmotnost jednoho závitů šroubovice s parametrizací  $\psi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ), jestliže její hustota v každém bodě je rovna druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od počátku, tj.  $h(x, y, z) = r^2$ .

**Výsledek:**  $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}(3a^2 + 4\pi^2 b^2)/3$

**Příklad 1.31.** Vypočítejte hmotnost křivky  $C$  s parametrizací  $\psi(t) = (1, t, t^2/2)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ , jestliže její hustota v každém bodě je  $h(x, y, z) = \sqrt{2z}$ .

**Výsledek:**  $(2\sqrt{2} - 1)/3$

**Příklad 1.32.** Vypočítejte hmotnost drátu, který má tvar kružnice  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x + z = 0$ , je-li jeho hustota  $h(x, y, z) = x^2$ .

**Výsledek:**  $\pi/2$

**Příklad 1.33.** Najděte souřadnice těžiště homogenního oblouku cykloidy s parametrizací  $\psi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  ( $a > 0$ ).

**Výsledek:**  $(a\pi, 4a/3)$

**Příklad 1.34.** Najděte souřadnice těžiště homogenního obvodu sférického trojúhelníku  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  ( $a > 0$ ).

**Výsledek:**  $(4a/(3\pi), 4a/(3\pi), 4a/(3\pi))$

**Příklad 1.35.** Drát má tvar kružnice  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ). Vypočítejte jeho moment setrvačnosti vzhledem k jeho průměru, je-li jeho hustota  $h(x, y) = |x| + |y|$ .

**Výsledek:**  $4a^3$

**Příklad 1.36.** Vypočítejte momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám jednoho závitů homogenní šroubovice s parametrizací  $\psi(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Výsledek:**  $I_x = I_y = \sqrt{5}\pi(1 + 32\pi/3)$ ,  $I_z = 2\sqrt{5}\pi$



## 1.2. Křivkový integrál druhého druhu.

**Příklad 1.37.** Nechť  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$  je vektorové pole a  $C$  kladně orientovaná hladká křivka s parametrizací  $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ . Vypočítejme křivkový integrál druhého druhu  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ .

**Řešení:** Připomeňme si nejdříve několik skutečností, které při výpočtu integrálu použijeme.

Je-li  $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  vektorové pole,  $C$  hladká orientovaná křivka s parametrizací  $\boldsymbol{\psi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$  ( $\mathbf{T}$  je její jednotkový tečný vektor), potom

$$(7) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz.$$

Užitím věty o substituci dostaneme

$$(8) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) \, dt.$$

Připomeňme ještě, že v případě rovinného vektorového pole (7) i (8) platí, s tím, že  $R$  a  $z$  jsou nulové.

Nyní se vrátíme k našemu příkladu. Protože  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ , budeme podle (7) počítat integrál

$$\int_C (y^2 - z^2) \, dx + 2yz \, dy - x^2 \, dz,$$

a protože

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2, t^3) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\psi}'(t) = (1, 2t, 3t^2),$$

je podle (8)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2) \, dt = \frac{1}{35}.$$

**Příklad 1.38.** Vypočítejme křivkový integrál  $\int_C (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy$ , kde  $C$  je parabola  $y = x^2$ ,  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  s počátečním bodem  $(-1, 1)$  a koncovým bodem  $(1, 1)$ .

**Řešení:** Křivkový integrál je zadán ve tvaru (7) a  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$  je rovinné vektorové pole. Označíme-li  $x(t) = t$  a  $y(t) = t^2$  je  $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \langle -1, 1 \rangle$  parametrizací křivky  $C$ . Protože  $(-1, 1)$  je počátečním bodem a  $(1, 1)$  koncovým bodem křivky, je křivka při zvolené parametrizaci orientována kladně (je orientována ve směru rostoucího parametru). Dále  $\boldsymbol{\psi}'(t) = (1, 2t)$  a podle (8)

$$\int_C (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy = \int_{-1}^1 ((t^2 - 2t^3) + (t^4 - 2t^3) \cdot 2t) \, dt = -\frac{14}{15}.$$

**Příklad 1.39.** Vypočítejte křivkový integrál  $\int_C (2-y) dx + (1+x) dy$ , kde  $C$  je obvod trojúhelníku s vrcholy  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,2)$  a orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.

