

## Předmět: MA3G

### **Nová látka:** Integrace na křivkách Křivkový integrál druhého druhu

- ▶ vektorové pole; orientace křivky; jednotkový tečný vektor ke křivce
- ▶ křivkový integrál (2. druhu)
- ▶ věta o substituci
- ▶ cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce
- ▶ tok vektorového pole uzavřenou křivkou

### Literatura:

M. Kočandrlová: GEO-MATEMATIKA II, oddíl II.4 (ve skriptech pojato trochu jinak a stručně)

## Křivkový integrál druhého druhu

Vektorovým polem  $\vec{F} = (P, Q)$  nebo  $\vec{F} = (P, Q, R)$  budeme nazývat vektorovou funkci s hodnotami v  $\mathbb{R}^2$  nebo  $\mathbb{R}^3$ , jejíž definiční obor je podmnožinou  $\mathbb{R}^2$  nebo  $\mathbb{R}^3$ . Tj.

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \text{ nebo}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Jednotkový tečný vektor ke křivce v bodě  $\Psi(t)$  je

$$\vec{T} = \Psi'(t) / \|\Psi'(t)\|, \text{ kde } \Psi \text{ je parametrizace křivky.}$$

**Orientace uzavřené křivky:** kladná proti směru hodinových ručiček.

**Orientace otevřené křivky:** zadáním počátečního a koncového bodu křivky.

**Definice:** Bud'  $\vec{F} = (P, Q, R)$  vektorové pole a  $C$  orientovaná hladká křivka. Integrálu

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds \quad \text{říkáme křivkový integrál druhého druhu.}$$

Jiný zápis

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \int_C P \, dx + \int_C Q \, dy + \int_C R \, dz = \int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz,$$

kde

$$\int_C P \, dx = \int_C (P, 0, 0) \cdot \vec{T} \, ds,$$

$$\int_C Q \, dy = \int_C (0, Q, 0) \cdot \vec{T} \, ds,$$

$$\int_C R \, dz = \int_C (0, 0, R) \cdot \vec{T} \, ds.$$

Ještě jiný zápis

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

## Věta o substituci v křivkovém integrálu

Nechť  $\Psi(t) = (x(t), y(t), z(t))$  je parametizace křivky  $C$ ,  
 $t \in [a, b]$ , **souhlasná s orientací křivky**. Dle věty o substituci

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds &= \int_a^b \vec{F}(\Psi(t)) \cdot \frac{\Psi'(t)}{\|\Psi'(t)\|} \|\Psi'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\Psi(t)) \cdot \Psi'(t) \, dt.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\int_C P \, dx &= \int_a^b P(\Psi(t)) x'(t) \, dt, & \int_C Q \, dy &= \int_a^b Q(\Psi(t)) y'(t) \, dt, \\ \int_C R \, dz &= \int_a^b R(\Psi(t)) z'(t) \, dt.\end{aligned}$$

Je-li parametizace **nesouhlasná s orientací křivky**, je

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = - \int_a^b \vec{F}(\Psi(t)) \cdot \Psi'(t) \, dt,$$

neboť teprve orientace tečného vektoru  $-\Psi'(t)$  je souhlasná s orientací křivky.

Cirkulace vektorového pole  $\vec{F}$  po uzavřené křivce  $C$ :

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds.$$

Tok vektorového pole  $\vec{F} = (P, Q)$  uzavřenou křivkou  $C$ :

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds,$$

kde  $\vec{n}$  je vektor jednotkové vnější normály.

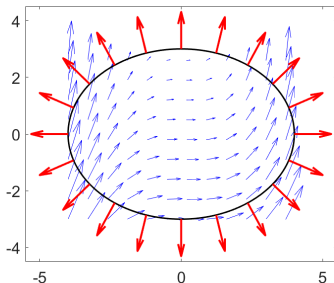
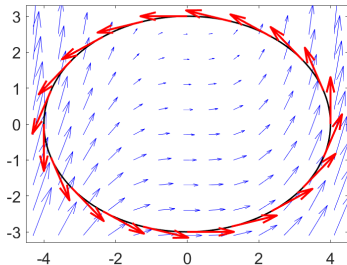
$$\vec{T} = (T_1, T_2), \vec{n} = (T_2, -T_1)$$

Je-li  $\vec{F} = (P, Q)$ , pak

$$\text{cirkulace } \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \oint_C P \, dx + Q \, dy,$$

$$\text{tok } \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_C P \, dy - Q \, dx = \oint_C (-Q) \, dx + P \, dy.$$

**Příklad:** Necht'  $C$  je kladně orientovaná<sup>1</sup> elipsa daná vztahem  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  a necht'  $\vec{F} = (4 - y, x^2)$ . Vypočítejme cirkulaci pole  $\vec{F}$  po křivce  $C$  a tok pole  $\vec{F}$  křivkou  $C$ .



