

Předmět: MA3G

Nová látka: Plošný integrál skalární funkce

- ▶ bodová a vektorová funkce dvou proměnných
- ▶ plochy (regulární element plochy, parametrizace, tečné vektory)
- ▶ orientace plochy
- ▶ plošný integrál skalární funkce ...
- ▶ ... a jeho aplikace

Literatura:

M. Kočandrlová: GEO-MATEMATIKA II, kapitola III.1-2

J. Neustupa: Matematika II, kapitoly IV.1 až IV.3 (skripta FS ČVUT)

Bodová a vektorová funkce dvou proměnných

Zobrazení z $M \subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ dané souřadnicovými funkcemi x, y, z :

$$\begin{aligned} X(u, v) &= [x(u, v), y(u, v), z(u, v)], \\ \vec{X} &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \end{aligned}$$

Spojitosť, limita a derivace X zavedena přes spojitost, limitu a derivaci souřadnicových funkcí.

Parciální derivace funkce X v bodě $[u_0, v_0]$ podle u a v :

$$\begin{aligned} \vec{X}_u(u_0, v_0) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right), \\ \vec{X}_v(u_0, v_0) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right). \end{aligned}$$

Regulární element ...

... se nazývá množina $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$, která je obrazem otevřené souvislé množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ při zobrazení bodovou funkcí X , pro niž platí

1. X je prosté a spojitě zobrazení M na $\mathcal{P}$ a inverzní zobrazení X^{-1} je spojitě na $\mathcal{P}$
2. X má všude v M spojitě parciální derivace
3. $\forall [u, v] \in M \quad \vec{X}_u(u, v) \times \vec{X}_v(u, v) \neq \vec{0}$, tj. vektory $\vec{X}_u, \vec{X}_v$ jsou lineárně nezávislé

Připomeňme, že pro $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - b_3 a_1, a_1 b_2 - b_1 a_2).\end{aligned}$$

Funkci X nazýváme **parametrizací** regulárního elementu plochy $\mathcal{P}$, proměnné u, v nazýváme jeho parametry. Existuje nekonečně mnoho parametrizací regulárního elementu.

Plocha

Definice: Souvislá množina $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá **plocha**, jestliže ke každému bodu $X_0 \in \mathcal{P}$ existuje jeho okolí $U \subset \mathbb{R}^3$ takové, že $\mathcal{P} \cap U$ je regulární element plochy.

Plocha "slepená" z regulárních elementů, ale často celá plocha tvořená jedním regul. elementem.

Užitečné zobecnění: Uvažujme $B = M \cup \Gamma$, kde Γ je hranice oblasti M , a takovou funkci X definovanou na B , že pro ni platí body 1 – 3, v nichž je množina M nahrazena množinou B . Pak můžeme zavést **okraj** regulárního elementu (**jednoduché hladké plochy**) jako křivku c , která je obrazem hranice Γ při zobrazení X , tj.

$$c = \{[x, y, z] = X(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid [u, v] \in \Gamma\}.$$

Poznámka: Další zobecnění: platnost 1 – 3 až na konečnou množinu K bodů z Γ , tj. platnost na $B \setminus K$.

Orientace jednoduché hladké plochy σ (reg. elementu) ...

... definováním jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$. Pro ten zároveň platí

$$\vec{n} = \eta \frac{\vec{X}_u(u, v) \times \vec{X}_v(u, v)}{\|\vec{X}_u(u, v) \times \vec{X}_v(u, v)\|}$$

pro všechny body $[u, v] \in B \setminus K$; $\eta = \pm 1$.

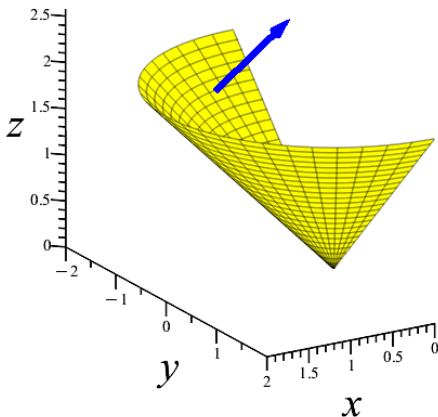
Pokud $\eta = 1$, pak σ orientována souhlasně s parametrizací,
pokud $\eta = -1$, pak σ orientována nesouhlasně s parametrizací.