**Řešení:** Křivka  $C$  není hladká. Vznikne spojením tří na sebe navazujících křivek (úseček – stran trojúhelníka)  $C_1$ ,  $C_2$  a  $C_3$  s parametrizacemi

$$\begin{aligned} C_1: & \quad \psi(t) = (t, t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \text{kladně orientovaná,} \\ C_2: & \quad \psi(t) = (t, 2-t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \text{záporně orientovaná,} \\ C_3: & \quad \psi(t) = (0, t), \quad t \in \langle 0, 2 \rangle, \quad \text{záporně orientovaná.} \end{aligned}$$

Potom

$$\int_C (2-y) dx + (1+x) dy = \int_0^1 (2-t+1+t) dt - \int_0^1 (2-2+t-1-t) dt - \int_0^2 (1) dt = 2.$$

V příkladech 1.40 – 1.47 vypočítejte křivkové integrály podél křivky  $C$ .

**Příklad 1.40.**  $\int_C y dx + x dy$ , kde  $C$  je čtvrtkružnice  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  ( $a > 0$ ) s počátečním bodem  $(a, 0)$  a koncovým bodem  $(0, a)$ . **Výsledek:** 0

**Příklad 1.41.**  $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , kde  $C$  je křivka  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $x \in \langle 0, 2 \rangle$  s počátečním bodem  $(0, 0)$ . **Výsledek:** 4/3

**Příklad 1.42.**  $\int_C (x^2 + y^2) dy$ , kde křivka  $C$  je obvod obdelníku s vrcholy  $(2, 2)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(2, 4)$  orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů. **Výsledek:** 42

**Příklad 1.43.**  $\int_C \frac{y}{x} dx + x dy$ , kde křivka  $C$  je část hyperboly  $xy = 1$  s počátečním bodem  $(3, 1/3)$  a koncovým bodem  $(1/2, 2)$ . **Výsledek:**  $\ln 6 - 5/3$

**Příklad 1.44.**  $\int_C (2y - 6xy^3) dx + (2x - 9x^2y^2) dy$ , kde  
a)  $C$  je parabola  $y = x^2$  s počátečním bodem  $(0, 0)$  a koncovým bodem  $(1, 1)$ ,  
b)  $C$  je úsečka s počátečním bodem  $(0, 0)$  a koncovým bodem  $(1, 1)$ . **Výsledek:** a)  $-1$ , b)  $-1$

**Příklad 1.45.**  $\int_C yz dx + z\sqrt{a^2 - x^2} dy + yx dz$ , kde  $C$  křivka s parametrizací  $\psi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  ( $a > 0, b > 0$ ) s počátečním bodem  $(a, 0, 0)$  a koncovým bodem  $(a, 0, 2\pi b)$ . **Výsledek:**  $-\pi^2 a^2 b$

**Příklad 1.46.**  $\int_C (x + y + z) dx$ , kde křivka  $C$  je obvod trojúhelníku s vrcholy  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů. **Výsledek:** 0

**Příklad 1.47.**  $\int_C y dx + z dy + x dz$ , kde  $C$  je průniková křivka ploch  $z = xy$  a  $x^2 + y^2 = 1$  orientovaná souhlasně s pořadím bodů  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(-1, 0, 0)$ . **Výsledek:**  $-\pi$

## Aplikace křivkového integrálu druhého druhu

### Fyzikální aplikace

**Příklad 1.48.** Vypočítejme práci silového pole  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ , kterou vykoná posunutím hmotného břemene z bodu  $(-1, 0, e^\pi)$  do bodu  $(1, 0, 1)$  podél křivky  $C$  s parametrizací  $\psi(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ .

**Řešení:** Připomeňme, že práce  $W$  silového pole  $\mathbf{F}$  podél křivky  $C$  je

$$(9) \quad W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz.$$

Křivka  $C$  je parametrizována funkcí  $\psi(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$  a je  $\psi(0) = (1, 0, 1)$  a  $\psi(\pi) = (-1, 0, e^\pi)$ . Protože  $C$  je parametrizována spojitou funkcí, je  $t \in \langle 0, \pi \rangle$ . Po křivce však postupujeme proti rostoucímu parametru, tj. křivka je orientována záporně, a to znamená, že u počítaného křivkového integrálu musíme změnit znaménko. Pro práci silového pole  $\mathbf{F}$  podél křivky  $C$  tedy dostáváme

$$W = - \int_0^\pi (-\sin^2 t + e^t \cos t + e^t \cos t) \, dt = 1 + e^\pi + \frac{\pi}{2}.$$

**Příklad 1.49.** Vypočítejme tok rovinného vektorového pole  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, -2xy)$  uzavřenou kladně orientovanou křivkou  $C$  (kružnicí)  $x^2 + y^2 = 2x$ .