Parametrizace elipsy

$x(t) = 4 \cos t$ ,  $y(t) = 3 \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , je souhlasná se zadanou orientací křivky.

Tečné vektory  $\vec{T} = (x'(t), y'(t)) = (-4 \sin t, 3 \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (nejsou jednotkové).

<sup>1</sup>Tj. proti směru pohybu hodinových ručiček.

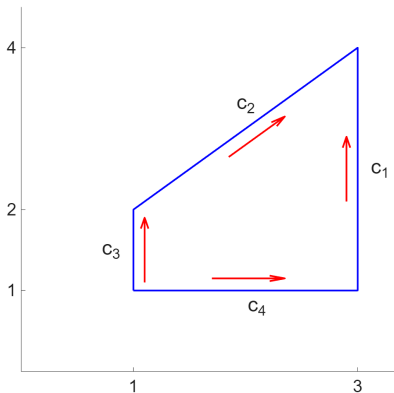
Cirkulace (připomeňme  $\vec{F} = (P, Q)$ , kde  $P = 4 - y$ ,  $Q = x^2$ )

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds &= \oint_C (4 - y) \, dx + x^2 \, dy \\&= \int_0^{2\pi} \left[ (4 - 3 \sin t)(-4 \sin t) + (4 \cos t)^2 \cdot 3 \cos t \right] dt \\&= \int_0^{2\pi} \left[ -16 \sin t + 12 \sin^2 t + 48 \cos^3 t \right] dt \\&= 12 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = 12 \cdot 4 \frac{\pi}{4} = 12\pi.\end{aligned}$$

Tok

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= \oint_C (-x^2) \, dx + (4 - y) \, dy \\&= \int_0^{2\pi} \left[ -(4 \cos t)^2(-4 \sin t) + (4 - 3 \sin t) \cdot 3 \cos t \right] dt \\&= \int_0^{2\pi} \left[ 64 \cos^2 t \sin t + 12 \cos t - 9 \sin t \cos t \right] dt = 0.\end{aligned}$$

**Příklad:** Vypočítejte cirkulaci vektorového pole  $\vec{F} = (x^2, xy)$  po kladně orientované křivce  $c = c_1 \cup c_2 \cup c_3 \cup c_4$  (viz obrázek).



Parametrizace křivek:

$$c_1: x = 3, y = t, t \in [1, 4],$$

$$dx = 0 dt, dy = 1 dt,$$

param. souhlasná s orientací;

$$c_2: x = t, y = t + 1, t \in [1, 3],$$

$$dx = 1 dt, dy = 1 dt;$$

param. nesouhlasná s orien.;

$$c_3: x = 1, y = t, t \in [1, 2],$$

$$dx = 0 dt, dy = 1 dt;$$

param. nesouhlasná s orien.;

$$c_4: x = t, y = 1, t \in [1, 3], dx = 1 dt, dy = 0 dt;$$

param. souhlasná s orientací.

Šipky v obrázku ukazují směr pohybu po jednotlivých částech křivky  $c$  daný jednotlivými parametrizacemi.

Nyní jsme připraveni k výpočtu:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds &= \int_{c_1} x^2 \, dx + xy \, dy + \int_{c_2} x^2 \, dx + xy \, dy \\
&\quad + \int_{c_3} x^2 \, dx + xy \, dy + \int_{c_4} x^2 \, dx + xy \, dy \\
&= \int_1^4 (0 + 3t) \, dt - \int_1^3 (t^2 + t(t+1)) \, dt \\
&\quad - \int_1^2 (1^2 \cdot 0 + t) \, dt + \int_1^3 (t^2 + 0) \, dt \\
&= \left[ \frac{3}{2} t^2 \right]_1^4 - \left[ \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right]_1^3 - \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_1^2 + \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_1^3 \\
&= 24 - \frac{3}{2} - \left( 18 + \frac{9}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) - \left( 2 - \frac{1}{2} \right) \\
&\quad + \left( 9 - \frac{1}{3} \right) = 24 - 1 - 18 - 4 + 1/3 - 2 + 9 \\
&= 8 + 1/3 = 25/3
\end{aligned}$$

Nechť  $\vec{F} = (P, Q)$ . Výraz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

se nazývá **divergence** vektorové funkce  $\vec{F}$ .

Pro  $\vec{G} = (P, Q, R)$ ,

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

$\operatorname{div} \vec{F}(x, y)$  (nebo  $\operatorname{div} \vec{G}(x, y, z)$ ) vyjadřuje intenzitu zdroje v bodě  $(x, y)$  (nebo  $(x, y, z)$ ).

**Příklad:**  $\vec{G}(x, y, z) = (y \sin^2 x, x^2 z \ln y, xz \cos y)$ ,

$$\operatorname{div} \vec{G}(x, y, z) = 2y \sin x \cos x + \frac{x^2 z}{y} + x \cos y.$$