

Rovnice zatížení prutu

Doprovodné materiály k přednáškám
<http://mat.fsv.cvut.cz/Bubenik/>

Předmět: Matematika 3

(Důležité: materiály slouží jako doplňkové k přednáškám, nejsou určeny jako samostatné učební texty)

Okrajová úloha

Homogenní prut délky ℓ z pružného materiálu, konstantní průřez, prostě uložený, namáhaný na vzpěr silou P , ($P > 0$ tlaková), v kolmém směru: rovnoměrné zatížení q (na jednotku délky).

Ohybový moment úměrný křivosti, malé deformace, křivost $\approx$ druhá derivace

$$M = -cy'', \quad c = EI, \quad \boxed{y'' = -\frac{M}{EI}}$$

Rovnice

$$y'' = -\frac{P}{EI}y + \frac{q}{2EI}x^2 - \frac{q\ell}{2EI}x$$

$$y'' + a^2y = r(x), \tag{1}$$

kde

$$a^2 = \frac{P}{EI}, \quad a > 0, \quad r(x) = \frac{q}{2EI}x^2 - \frac{q\ell}{2EI}x$$

Okrajové podmínky: $y(0) = 0$, $y(\ell) = 0$ (Dirichletova úloha).

- Poznámka: nelinearity nehomogeností, rovnice

$$-[\alpha(x)y']' + \beta(x)y = \gamma(x)$$

+ okrajové podmínky

Řešení okrajové úlohy (1):

$$y'' + a^2 y = 0$$

Charakteristická rovnice:

$$\alpha^2 + a^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \pm a i$$

$$y_H = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

Pravá strana ve speciálním tvaru: $r(x) = bx^2 + cx$, kde $b = \frac{q}{2EI}$, $c = -\frac{q\ell}{2EI}$.

Partikulární řešení: $y_p = Bx^2 + Cx + D$,

$$y_p' = 2Bx + C,$$

$$y_p'' = 2B,$$

Dosazení: $2B + a^2(Bx^2 + Cx + D) = bx^2 + cx$

Odtud:

$$a^2 B = b \Rightarrow B = \frac{b}{a^2}$$

$$a^2 C = c \Rightarrow C = \frac{c}{a^2}$$

$$2B + a^2 D = 0 \Rightarrow D = -\frac{2B}{a^2} = -\frac{2b}{a^4}$$

Obecný integrál:

$$y(x) = \frac{b}{a^2} x^2 + \frac{c}{a^2} x - \frac{2b}{a^4} + C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

Dosazení o. p.:

$$0 = -\frac{2b}{a^4} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{2b}{a^4}.$$

$$0 = \frac{b}{a^2} \ell^2 + \frac{c}{a^2} \ell - \frac{2b}{a^4} + \frac{2b}{a^4} \cos a\ell + C_2 \sin a\ell.$$

Po úpravě: (speciálně platí pro prut vztah $c = -b\ell$)

$$0 = -\frac{2b}{a^4} + \frac{2b}{a^4} \cos a\ell + C_2 \sin a\ell.$$

Je-li $\boxed{\sin a\ell \neq 0} \Rightarrow C_2 = \frac{2b}{a^4} \frac{1 - \cos a\ell}{\sin a\ell}.$

Řešení průhybu prutu:

$$y(x) = \frac{b}{a^2} x^2 + \frac{c}{a^2} x + \frac{2b}{a^4} (\cos ax - 1) + \frac{2b}{a^4} \frac{1 - \cos a\ell}{\sin a\ell} \sin ax.$$

$\boxed{\sin a\ell = 0} : \quad a\ell = k\pi, k = 1, 2, \dots$

Existuje řešení??? Jak kdy: někdy ano, někdy ne...

$a\ell = \pi : \cos \pi = -1$

$$0 = \frac{2b}{a^4} (\cos a\ell - 1) + C_2 \sin a\ell$$

$$0 = \frac{2b}{a^4} (-1 - 1) + C_2 \cdot 0$$

$$0 = -\frac{4b}{a^4} + C_2 \cdot 0$$

nelze splnit pro žádné C_2 , nelze splnit podmínka $y(\ell) = 0$, úloha nemá řešení.

Jak si to vysvětlit technicky???

$$a\ell = \pi \Rightarrow a^2 \ell^2 = \pi^2 \Rightarrow \frac{P}{EI} \ell^2 = \pi^2 \Rightarrow P = \frac{EI \pi^2}{\ell^2}$$

v pružnosti tzv. kritická síla $P_{kr} = \frac{EI\pi^2}{\ell^2}$

$P < P_{kr}$ jednoznačné řešení

$P \rightarrow P_{kr}??$ "těsně" blízko...

průhyb "nekonečný" $\Rightarrow$ porušení pevnosti materiálu $\Rightarrow$ destrukce prutu.

$$a\ell = 2\pi : \cos 2\pi = 1$$

$$0 = \frac{2b}{a^4}(\cos a\ell - 1) + C_2 \sin a\ell$$

$$0 = \frac{2b}{a^4}(1 - 1) + C_2 \cdot 0$$

$$0 = C_2 \cdot 0$$

je splněno pro každé C_2 , podmínka $y(\ell) = 0$ platí vždy, úloha má nekonečně mnoho řešení.

Ve vyjádření průhybu neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, může nastat cokoliv...

Kritická síla P_{kr} nezávisí na tom, jak je prut zatížen z kolmého směru ("ze strany", nosný sloup)

Prut nezatížený z kolmého směru: $q = 0$

$$y'' + a^2 y = 0, \quad y(0) = y(\ell) = 0$$

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

$$C_1 = 0, \quad y = C_2 \sin ax$$

Je důvod, proč by se měl prut prohnout???... P_{kr} zde hraje také svou roli...

$\sin a\ell \neq 0$: $y(x) = 0$

$\sin a\ell = 0$: C_2 libovolné

$P \rightarrow P_{kr}$ v případě $q = 0$: Průhyb "neurčitý", tj. prut nestabilní.

Po technické stránce "kritické" zatížení nosných sloupů: ve vertikální poloze, "nese" konstrukci, zatížení ze strany nulové.

$P \approx P_{kr}$ průhyb může zůstat nulový, ale nepatrné zatížení "ze strany", závan větru...?, ...destrukce.

Vlastní čísla a vlastní funkce úlohy

$$y'' + \lambda y = 0,$$

+o. p., např. $y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0$.