Parametrické křivky plochy: $V(v) = X(u_0, v)$, $v \in I_v$,
 $U(u) = X(u, v_0)$, $u \in I_u$, kde x_0, v_0 pevné a I_u, I_v intervaly. Pak
 $\vec{X}_u(u_0, v_0)$ a $\vec{X}_v(u_0, v_0)$ jsou tečné vektory parametrických křivek
plochy v bodě $X(u_0, v_0)$.

Příklad (Neustupa: Matematika II, FS ČVUT)

Nechť jednoduchá hladká plocha

$\sigma = \{[x, y, z] \mid x \geq 0, z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$ je orientována tak, že třetí souřadnice normálového vektoru $\vec{n}$ je kladná.



Parametrizace

$$X: \quad x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2};$$

$$B = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0, \quad u^2 + v^2 \leq 4\}$$

X má vlastnosti 1–3 v bodech množiny $B \setminus K$, kde $K = \{[0, 0]\}$.

$$\vec{X}_u(u, v) = (1, 0, u/\rho) \text{ (červená),}$$

$$\vec{X}_v(u, v) = (0, 1, v/\rho) \text{ (magenta),}$$

kde $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$.

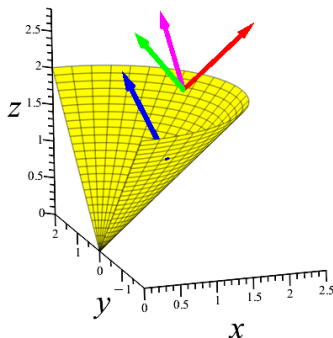
Pak

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = (-u/\rho, -v/\rho, 1)$$

$$\text{(zelená) a } \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = \sqrt{2}.$$

Třetí složka je kladná, proto $\vec{n} = (\vec{X}_u \times \vec{X}_v)/\sqrt{2}$.

Plocha σ je orientována souhlasně s parametrizací.



Plošný integrál skalární funkce

Definice: Necht' $\mathcal{P}$ je jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{R}^3$ s parametrizací $X(u, v)$, kde $[u, v] \in B \subset \mathbb{R}^2$. Necht' f je skalární funkce definovaná a omezená na ploše $\mathcal{P}$. Říkáme, že f je **integrovatelná** na $\mathcal{P}$, jestliže dvojný integrál

$$\iint_B f(X(u, v)) \|\vec{X}_u(u, v) \times \vec{X}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

existuje. V tom případě na ploše $\mathcal{P}$ definujeme **plošný integrál skalární funkce**

$$\iint_{\mathcal{P}} f \, dS = \iint_B f(X(u, v)) \|\vec{X}_u(u, v) \times \vec{X}_v(u, v)\| \, du \, dv. \quad (1)$$

Poznámka: Zobrazení X nemusí splňovat předpoklady parametrizace na množině 2D míry nula.

Poznámka: Obsah $S(\mathcal{P})$ plochy $\mathcal{P}$ je dán

$$S(\mathcal{P}) = \iint_B \|\vec{X}_u(u, v) \times \vec{X}_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Příklad: Vypočítejte $\iint_Q (x + y + z) \, dS$, kde plocha
 $Q : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0, a > 0$.

Řešení: Necht' bod $[x, y, z] \in Q$, parametrizace inspirovaná
sférickými souřadnicemi ($a \equiv \varrho, u \equiv \lambda, v \equiv \varphi$):

$$x = a \cos u \cos v,$$

$$y = a \sin u \cos v,$$

$$z = a \sin v,$$

kde $[u, v] \in B = [0, 2\pi) \times [0, \pi/2)$.