**Řešení:** Podobně jako v předchozím příkladu nejdříve připomeňme, že tok rovinného vektorového pole  $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  uzavřenou kladně orientovanou křivkou  $C$  je ( $\mathbf{n}$  je vnější normála křivky)

$$(10) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C -Q(x, y) \, dx + P(x, y) \, dy.$$

(Symbolem  $\oint$  zdůrazňujeme, že počítáme křivkový integrál přes uzavřenou křivku.)

Pro nalezení toku vektorového pole křivkou  $C$  budeme tedy počítat

$$\oint_C -Q(x, y) \, dx + P(x, y) \, dy = \oint_C 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy.$$

Kružnici  $x^2 + y^2 = 2x$  můžeme parametrizovat funkcí  $\psi(t) = (1 + \cos t, \sin t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Potom

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^{2\pi} (2(1 + \cos t) \sin t (-\sin t) + 2(1 + \cos t) \cos t) \, dt = 0.$$

**Příklad 1.50.** Vypočítejme cirkulaci rovinného vektorového pole

$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$ , podél uzavřené kladně orientované hranice půlkruhu  $x^2 + y^2 \leq 2x$ ,  $y \geq 0$ .

**Řešení:** Cirkulace vektorového pole  $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  podél uzavřené kladně orientované křivky  $C$  je dána křivkovým integrálem

$$(11) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy.$$

V našem případě hranice půlkruhu není hladká křivka. Vznikne však spojením dvou na sebe navazujících křivek  $C_1$ , tj. půlkružnice  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $y \geq 0$ , a  $C_2$ , tj. úsečky spojující body  $(0, 0)$  a  $(2, 0)$ . Je tedy

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Křivku  $C_1$  budeme parametrizovat funkcí  $\psi(t) = (1 + \cos t, \sin t)$ ,  $t \in \langle 1, \pi \rangle$  a křivku  $C_2$  funkcí  $\psi(t) = (t, 0)$ ,  $t \in \langle 0, 2 \rangle$ , přičemž obě křivky jsou orientovány shodně s rostoucím parametrem, tedy kladně. Potom

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_0^\pi (\sin^2 t - \cos t - 1) \sin t dt + \int_0^2 t^2 dt = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2.$$

**Příklad 1.51.** Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole  $\mathbf{F}(x, y) = (0, x^2)$  podél křivky  $y^2 = 1 - x$  s počátečním bodem  $(0, 1)$  a koncovým bodem  $(1, 0)$ .

**Výsledek:**  $-8/15$

**Příklad 1.52.** Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole  $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, 2x)$  podél kladně orientované kružnice  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ).

**Výsledek:**  $\pi a^2$

**Příklad 1.53.** Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  podél lomené čáry spojující body  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  orientované souhlasně s uvedeným pořadím bodů.

**Výsledek:**  $3/2$

**Příklad 1.54.** Na hmotný bod, který se pohybuje po elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) z bodu  $(a, 0)$  do bodu  $(0, b)$  působí síla, jejíž velikost je rovna vzdálenosti bodu od středu elipsy, a která směřuje do středu této elipsy. Vypočítejte práci, kterou pole vykoná při pohybu bodu.

**Výsledek:**  $(a^2 - b^2)/2$

**Příklad 1.55.** Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole  $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$  podél průnikové křivky ploch  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  a  $x + z = 0$  orientované souhlasně s pořadím bodů  $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ .

**Výsledek:**  $0$

V příkladech 1.57 – 1.59 vypočítejte tok, resp. cirkulaci daného vektorového pole křivkou, resp. podél uzavřené křivky  $C$ .

**Příklad 1.56.**  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$  a  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq \sqrt[3]{a^2}$  ( $a > 0$ ) (viz příklad 1.16),  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

**Výsledek:**  $3a^2\pi/10$ , resp.  $0$

**Příklad 1.57.**  $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x-1}{r^2}, \frac{y+1}{r^2}\right)$  ( $r$  je vzdálenost bodu  $(x, y)$  od počátku) a  $C$  je kladně orientovaná kružnice  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ .

**Výsledek:**  $2\pi$ , resp.  $0$

**Příklad 1.58.**  $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, 2x)$  a  $C$  kladně orientované kružnice  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ).

**Výsledek:**  $\pi a^2$ , resp.  $\pi a^2$

**Příklad 1.59.**  $\mathbf{F}(x, y) = (x e^y, e^y)$  a  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny  $y^2 \leq x$ ,  $x \leq 4$ .

**Výsledek:**  $-76e^{-2} - 4e^2$ , resp.  $16e^{-2} + 4e^2$

**Příklad 1.60.** *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná elipsa  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ , ( $a > 0, b > 0$ ).

**Řešení:** Připomeňme, že je-li  $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  rovinné vektorové pole a  $C$  jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, jež tvoří hranici množiny  $M$ , pak podle Greenovy věty platí, že tok tohoto vektorového pole přes hranici množiny  $M$  (tj. křivku  $C$ ) je roven úhrnému množství divergence tohoto pole na  $M$ . Tedy platí

$$(12) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_M \operatorname{div} \mathbf{F} dA,$$

tj.

$$(13) \quad \oint_C -Q(x, y) dx + P(x, y) dy = \int_M \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) dA.$$

Chceme-li nyní použít k výpočtu integrálu  $\oint_{(C)} (x + y) dx - (x - y) dy$  vzorec (13), znamená to, že místo toku vektorového pole  $\mathbf{F}(x, y) = (-(x - y), -(x + y))$  přes křivku  $C$ , můžeme počítat úhrné množství divergence tohoto pole na  $M$ . Protože  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = (-1, -1)$ , je

$$\oint_{(C)} (x + y) dx - (x - y) dy = \int_M (-1 - 1) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2abr dr d\phi = -2ab\pi$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí zobecněných polárních souřadnic.)

**Příklad 1.61.** *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_{(C)} \left( \frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left( \frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dy,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x \right\}.$$

**Řešení:** Protože počítaný křivkový integrál nám opět představuje levou stranu ve vzorci (13), je

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}, -\frac{1}{x} - 2xy + \frac{y^3}{3} \right).$$

Odtud

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = (2x + x^2, -2x + y^2).$$

Podle vzorce (13) pak dostáváme

$$\begin{aligned} \oint_{(C)} \left( \frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left( \frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dy = \\ = \int_M (x^2 + y^2) dA = \int_2^3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} r^3 d\phi dr = \frac{65}{24}\pi. \end{aligned}$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí polárních souřadnic.)

**Příklad 1.62.** Vypočítejme obsah plochy omezené jedním obloukem cykloidy s parametrizací  $\psi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$  ( $a > 0$ ),  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a osou  $x$ .

**Řešení:** Jednoduchým důsledkem Greenovy věty je vzorec pro výpočet míry (obsahu) množiny  $M$  ohraničené uzavřenou kladně orientovanou křivkou  $C$ . Zvolíme-li např.

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right), \quad \text{je} \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

a podle vzorce (13) je

$$(14) \quad \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy = \int_M \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA = \int_M dA = \mu(M).$$

Obecně stačí, zvolíme-li si libovolné rovinné vektorové pole  $\mathbf{F}$ , jehož  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$ . Zvolíme-li např.  $\mathbf{F}(x, y) = (x, 0)$  a z (13) dostáváme další vztah pro výpočet míry množiny

$$(15) \quad \oint_C x dy = \int_M 1 \cdot dA = \int_M dA = \mu(M).$$

V našem případě je hranice množiny  $M$  tvořena dvěma jednoduchými na sebe navazujícími křivkami  $C_1$  a  $C_2$ , kde  $C_1$  je část osy  $x$  mezi body  $(0, 0)$  a  $(2a\pi, 0)$  a  $C_2$  je oblouk cykloidy vycházející z bodu  $(2a\pi, 0)$  a vracující se do bodu  $(0, 0)$ . Hranice je pak při takto zvolené orientaci orientována kladně. (Připomeňme jednoduché pravidlo pro určení orientace uzavřené křivky - hranice množiny: Procházíme-li křivkou ve směru zvolené orientace a máme-li uzavřenou množinu po levé ruce, je křivka orientována kladně. V případě, že množina je po pravé ruce, je křivka orientována záporně.) Je tedy

$$\mu(M) = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \oint_{C_1} -y dx + x dy + \frac{1}{2} \oint_{C_2} -y dx + x dy.$$

