

Poznámky k první písemce

Výpočet potenciálu v prvním příkladu nečinil větší potíže, sem tam se objevila chyba v derivaci při výpočtu rotace vektorového pole, případně někdo zapomněl ověřit správnost potenciálu výpočtem jeho gradientu. Masově se zapomínalo na podmínku jednoduše souvislé oblasti, ale to byla drobnost.

Horší to bylo s dalšími dvěma příklady. Při výpočtu toku vektorového pole uzavřenou oblastí sice naprostá většina řešitelů přešla k aplikaci Gaussovy - Ostrogradského věty, ale nesestavila správně trojný integrál.

Připomeňme podmínky definující těleso W :

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad (1)$$

$$1 - x^2 - y^2 \geq z, \quad (2)$$

$$-1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \quad (3)$$

$$x \geq 0, \quad (4)$$

$$y \geq 0. \quad (5)$$

Základem tělesa W je válec (1) shora zakončený částí rotačního paraboloidu (2) a zdola zakončený kuželem (3). Těleso W je čtvrtina, viz (4) a (5), tohoto upraveného válce. Jelikož základem pro W je válec, zvolíme cylindrické souřadnice

$$x = r \cos \varphi, \quad (6)$$

$$y = r \sin \varphi, \quad (7)$$

$$J = r. \quad (8)$$

Dosazením (6) a (7) do (2) a (3) obdržíme

$$-1 - r \leq z \leq 1 - r^2. \quad (9)$$

Z nezápornosti r a dosazením (6) a (7) do (1) dostaneme

$$r \in [0, 1]. \quad (10)$$

Z (6) a (4) plyne $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, z (7) a (5) plyne $\varphi \in [0, \pi]$, celkem tedy

$$\varphi \in [0, \pi/2], \quad (11)$$

ale to se dá odvodit přímo z kartézských souřadnic a (4) a (5) (první kvadrant v rovině xy).

Připomeňme, že $\mathbf{F} = (x^2, xy^3, yz)$. Nyní již můžeme integrovat s využitím (11), (10),

(9) a (6)–(8)

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_W (3xy^2 + 2x + y) \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{-1-r}^{1-r^2} (3r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 2r \cos \varphi + r \sin \varphi) r \, dz \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (3r^4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r^2(2 \cos \varphi + \sin \varphi)) [z]_{-1-r}^{1-r^2} dr \, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (3 \cos \varphi \sin^2 \varphi (2r^4 + r^5 - r^6) + (2 \cos \varphi + \sin \varphi) (2r^2 + r^3 - r^4)) dr \, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^1 (2r^4 + r^5 - r^6) \, dr \\
&\quad + \int_0^{\pi/2} (2 \cos \varphi + \sin \varphi) \, d\varphi \int_0^1 (2r^2 + r^3 - r^4) \, dr \\
&= [\sin^3 \varphi]_0^{\pi/2} \left[\frac{2r^5}{5} + \frac{r^6}{6} - \frac{r^7}{7} \right]_0^1 + [2 \sin \varphi - \cos \varphi]_0^{\pi/2} \left[\frac{2r^3}{3} + \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 \\
&= 1 \cdot \left[\frac{2}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right] + (2 + 1) \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right] = \frac{84 + 35 - 30}{210} + 3 \cdot \frac{40 + 15 - 12}{60} \\
&= \frac{89}{210} + \frac{43}{20} = \frac{178 + 903}{420} = \frac{1081}{420}.
\end{aligned}$$

Nasnáze způsobil i křivkový integrál. Křivka je zadána podmínkami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (12)$$

$$x = y, \quad (13)$$

$$x \geq 0, \quad (14)$$

$$z \geq 0, \quad (15)$$

kde (12) odpovídá jednotkové sféře a (13) rovině obsahující osu z a mající s rovinou xy společnou osu prvního a třetího kvadrantu roviny xy . Průnikem sféry a roviny (13) je kružnice. Podmínky (13) – (15) upřesňují, že křivku tvoří jen čtvrtina kružnice tvořená body, jejichž všechny souřadnice jsou nezáporné. Orientace je zadaná od bodu $[0, 0, 1]$ do bodu $[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0]$.

