

Předmět: MA3G

Nová látka: Integrace v rovině

- ▶ oblast v rovině
- ▶ míra množiny
- ▶ (Riemannův) dvojný integrál
- ▶ Fubiniova věta
- ▶ věta o substituci
- ▶ polární souřadnice

Literatura: M. Kočandřlová: GEO-MATEMATIKA II, oddíl I

Fubiniova věta: Necht' g_1 a g_2 jsou dvě (po částech) spojitě funkce na intervalu $[a, b]$, přičemž pro každý bod $x \in [a, b]$ jest $g_1(x) \leq g_2(x)$. Pomocí funkcí g_1 a g_2 zaved'me množinu

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \right\}.$$

Necht' je dána funkce $f \in C(M)$. Pro každý bod $x \in [a, b]$ definujeme

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

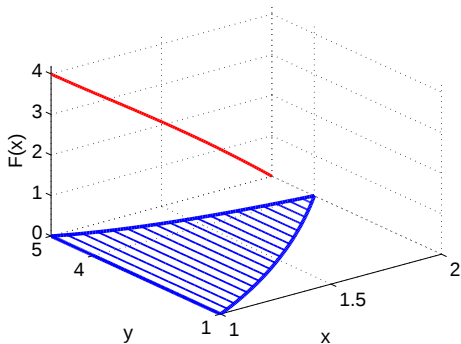
Pak lze dvojný integrál $\int_M f \, dA$ vyjádřit jako integrál dvojnásobný, přesněji

$$\begin{aligned} \int_M f \, dA &= \int \int_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b F(x) \, dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

Příklad: Míra množiny

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 3 + 2/x\}$ je rovna

$$\begin{aligned}\int_M 1 \, dA &= \int_1^2 \left(\int_{x^2}^{3+2/x} 1 \, dy \right) dx = \int_1^2 [y]_{y=x^2}^{y=3+2/x} dx \\&= \int_1^2 \left(3 + \frac{2}{x} - x^2 \right) dx = \left[3x + 2 \ln x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=1}^{x=2} \\&= 3(2 - 1) + 2 \ln \frac{2}{1} + \frac{1^3 - 2^3}{3} = 3 + 2 \ln 2 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} + \ln 4\end{aligned}$$



$$g_1(x) = x^2$$

$$g_2(x) = 3 + \frac{2}{x}$$

$$F(x) = 3 + \frac{2}{x} - x^2$$

Fubiniova věta (2. varianta): Necht' h_1 a h_2 jsou dvě (po částech) spojitě funkce na intervalu $[c, d]$, přičemž pro každý bod $y \in [c, d]$ jest $h_1(y) \leq h_2(y)$. Pomocí funkcí h_1 a h_2 zaved'me množinu

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \right\}.$$

Necht' je dána funkce $f \in C(M)$. Pro každý bod $y \in [c, d]$ definujme

$$G(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx.$$

Pak lze dvojný integrál $\int_M f dA$ vyjádřit jako integrál dvojnásobný, přesněji

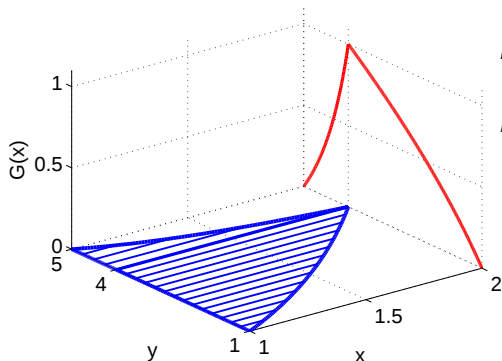
$$\begin{aligned} \int_M f dA &= \int \int_M f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Příklad: Míra množiny $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 4, 1 \leq x \leq \sqrt{y}\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq y \leq 5, 1 \leq x \leq 2/(y-3)\}, \text{ je rovna}$$

$$\int_M \mathbf{1} \, dA = \int_1^4 \left(\int_1^{\sqrt{y}} \mathbf{1} \, dx \right) dy + \int_4^5 \left(\int_1^{2/(y-3)} \mathbf{1} \, dx \right) dy$$