Křivku  $C_1$  parametrizujeme funkcí  $\psi(t) = (t, 0)$ ,  $t \in \langle 0, 2a\pi \rangle$ . Snadno zjistíme, že

$$\frac{1}{2} \oint_{C_1} -y dx + x dy = 0.$$

Křivka  $C_2$  je parametrizována funkcí  $\psi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Protože jsme hranici množiny orientovali kladně, postupujeme po křivce  $C_2$  proti rostoucímu parametru, a to znamená, že při výpočtu druhého integrálu musíme u tohoto integrálu změnit znaménko. Je tedy po úpravě

$$\frac{1}{2} \oint_{C_2} -y dx + x dy = -\frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (-2 + 2 \cos t + t \sin t) dt = 3a^2\pi,$$

a tedy

$$\mu(M) = 3a^2\pi.$$

**Příklad 1.63.** Užitím Stokesovy věty v rovině vypočítejme křivkový integrál

$$\oint_{(C)} \left( \frac{1}{x} - x^2y + 2xy e^{x^2y} \right) dx + \left( xy^2 - \frac{1}{y} + x^2 e^{x^2y} \right) dy,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná část lemniskáty  $(x^2 + y^2)^2 = xy$ ,  $(x \geq 0, y \geq 0)$ .

**Řešení:** Připomeňme, že je-li  $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  rovinné vektorové pole a  $C$  jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka jež tvoří hranici množiny  $M$ , potom pro cirkulaci a rotaci tohoto pole platí ( $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ )

$$(16) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_M \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA,$$

tj.

$$(17) \quad \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_M \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dA.$$

Předně je

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2x e^{x^2y} + 2x^3y e^{x^2y} - x^2, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2x e^{x^2y} + 2x^3y e^{x^2y} + y^2.$$

Potom podle (17) je

$$\oint_C \left( \frac{1}{x} - x^2y + 2xy e^{x^2y} \right) dx + \left( xy^2 - \frac{1}{y} + x^2 e^{x^2y} \right) dy = \int_M (y^2 + x^2) dA,$$

kde  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) \leq xy \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ . Použitím substituce pomocí polárních souřadnic (??) pak dostaneme

$$\int_M (y^2 + x^2) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\cos \phi \sin \phi}} r^3 dr d\phi = \frac{\pi}{64}.$$

V příkladech 1.64 – 1.73 vypočítejte křivkové integrály pomocí Greenovy věty.

**Příklad 1.64.**  $\int_C (2e^{2x} \sin y - 3y^3) dx + (e^{2x} \cos y + \frac{4}{3}x^3) dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná křivka  $4x^2 + 9y^2 = 36$ . **Výsledek:**  $108\pi$

**Příklad 1.65.**  $\int_C (\cos x \ln y + 2e^{2x} y^2) dx + \left( \frac{\sin x}{y} + 2e^{2x} y + \frac{4}{3}x^3 \right) dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná křivka  $4x^2 + y^2 = 4$ . **Výsledek:**  $2\pi$

**Příklad 1.66.**  $\int_C (e^x \ln y - y^2x) dx + \left( \frac{e^x}{y} - \frac{1}{2}x^2y \right) dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná křivka  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ . **Výsledek:**  $4\pi$

**Příklad 1.67.**  $\int_C (e^x \sin y - xy^2) dx + (e^x \cos y - \frac{1}{2}x^2y) dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná křivka  $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$ . **Výsledek:**  $4\pi$

**Příklad 1.68.**  $\int_C (2xy + y^2) dx + (x^2 + 3xy) dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$ . **Výsledek:** 0

**Příklad 1.69.**  $\int_C (xy + y^2) dx + (x^2 + 2xy) dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\}$ . **Výsledek:** 0

**Příklad 1.70.**  $\int_C e^x(1 - \cos y) dx - e^x(y - \sin y) dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, \pi \rangle \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{\sin x}\}$ . **Výsledek:**  $-(e^\pi + 1)/4$

**Příklad 1.71.**  $\int_C \frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \arctg \frac{x}{y} dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ . **Výsledek:**  $\frac{1}{12}\pi \ln 2$

**Příklad 1.72.**  $\int_C y^3 dx - x^3 dy$ , kde  $C$  je kladně orientovaná hranice množiny  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\}$  ( $a > 0$ ). **Výsledek:**  $-\frac{3}{32}\pi a^4$

**Příklad 1.73.**  $\int_C (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy$ , kde  $C$  je půlkružnice  $x^2 + y^2 = ax$  ( $a > 0$ ),  $y \leq 0$  s počátečním bodem  $(0, 0)$  a koncovým bodem  $(a, 0)$ . [Návod: Doplňte křivku  $C$  úsečkou spojující počáteční koncový bod půlkružnice na uzavřenou křivku.] **Výsledek:**  $-\pi a^2/8$

V příkladech 1.64 – 1.73 vypočítejte křivkové integrály pomocí Stokesovy věty v rovině.