Tady se sice přímo nabízí parametrizace pomocí $t \in [0, \sqrt{2}/2]$

$$\begin{aligned}
x &= t, & dx &= dt, \\
y &= t, & dy &= dt, \\
z &= \sqrt{1 - 2t^2}, & dz &= -\frac{2t}{\sqrt{1 - 2t^2}} dt,
\end{aligned}$$

která je dokonce souhlasná se zadanou orientací křivky, ale zároveň do výpočtu přináší výraz s odmocninou, a výrazy s odmocninami často vedou k potížím. Nejinak je tomu i tady. Při zavedení substituce do výchozího integrálu $\int_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ s vektorovým polem

$$\mathbf{F} = \left(x^3 z, \frac{2y}{2x^2 + 1}, y \right) \quad (16)$$

dospějeme k integraci součtu tří výrazů. Dva z nich lze integrovat dosti snadno, avšak u třetího neznám jednoduchý integrační postup, vhodná substituce je hodně speciální. Ale i za první dva integrály bylo dost bodů.

Jelikož křivka leží na sféře (s poloměrem jedna), nabízí se cesta k parametrizaci přes sférické souřadnice. Křivku tvoří část poledníku daného úhlem $\lambda = \pi/4$, neboť

$$(13) \Rightarrow \cos \lambda \cos \varphi = \sin \lambda \cos \varphi \Rightarrow \cos \lambda = \sin \lambda \Rightarrow \lambda = \pi/4. \quad (17)$$

Zároveň z $\cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dostáváme vztah pro x a y , z je dáno přímo z definice sférických souřadnic¹

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, \quad z = \cos \varphi. \quad (18)$$

Odvodili jsme parametrizaci

$$\Psi(\varphi) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi, \sin \varphi \right), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

je nesouhlasná s orientací křivky. Tečný vektor křivky daný parametrizací je

$$\Psi'(\varphi) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, \cos \varphi \right).$$

Složením pole (16) a parametrizace Ψ dostáváme

$$\mathbf{F}(\Psi(\varphi)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cos^3 \varphi \sin \varphi, \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + 1}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \right).$$

Nyní již můžeme zahájit výpočet, využijeme v něm nesouhlasnost parametrizace, $\cos^3 \varphi = \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi)$, $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$ a substituce $u = \cos \varphi$ a $v = \sin \varphi$

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= - \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\Psi(\varphi)) \cdot \Psi'(\varphi) \, d\varphi \\ &= - \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{4} \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 \varphi \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \cos 2\varphi) \right) d\varphi \\ &\quad - \int_1^0 \frac{u}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - v^2) v^2 dv - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} [\sin 2\varphi]_0^{\pi/2} \right) + \frac{1}{2} [\ln(u^2 + 1)]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{v^3}{3} - \frac{v^5}{5} \right]_0^1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{30} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln 2, \end{aligned}$$

prohození mezí v integrálu $-\int_1^0 \frac{u}{u^2+1} du$ vedlo ke změně znaménka před tímto integrálem.

¹Případně z (12) odvodíme $z^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi \Rightarrow |z| = |\cos \varphi| \Rightarrow z = \cos \varphi$. Absolutní hodnoty se zbavíme díky (15) a faktu, že z definice sférických souřadnic plyne $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Poznámky k druhé písemce

Kupodivu výpočet potenciálu vektorového pole

$$\mathbf{f} = \left(\frac{-2x^2z^3 + y^2}{x}, y(2z^2 + 2\ln(xy) + 1), -3x^2z^2 - 9\cos^3(3z) + 2y^2z + 9\cos(3z) \right)$$

nedopadl moc dobře, ačkoli to měl být hlavní zdroj bodů.

Už definiční obor

$$D_{\mathbf{f}} = (-\infty, 0) \times (-\infty, 0) \times (-\infty, \infty) \cup (0, \infty) \times (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$$

byl opomíjen nebo jen částečně určen — zapomínalo se na to, že součin dvou záporných čísel je kladný a může být argumentem funkce $\ln$. Na podmínku jednoduché souvislosti oblasti si také málokdo vzpomněl. Ověření nulovosti rotace pole se dařilo dobře.

Při označení $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ se potenciál hledal standardním způsobem.

$$\varphi = \int P(x) dx = \int \left(-2xz^3 + \frac{y^2}{x} \right) dx = -x^2z^3 + y^2 \ln x + c(y, z).$$

Derivováním φ dle y a srovnáním s Q dostaneme

$$\begin{aligned} 2y \ln x + c'_y(y, z) &= y(2z^2 + 2\ln(xy) + 1), \\ 2y \ln x + c'_y(y, z) &= 2yz^2 + 2y \ln x + 2y \ln y + y \\ c'_y(y, z) &= 2yz^2 + 2y \ln y + y, \\ c(y, z) &= y^2z^2 + y^2 \ln y + d(z), \text{ odtud plyne} \\ \varphi &= -x^2z^3 + y^2 \ln x + y^2z^2 + y^2 \ln y + d(z). \end{aligned}$$

V tomto kroku se velmi chybovalo při integraci výrazu $2y \ln y + y$. Řešitelé obvykle správně odvodili primitivní funkci $\frac{1}{2}y^2$ funkce y a bez odvození uvedli nesprávnou primitivní funkci k $2y \ln y$. Samozřejmě je vůbec nenapadlo, ověřit si správnost primitivní funkce jejím zderivováním.