Důležitá poznámka: Tato parametrizace je prosté zobrazení, ale nepostihuje bod $[0, 0, a] \in Q$. To však nevadí, protože tím není ovlivněn výsledek integrace – nezáleží na hodnotě integrované funkce v jednom bodě.

Při volbě $B = [0, 2\pi) \times [0, \pi/2]$ by parametrizace nebyla prostá, protože celou úsečku $[0, 2\pi) \times \pi/2$ by zobrazila do bodu $[0, 0, a] \in Q$. To ale opět nevadí, neboť to je porušení pravidel na množině, jejíž dvojdimenzionální míra je nulová.

Příprava na sestavení pravé strany (1):

$$\begin{aligned}
 \vec{X}_u \times \vec{X}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin u \cos v & a \cos u \cos v & 0 \\ -a \cos u \sin v & -a \sin u \sin v & a \cos v \end{vmatrix} \\
 &= (a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \sin u \cos^2 v, a^2 \sin v \cos v), \\
 \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| &= a^2 \sqrt{\cos^2 u \cos^4 v + \sin^2 u \cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v} \\
 &= a^2 \sqrt{\cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v} \\
 &= a^2 \cos v \quad (\text{neboť } v \in [0, \pi/2) \text{ a } \cos v > 0).
 \end{aligned}$$

Poznámka: Srovnajte $a^2 \cos v$ s jakobiánem $J = \varrho^2 \cos \varphi$ ze sférických souřadnic, zde však je a konstanta. Výraz $a^2 \cos v$ udává vztah mezi obsahem infinitezimální plošky $du dv$ a obsahem jejího obrazu na ploše Q .

Z (1), parametrizace a $\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = a^2 \cos v$ dostáváme

$$\begin{aligned} & \iint_Q (x + y + z) \, dS \\ &= \iint_B (a \cos u \cos v + a \sin u \cos v + a \sin v) a^2 \cos v \, du \, dv \\ &= a^3 \iint_B (\cos u \cos^2 v + \sin u \cos^2 v + \sin v \cos v) \, du \, dv \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos u \cos^2 v + \sin u \cos^2 v \\ & \qquad \qquad \qquad + \sin v \cos v) \, du \, dv \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 + 0 + \sin v \cos v) \, dv \\ &= 2\pi a^3 \left[\frac{1}{2} \sin^2 v \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^3 \end{aligned}$$

Aplikace

Plocha $\mathcal{P}$ a $\sigma(X)$ její plošná hustota v bodě $X = [x, y, z]$.

Hmotnost plochy $\mathcal{P}$: $m = \iint_{\mathcal{P}} \sigma(X) dS$

Statické momenty plochy $\mathcal{P}$ vzhledem k souřadnicovým rovinám (viz indexy u S): $S_{xy} = \iint_{\mathcal{P}} z\sigma(X) dS$,
 $S_{yz} = \iint_{\mathcal{P}} x\sigma(X) dS$, $S_{xz} = \iint_{\mathcal{P}} y\sigma(X) dS$

Těžiště plochy $\mathcal{P}$: $T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m} \right]$

Momenty setrvačnosti plochy $\mathcal{P}$ vzhledem k souřadnicovým rovinám (viz indexy u S): $J_{xy} = \iint_{\mathcal{P}} z^2\sigma(X) dS$,
 $J_{xz} = \iint_{\mathcal{P}} y^2\sigma(X) dS$, $J_{yz} = \iint_{\mathcal{P}} x^2\sigma(X) dS$

Momenty setrvačnosti plochy $\mathcal{P}$ vzhledem k osám souřadnic:
 $J_x = \iint_{\mathcal{P}} (y^2 + z^2)\sigma(X) dS$, $J_y = \iint_{\mathcal{P}} (x^2 + z^2)\sigma(X) dS$,
 $J_z = \iint_{\mathcal{P}} (x^2 + y^2)\sigma(X) dS$

Moment setrvačnosti plochy $\mathcal{P}$ vzhledem k počátku souřadnic:
 $J_0 = \iint_{\mathcal{P}} (x^2 + y^2 + z^2)\sigma(X) dS$