**Příklad 1.74.** Pomocí křivkového integrálu odvoďte vztah pro výpočet obsahu kruhu o poloměru  $R$ .

**Příklad 1.75.** Pomocí křivkového integrálu vypočítejte obsah plochy omezené křivkami  $x = y^2$  a  $x = 4$ .

**Výsledek:** 32/3

**Příklad 1.76.** Pomocí křivkového integrálu vypočítejte obsah plochy omezené křivkami  $x = y^3$ ,  $x = 8$  a  $y = 0$ .

**Výsledek:** 12

**Příklad 1.77.** Vypočítejte obsah plochy ohraničené smyčkou Descartesova listu  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  ( $a > 0$ ) s parametrizací  $\psi(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$ ,  $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ .

**Výsledek:**  $3a^2/2$

**Příklad 1.78.** Vypočítejte obsah plochy ohraničené lemniskátou  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  ( $a > 0$ ).

**Výsledek:**  $2a^2$



**Příklad 1.79.** Vypočítejte obsah plochy ohraničené asteroidou s parametrizací  $\psi(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$  ( $a > 0$ ),  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . **Výsledek:**  $3\pi a^2/8$

**Příklad 1.80.** Vypočítejte obsah plochy ohraničené srdcovkou s parametrizací  $\psi(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . **Výsledek:**  $6\pi$

### 1.3. Konzervativní pole.

**Příklad 1.81.** Vypočítejme křivkový integrál  $\int_C (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ , kde  $C$  je křivka spojující body  $(-2, -1)$  a  $(3, 0)$ .

**Řešení:** Nejdříve ukážeme, že rovinné vektorové pole

$\mathbf{F}(x, y) = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$  je v  $\mathbb{R}^2$  nerotační, tj. že platí

$$(18) \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

Platí

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 12xy^2, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 12xy^2$$

a podmínka (18) je splněna. To znamená, že pole  $\mathbf{F}$  je nerotační a je v  $\mathbb{R}^2$  potenciální (konzervativní). Počítaný integrál je tedy nezávislý na cestě a je na nás, jakou křivku  $C$  spojující body  $(-2, -1)$  a  $(3, 0)$  si zvolíme. Zvolme v našem případě  $C$  jako lomenou čáru složenou ze dvou úseček  $C_1$  a  $C_2$  spojující body  $(-2, -1)$ ,  $(3, -1)$  a  $(3, 0)$ . Jejich parametrizace jsou

$$\begin{aligned} C_1: & \quad x = t, \quad y = -1, \quad t \in \langle -2, 3 \rangle, \\ C_2: & \quad x = 3, \quad y = t, \quad t \in \langle -1, 0 \rangle. \end{aligned}$$

Potom

$$\int_C (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy = \int_{-2}^3 (t^4 - 4t) dt + \int_{-1}^0 (54t^2 - 5t^4) dt = 62.$$

**Příklad 1.82.** Vypočítejme křivkový integrál  $\int_C yz dx + (2 + xz) dy + (xy - 1) dz$ , kde  $C$  je křivka spojující body  $(-1, -1, -1)$  a  $(1, 1, 1)$ .

**Řešení:** Vektorové pole  $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, 2 + xz, xy - 1)$  je v  $\mathbb{R}^3$  nerotační. Platí totiž

$$\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}$$

a vektorové pole  $\mathbf{F}$  je potenciální a počítaný integrál je nezávislý na cestě. Zvolme tentokrát za křivku  $C$  úsečku spojující body  $(-1, -1, -1)$  a  $(1, 1, 1)$ . Její parametrizace je  $\psi(t) = (-1 + 2t, -1 + 2t, -1 + 2t)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ . Potom

$$\begin{aligned} & \int_C yz dx + (2 + xz) dy + (xy - 1) dz = \\ & = \int_0^1 ((-1 + 2t)^2 + (2 + (-1 + 2t)^2) + ((-1 + 2t)^2 - 1)) 2 dt = 4. \end{aligned}$$

**Poznámka 1.83.** V případě, že křivkový integrál je nezávislý na cestě a křivka  $C$  je libovolná křivka s počátečním bodem  $A$  a koncovým bodem  $B$ , je zvykem místo  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$  psát  $\int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ . Dále je třeba si uvědomit, že křivka  $C \subseteq M$ , kde  $M$  je množina, na které je  $\mathbf{F}$  potenciální.