Primitivní funkce k $2y \ln y + y$ je $y^2 \ln y$, což lze odhadnout. Komu se odhad nedaří, integruje po částech ($u = \ln y \Rightarrow u' = 1/y$, $v' = 2y \Rightarrow v = y^2$)

$$\int 2y \ln y dy = y^2 \ln y - \int y^2/y dy = y^2 \ln y - \frac{1}{2}y^2.$$

Derivováním φ dle z a srovnáním s R dostaneme

$$\begin{aligned} -3x^2z^2 + 2y^2z + d'(z) &= -3x^2z^2 - 9\cos^3(3z) + 2y^2z + 9\cos(3z), \\ d'(z) &= -9\cos^3(3z) + 9\cos(3z), \\ d'(z) &= 9\cos(3z)(1 - \cos^2(3z)), \\ d'(z) &= 9\cos(3z)\sin^2(3z), \\ d(z) &= \sin^3(3z) + K, \\ \varphi(x, y, z) &= -x^2z^3 + y^2 \ln x + y^2z^2 + y^2 \ln y + \sin^3(3z) + K, \\ \varphi(x, y, z) &= -x^2z^3 + y^2 \ln(xy) + y^2z^2 + \sin^3(3z) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Derivováním se ověří, že $\nabla\varphi = \mathbf{f}$.

Špatně většinou dopadlo řešení toku vektorového pole $\mathbf{F} = (y^2, x^3y, xz)$ plochou

$$\mathcal{P} = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \wedge z \geq 2 \wedge x \geq 0 \right\},$$

která je orientována tak, že normálový vektor v každém jejím bodě, kde existuje, má třetí souřadnici kladnou.

Plocha $\mathcal{P}$ vznikne z vodorovně useknutého rotačního kužele v postavení „klobouk“, jehož okrajem je kružnice se středem $[0, 0, 2]$ a poloměrem 2. Plocha $\mathcal{P}$ je polovina ($x \geq 0$) této části kužele. Lze postupovat dvěma způsoby. Například nejprve zavedme parametrizaci $\mathbf{X}(u, v)$

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 4 - \sqrt{u^2 + v^2}, \quad (u, v) \in B = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

Parametrizace $\mathbf{X}(u, v)$ tedy zobrazuje kruh B na plochu $\mathcal{P}$.

Normálový vektor dostaneme z vektorového součinu tečných vektorů $\mathbf{X}_u$ a $\mathbf{X}_v$, tedy

$$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right), \quad \text{parametrizace souhl. s orient.}$$

Dále potřebujeme složenou funkci $\mathbf{F}(\mathbf{X}(u, v)) = (v^2, u^3v, u(4 - \sqrt{u^2 + v^2}))$.

K sestavení integrálu (jde o plošný integrál vektorové funkce) použijeme vztah na třetí stránce oficiálního taháku, tak odvodíme dvojný integrál na kruhu B . K jeho výpočtu poté použijeme transformaci do polárních souřadnic ($u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$, $J = r$, $0 < r < 2$, $0 < \varphi < \pi$)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_B \mathbf{F}(\mathbf{X}(u, v)) \cdot (\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)) \, du \, dv \\ &= \iint_B (v^2, u^3v, u(4 - \sqrt{u^2 + v^2})) \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right) \, du \, dv \\ &= \iint_B \left(\frac{uv^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{u^3v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} + u(4 - \sqrt{u^2 + v^2}) \right) \, du \, dv \\ &\stackrel{\text{jakobián}}{=} r \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r^5 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 4r^2 \cos \varphi - r^3 \cos \varphi) \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r^5 \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi + (4r^2 - r^3) \cos \varphi) \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r^5 \cos \varphi \sin^2 \varphi - r^5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + (4r^2 - r^3) \cos \varphi) \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^2 \left((r^3 + r^5) \left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - r^5 \left[\frac{1}{5} \sin^5 \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + (4r^2 - r^3) [\sin \varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \, dr \\ &= \int_0^2 \left((r^3 + r^5) \frac{2}{3} - r^5 \frac{2}{5} + 2(4r^2 - r^3) \right) \, dr = \int_0^2 \left(\frac{4}{15} r^5 - \frac{4}{3} r^3 + 8r^2 \right) \, dr \\ &= \frac{4}{15} \frac{2^6}{6} - \frac{4}{3} \frac{2^4}{4} + \frac{8 \cdot 2^3}{3} = \frac{128}{45} - \frac{16 \cdot 15}{45} + \frac{64 \cdot 15}{45} = \frac{128 + 48 \cdot 15}{45} = \frac{16(8 + 3 \cdot 15)}{45} \\ &= \frac{16 \cdot 53}{45} = \frac{848}{45}. \end{aligned}$$