$$h_1(y) = 1$$

$$h_2(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{pro } y \in [1, 4], \\ \frac{2}{y-3} & \text{pro } y \in (4, 5] \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} \sqrt{y} - 1 & \text{pro } y \in [1, 4], \\ \frac{2}{y-3} - 1 & \text{pro } y \in (4, 5] \end{cases}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned}\int_M 1 \, dA &= \int_1^4 \left(\int_1^{\sqrt{y}} 1 \, dx \right) dy + \int_4^5 \left(\int_1^{2/(y-3)} 1 \, dx \right) dy \\&= \int_1^4 (\sqrt{y} - 1) \, dy + \int_4^5 \left(\frac{2}{y-3} - 1 \right) dy \\&= \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - y \right]_{y=1}^{y=4} + [2 \ln(y-3) - y]_{y=4}^{y=5} \\&= \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 1 + 2 \ln 2 - 5 - 2 \ln 1 + 4 \\&= \frac{14}{3} - 4 + 2 \ln 2 = \frac{2}{3} + \ln 4\end{aligned}$$

Výsledek je totožný s výsledkem získaným integrací dle první verze Fubiniovy věty.

Věta o substituci ve dvojném integrálu

Nechť uzávěr $\overline{N}$ oblasti N (tj. oblast N , k níž je přidána její hranice) v souřadné soustavě u, v se zobrazí pomocí rovnic

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

vzájemně jednoznačně na uzávěr oblasti M (ozn. $\overline{M}$) v souřadné soustavě x, y . Nechť funkce $x(u, v)$ a $y(u, v)$ mají v $\overline{N}$ spojitě první parciální derivace a **jakobián**¹

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

je v $\overline{N}$ různý od nuly. Nechť funkce $f \in C(\overline{M})$. Pak

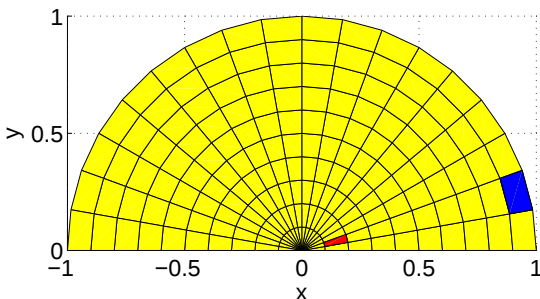
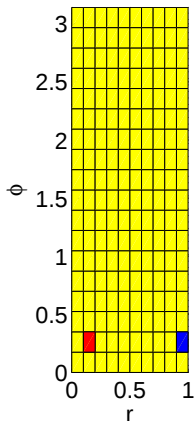
$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \iint_N f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv.$$

¹V GEO-MATEMATICE II je místo $J(u, v)$ užíváno označení $D(u, v)$.

Polární souřadnice: $r \equiv u, \phi \equiv v$

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad J = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r, \quad |J| = r$$

$(r, \phi) \in [0, 1] \times [0, \pi] \mapsto (x, y) \in \overline{M}$; obdélník $\rightarrow$ půlkruh



Jakobián v bodě (u, v) popisuje změnu obsahu infinitezimální plošky tvořící okolí bodu (u, v) , tj. (r, ϕ) .

Zobecnění polárních souřadnic:

$$x = a_{\varrho} \cos \varphi + p,$$

$$y = b_{\varrho} \sin \varphi + q,$$

$$J = ab_{\varrho},$$

kde $a, b > 0$ a $\varrho \in (0, 1)$, případně $\varrho \in [0, 1]$.

Roli délky průvodiče r z minulé stránky tady zobecňují součiny a_{ϱ} a b_{ϱ} ; symbol φ je stejně jako ϕ grafickou variantou řeckého písmene ϕ .

Zobecnění zobrazuje obdélník $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ na omezenou množinu, jejíž hranici tvoří elipsa se středem v bodě $[p, q]$ a s osami rovnoběžnými s kartézskými osami x a y a s poloosami délky a a b .

Příklad: Vypočtěte $I = \iint_M (x^2 + y^2) dx dy$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, a, b > 0.$$

Řešení: Množina M je elipsa, pomocí zobecněných polárních souřadnic ji dostaneme jako obraz obdélníka $[0, 2\pi] \times [0, 1]$:

$$x = a\varrho \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$y = b\varrho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varrho \leq 1, \quad J = ab\varrho.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (a^2 \varrho^2 \cos^2 \varphi + b^2 \varrho^2 \sin^2 \varphi) ab\varrho d\varrho d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} ab (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \left(\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} ab (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \cdot \int_0^1 \varrho^3 d\varrho \\ &= \left(a^3 b \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + ab^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} \\ &= (a^3 b \pi + ab^3 \pi) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pi ab (a^2 + b^2). \end{aligned}$$