

Předmět: MA03

Opakování: Substituční metoda

Nová látka: Integrace v rovině: aplikace

Literatura:

M. Kočandřlová: GEO-MATEMATIKA II, kapitoly I.3, I.5

Věta o substituci ve dvojném integrálu

Nechť uzávěr $\overline{N}$ oblasti N (tj. oblast N , k níž je přidána její hranice) v souřadné soustavě u, v se zobrazí pomocí rovnic

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

vzájemně jednoznačně na uzávěr oblasti M (ozn. $\overline{M}$) v souřadné soustavě x, y . Nechť funkce $x(u, v)$ a $y(u, v)$ mají v $\overline{N}$ spojitě první parciální derivace a **jakobián**¹

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

je v $\overline{N}$ různý od nuly. Nechť funkce $f \in C(\overline{M})$. Pak

$$\int \int_M f(x, y) \, dx \, dy = \int \int_N f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv.$$

¹V GEO-MATEMATICE II je místo $J(u, v)$ užíváno označení $D(u, v)$.

Zobecnění polárních souřadnic:

$$x = a\rho \cos \varphi + p,$$

$$y = b\rho \sin \varphi + q,$$

$$J = ab\rho,$$

kde $a, b > 0$ a $\rho \in (0, 1)$.

Zobrazuje jednotkový kruh se středem v počátku na elipsu s osami rovnoběžnými s kartézskými osami x a y , s poloosami délky a a b a se středem v bodě $[p, q]$.

Některé aplikace

V dalším je množinou $M \subset \mathbb{R}^2$ modelována tenká deska v rovině xy s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$ $[\text{kg m}^{-2}]$

- ▶ Výpočet dvojrozměrné míry (obsahu) množiny ve 2D
- ▶ Výpočet dvojrozměrné míry (obsahu) ploch
- ▶ Výpočet objemu tělesa vymezeného grafy funkcí
- ▶ Hmotnost desky $m = \int \int_M \sigma(x, y) dx dy$ $[\text{kg}]$
- ▶ Statický moment vzhledem k ose x
 $S_x = \int \int_M y \sigma(x, y) dx dy$ $[\text{kg m}]$
- ▶ Statický moment vzhledem k ose y
 $S_y = \int \int_M x \sigma(x, y) dx dy$ $[\text{kg m}]$
- ▶ Souřadnice těžiště $\left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right]$

Některé aplikace (pokračování)

- ▶ Moment setrvačnosti vzhledem k ose x

$$I_x = \int \int_M y^2 \sigma(x, y) \, dx \, dy \quad [\text{kg m}^2]$$

- ▶ Moment setrvačnosti vzhledem k ose y

$$I_y = \int \int_M x^2 \sigma(x, y) \, dx \, dy \quad [\text{kg m}^2]$$

- ▶ Moment setrvačnosti vzhledem k ose z

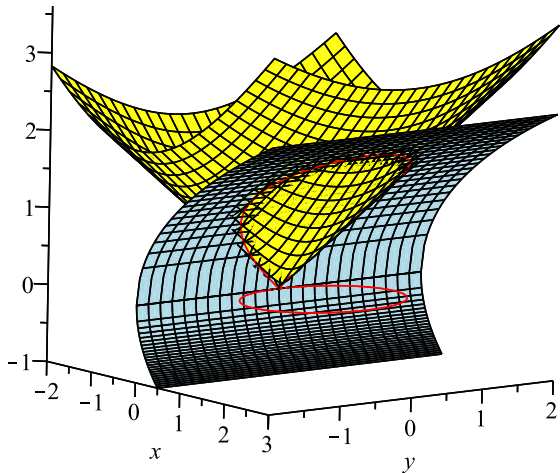
$$I_z = \int \int_M (x^2 + y^2) \sigma(x, y) \, dx \, dy = I_x + I_y \quad [\text{kg m}^2]$$

- ▶ Obsah S plochy P , která je částí grafu funkce $z = f(x, y)$, kde $(x, y) \in M$, je

$$S = \int \int_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

Příklad: Obsah části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, kterou z ní vytne parabolický válec $z^2 = 2x$. Odkaz na řešení:

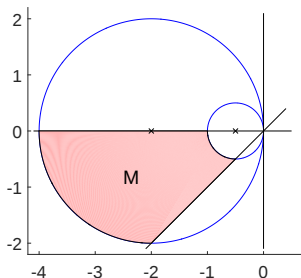
https://mat.fsv.cvut.cz/vyuka/bakalari/zs/MA3SI/files/vic_int.pdf



Příklad: Plošný obsah rovinného obrazce vymezeného křivkami

a) $x^2 + y^2 + x = 0$, **b)** $x^2 + y^2 + 4x = 0$, **c)** $y = x$ a **d)** $y = 0$.

Řešení: pol. souř. $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $J = \varrho$



a) $\varrho^2 + \varrho \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varrho = -\cos \varphi$

b) $\varrho^2 + 4\varrho \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varrho = -4\cos \varphi$

Meze

$$-\cos \varphi \leq \varrho \leq -4\cos \varphi$$

$$\pi \leq \varphi \leq 5\pi/4$$

$$\begin{aligned} m &= \int_M 1 \, dA = \int_{\pi}^{5\pi/4} \int_{-\cos \varphi}^{-4\cos \varphi} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{5\pi/4} \left[\varrho^2 \right]_{-\cos \varphi}^{-4\cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{5\pi/4} (16\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = \dots = \frac{15}{16}(\pi + 2) \end{aligned}$$

Využita rovnost $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$.

Pokračování: Těžiště obrazce M při $\sigma(x, y) = 1$. Nutný výpočet statických momentů.

$$\begin{aligned}
 S_y &= \int_M x \, dA = \int_{\pi}^{5\pi/4} \int_{-\cos \varphi}^{-4 \cos \varphi} \varrho^2 \cos \varphi \, d\varrho \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{3} \int_{\pi}^{5\pi/4} \cos \varphi \left[\varrho^3 \right]_{-\cos \varphi}^{-4 \cos \varphi} d\varphi = -21 \int_{\pi}^{5\pi/4} \cos^4 \varphi \, d\varphi \\
 &= -\frac{21}{4} \int_{\pi}^{5\pi/4} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \dots = -63\pi/32 - 21/4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_x &= \int_M y \, dA = \int_{\pi}^{5\pi/4} \int_{-\cos \varphi}^{-4 \cos \varphi} \varrho^2 \sin \varphi \, d\varrho \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{3} \int_{\pi}^{5\pi/4} \sin \varphi \left[\varrho^3 \right]_{-\cos \varphi}^{-4 \cos \varphi} d\varphi = -21 \int_{\pi}^{5\pi/4} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{21}{4} \left[\cos^4 \varphi \right]_{\pi}^{5\pi/4} = \frac{21}{4} \left(\frac{4}{16} - (-1)^4 \right) = \frac{21}{4} \left(-\frac{3}{4} \right) = -\frac{63}{16}
 \end{aligned}$$

Těžiště: $[S_y/m, S_x/m] \approx [-2,372, -0,817]$.