Na pořadí integrace nezáleží, zde se nejprve integrovalo dle φ . Výrazy s $\cos \varphi$ a $\sin \varphi$ převedeme do tvaru $\cos \varphi \sin^a \varphi$ nebo $\cos^a \varphi \sin \varphi$, protože pak snadno odvodíme primitivní funkci $\frac{1}{a+1} \sin^{a+1} \varphi$ nebo $-\frac{1}{a+1} \cos^{a+1} \varphi$.

Můžeme postupovat přímočařeji a elegantněji, když navrhne parametrizaci $\widehat{\mathbf{X}}(r, \varphi)$ založenou na polárních souřadnicích. Pak parametrizace $\widehat{\mathbf{X}}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4 - r)$

(v níž využíváme toho, že rovnice plochy $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ přejde v $4 - r$) zobrazuje obdélník $\widehat{B} = [0, 2] \times [-\pi/2, \pi/2]$ na plochu $\mathcal{P}$. Parametrizace je založená na polárních souřadnicích, ale (pozor!) při sestavování integrálu nepoužíváme jakobián, řídíme se předpisem z taháku, viz též (19), tam jakobián nevystupuje.

Opět potřebujeme normálový vektor odvozený pomocí vektorového součinu tečných vektorů

$$\widehat{\mathbf{X}}_r \times \widehat{\mathbf{X}}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & -1 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r).$$

Také nyní je parametrizace souhlasná s orientací plochy, protože třetí složka normálového vektoru je kladná (s výjimkou $r = 0$, v bodě $[0, 0, 4]$ však normála stejně neexistuje, jde o „špičku“ kuželové plochy).

Dále potřebujeme složenou funkci

$\mathbf{F}(\widehat{\mathbf{X}}(r, \varphi)) = (r^2 \sin^2 \varphi, r^4 \cos^3 \varphi \sin \varphi, r \cos \varphi (4 - r))$, takže (viz tahák)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{\widehat{B}} \mathbf{F}(\widehat{\mathbf{X}}(r, \varphi)) \cdot (\widehat{\mathbf{X}}_r(r, \varphi) \times \widehat{\mathbf{X}}_\varphi(r, \varphi)) \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r^5 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 4r^2 \cos \varphi - r^3 \cos \varphi) \, d\varphi \, dr \\ &= \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Po provedení skalárního součinu jsme dostali stejný dvojný integrál jako v předchozím přístupu, a to v místě s $\stackrel{\text{jakobián}}{=} r$, další postup výpočtu je tedy už znám.

Aplikace Gaussovy-Ostrogradského věty je možná poté, co plochu $\mathcal{P}$ doplníme dalšími částmi ploch tak, aby výsledná plocha byla uzavřená. Pak bychom tok plochou $\mathcal{P}$ dostali jako integrál divergence pole přes vnitřek uzavřené plochy, od něhož bychom odečetli tok pole přidanými částmi ploch. Postup jsem nezkoušel, ale připadá mi pracnější než přímý výpočet toku plochou $\mathcal{P}$.

Obdobné problémy s nezvládnutou parametrizací nebo s výpočtem integrálu byly patrné i u výpočtu práce vykonané působením síly $\mathbf{F} = \left(\frac{z}{2}, xy, x + \frac{y}{2}\right)$ podél křivky

$c = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \wedge 0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge z = 2x^2 \right\}$ orientované počátečním bodem $A = [0, 4, 0]$ a koncovým bodem $B = [3, 0, 18]$.