**Příklad 1.84.** Vypočítejme práci, kterou vykoná rovinné vektorové pole  $\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y, \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x \right)$  posunem hmotného břemene z bodu  $A = (0, 0)$  do bodu  $B = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .

**Řešení:** Ukážeme nejdříve, že pole  $\mathbf{F}$  je na množině  $M = (-1, 1) \times (-1, 1)$  potenciální. Je

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

tj. pole je nerotační a vektorové pole  $\mathbf{F}$  je na množině  $M$  potenciální. Dále víme, že práce, kterou vykoná vektorové pole podél křivky  $C$  (křivka  $C$  musí ležet v  $M$ ) je dána křivkovým integrálem

$$(19) \quad W = \int_C \left( \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y \right) dx + \left( \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x \right) dy.$$

Protože pole  $\mathbf{F}$  je potenciální, existuje skalární pole  $f$  (potenciál pole  $\mathbf{F}$ ) takové, že  $\mathbf{F} = \nabla f$ , a platí

$$W = f(B) - f(A).$$

Potenciál  $f$  budeme hledat analogickou metodou, kterou jsme řešili exaktní diferenciální rovnice.

Podle předpokladu je

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y, \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x \right),$$

tedy

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y.$$

Integrací této rovnice podle  $x$  dostaneme

$$f(x, y) = y \arcsin x + x \arcsin y + \varphi(y),$$

kde  $\varphi(y)$  je integrační konstanta, která ovšem může být funkcí  $y$ . Derivováním  $f$  podle  $y$  dostaneme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x + \varphi'(y).$$

Podle předpokladu je ale také

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x.$$

Odtud pak

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c,$$

kde  $c$  je libovolná konstanta (můžeme položit  $c = 0$ ). Je tedy

$$f(x, y) = y \arcsin x + x \arcsin y$$

a

$$W = f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) - f(0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

**Příklad 1.85.** Vypočítejme práci, kterou vykoná prostorové vektorové pole  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z^3 + z, 2xyz^3 - z, 3xy^2z^2 + x - y)$  posunem hmotného břemene z bodu  $A = (1, 1, 1)$  do bodu  $B = (-2, 1, -1)$ .

**Řešení:** Podobně jako v předchozím příkladě ukážeme, že pole  $\mathbf{F}$  je v  $\mathbb{R}^3$  nerotační, tedy, že je potenciální. Je

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} &= \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} = 6xyz^2 - 1, \\ \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} &= \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} = 3y^2z^2 + 1, \\ \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = 2yz^3. \end{aligned}$$

Existuje tedy skalární pole  $f$  (potenciál pole  $\mathbf{F}$ ) takové, že  $\mathbf{F} = \nabla f$ , a platí

$$W = f(B) - f(A).$$

Potenciál  $f$  budeme opět hledat analogicky stejnou metodou jako v předchozím příkladu.

Podle předpokladu je

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2z^3 + z, 2xyz^3 - z, 3xy^2z^2 + x - y),$$

tedy

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = y^2z^3 + z \Rightarrow f(x, y, z) = xy^2z^3 + zx + \varphi_1(y, z),$$

kde  $\varphi_1(y, z)$  je integrační konstanta, která ovšem může být funkcí  $y$  a  $z$ . Derivováním  $f$  podle  $y$  dostaneme

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 2xyz^3 + \frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial y}.$$

Je ale také

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z) = 2xyz^3 - z.$$

Odtud pak

$$\frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial y} = -z \Rightarrow \varphi_1(y, z) = -zy + \varphi_2(z),$$

kde  $\varphi_2(z)$  je integrační konstanta, která však už může být funkcí pouze  $z$ . Pro funkci  $f$  tedy dostáváme

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + zx - yz + \varphi_2(z).$$

Nyní derivováním  $f$  podle  $z$  dostaneme

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 3xy^2z^2 + x - y + \varphi_2'(z),$$

a protože je také

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z) = 3xy^2z^2 + x - y,$$

dostáváme

$$\varphi_2'(z) = 0 \Rightarrow \varphi_2(z) = c,$$

kde  $c$  je libovolná konstanta (můžeme položit  $c = 0$ ).

Je tedy

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + zx - yz$$

a pro velikost vykonané práci  $W$  dostáváme (v příslušných jednotkách)

$$W = f(B) - f(A) = 5 - 1 = 4.$$

**Příklad 1.86.** Vypočítejte křivkový integrál  $\int_C \left(\frac{y}{x} + y^2\right) dx + (\ln x + 2xy) dy$ , kde  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = (1, 1)$  a koncovým bodem  $B = (2, 3)$ .

**Výsledek:**  $3 \ln 2 + 17$

**Příklad 1.87.** Vypočítejte křivkový integrál  $\int_C (2x \ln y - y) dx + \left(\frac{x^2}{y} - x\right) dy$ , kde  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = (1, 1)$  a koncovým bodem  $B = (3, 2)$ .

**Výsledek:**  $9 \ln 2 - 5$

**Příklad 1.88.** Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C (3x^2y^2 + y^2) dx + (2x^3y + 2xy + 1) dy$ , kde  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = (1, -1)$  a koncovým bodem  $B = (2, 1)$ .

**Výsledek:** 10

**Příklad 1.89.** Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C (2xy^3 + y^2 + 1) dx + (3x^2y^2 + 2xy) dy$ , kde  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = (-1, -1)$  a koncovým bodem  $B = (2, 1)$ .

**Výsledek:** 11

**Příklad 1.90.** Ukažte, že vektorové pole  $F(x, y) = \left(\frac{y}{1+x^2} + \operatorname{arctg} y, \frac{x}{1+y^2} + \operatorname{arctg} x\right)$  je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu  $A = (0, 0)$  do bodu  $B = (1, 1)$ .

**Výsledek:**  $f(x, y) = y \operatorname{arctg} x + x \operatorname{arctg} y, W = \pi/2$

**Příklad 1.91.** Ukažte, že vektorové pole

$F(x, y) = (2x \sin y - y \sin x, \cos x + x^2 \cos y)$  je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu  $A = (0, 0)$  do bodu  $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Výsledek:**  $f(x, y) = x^2 \sin y + y \cos x, W = \pi^2/4$

**Příklad 1.92.** Ukažte, že vektorové pole

$F(x, y) = (\sin y - y^2 \sin x, x \cos y + 2y \cos x)$  je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu  $A = (0, 0)$  do bodu  $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Výsledek:**  $f(x, y) = x \sin y + y^2 \cos x, W = \pi/2$

**Příklad 1.93.** Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$ , kde  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = (1, 1, 1)$  a koncovým bodem  $B = (-1, 2, -2)$ . **Výsledek:**  $-22/3$

**Příklad 1.94.** Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C \left(2xz + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x+z}{y^2} dy + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right) dz$ , kde  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = (-1, 3, -2)$  a koncovým bodem  $B = (1, 2, 3)$ . **Výsledek:** 8

**Příklad 1.95.** Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C 3x^2y^2z dx + (2x^3yz - z^2) dy + (x^3y^2 - 2yz + 3z^2) dz$ , kde  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = (-1, 3, 0)$  a koncovým bodem  $B = (0, 1, 2)$ .

**Výsledek:** 4

**Příklad 1.96.** Ukažte, že vektorové pole

$F(x, y, z) = \left(\ln yz + 2xy, \frac{x}{y} + x^2 + z, \frac{x}{z} + y\right)$  je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu  $A = (1, 1, 1)$  do bodu  $B = (2, 1, 2)$ .

**Výsledek:**  $f(x, y, z) = x \ln yz + x^2y + zy$ ,  $W = 2 \ln 2 + 4$

**Příklad 1.97.** Ukažte, že vektorové pole

$F(x, y, z) = \left(\arctg yz + z, \frac{xz}{1+y^2z^2} + z^2, \frac{xy}{1+y^2z^2} + x + 2yz + 1\right)$  je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu  $A = (1, 0, -1)$  do bodu  $B = (1, 1, \sqrt{3})$ .

**Výsledek:**  $f(x, y, z) = x \arctg yz + xz + yz^2 + z$ ,  $W = \pi/3 + 5 + 2\sqrt{3}$