Z podmínek $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \wedge 0 \leq x \wedge 0 \leq y$ je jasné, že kolmým průmětem křivky c do roviny xy je čtvrtina elipsy ležící v prvním kvadrantu roviny xy . Křivku tvoří graf funkce $z = 2x^2$ nad čtvrtinou elipsy v rovině xy .

Pro parametrizaci Ψ se inspirováme zobecněnými polárními souřadnicemi v rovině xy s $r = 1$:

$$\Psi(\varphi) = (\underbrace{3 \cos \varphi}_x, \underbrace{4 \sin \varphi}_y, \underbrace{18 \cos^2 \varphi}_{z=2x^2}), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ nesouhlasná: } \Psi(0) = B, \Psi(\pi/2) = A,$$

$$\mathbf{F}(\Psi(\varphi)) = (9 \cos^2 \varphi, 12 \cos \varphi \sin \varphi, 3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi),$$

$$\Psi'(\varphi) = (-3 \sin \varphi, 4 \cos \varphi, -36 \cos \varphi \sin \varphi).$$

Nyní již můžeme integrovat, viz substituce v křivkovém integrálu druhého druhu uvedená

v oficiálním tahu. Kvůli nesouhlasné orientaci měníme znaménko před integrálem

$$\begin{aligned}
 \int_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= - \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\Psi(\varphi)) \cdot \Psi'(\varphi) \, d\varphi \\
 &= - \int_0^{\pi/2} (-27 \cos^2 \varphi \sin \varphi + 48 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 108 \cos^2 \varphi \sin \varphi \\
 &\quad - 72 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} (87 \cos^2 \varphi \sin \varphi + 72 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \, d\varphi \\
 &= -29 [\cos^3 \varphi]_0^{\pi/2} + 24 [\sin^3 \varphi]_0^{\pi/2} = -29 \cdot (-1) + 24 \cdot 1 = 53.
 \end{aligned}$$

Vykonaná práce má hodnotu 53.

Někteří řešitelé zvolili jinou parametrizaci — bez vztahu k zobecněným polárním souřadnicím:

$$\begin{aligned}
 x &= t, \quad dx = dt, \quad t \in [0, 3], \\
 y &= \sqrt{16 - \frac{16t^2}{9}} = \frac{4}{3} \sqrt{9 - t^2}, \quad dy = -\frac{4}{3} \frac{t}{\sqrt{9 - t^2}} dt, \\
 z &= 2t^2, \quad dz = 4t \, dt.
 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Psi}(t) &= \left(t, \frac{4}{3} \sqrt{9 - t^2}, 2t^2 \right), \\
 \mathbf{F}(\widehat{\Psi}(t)) &= \left(t^2, \frac{4t}{3} \sqrt{9 - t^2}, t + \frac{2}{3} \sqrt{9 - t^2} \right), \\
 \widehat{\Psi}'(t) &= \left(1, -\frac{4}{3} \frac{t}{\sqrt{9 - t^2}}, 4t \right).
 \end{aligned}$$

Parametrizace $\widehat{\Psi}(t)$ je souhlasná s orientací křivky, neboť $\widehat{\Psi}(0) = A$ a $\widehat{\Psi}(3) = B$.

Integrujme

$$\begin{aligned}
 \int_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_0^3 \mathbf{F}(\widehat{\Psi}(t)) \cdot \widehat{\Psi}'(t) \, dt \\
 &= \int_0^3 \left(t^2 - \frac{16}{9} t^2 + 4t^2 + \frac{8}{3} t \sqrt{9 - t^2} \right) dt = \int_0^3 \left(\frac{29}{9} t^2 + \frac{8}{3} t \sqrt{9 - t^2} \right) dt \\
 &= \frac{29}{27} [t^3]_0^3 - \frac{8}{9} [(9 - t^2)^{3/2}]_0^3 = 29 - \frac{8}{9} (-27) = 29 + 24 = 53.
 \end{aligned}$$

Primitivní funkci k $t\sqrt{9 - t^2}$ lze opět uhodnout (a ověřit derivováním!) nebo si pomůžeme substitucí $p = 9 - t^2$, $dp = -2t \, dt$, $t = 0 \mapsto p = 9$, $t = 3 \mapsto p = 0$

$$\frac{8}{3} \frac{-1}{2} \int_0^3 (-2t \sqrt{9 - t^2}) \, dt = -\frac{4}{3} \int_9^0 \sqrt{p} \, dp = \frac{4}{3} \int_0^9 \sqrt{p} \, dp = \frac{4}{3} \left[\frac{2}{3} p^{3/2} \right]_0^9 = 24.$$