

**Příklad<sup>1</sup> 1:** a) Vypočítejte přesně (tj. analyticky) dvojný integrál  $I$  funkce  $f(x, y) = 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2)$  na oblasti v rovině  $xy$  vymezené přímkami  $x = \pi/2$ ,  $x = \pi$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$ .

b1) Integrál  $I$  z úlohy a) počítejte přibližně numerickou integrací čtyřbodovým Gaussovým schématem. Uveďte výraz, jímž je dána numerická integrace, v podobě připravené pro numerické vyčíslení.

b2) Vyčíslete výraz získaný splněním úkolu b1) a výsledky numerické integrace srovnejte s výsledkem úlohy a).

c1) Integrál  $I$  z úlohy a) počítejte přibližně numerickou integrací devítibodovým Gaussovým schématem. Uveďte výraz, jímž je dána numerická integrace, v podobě připravené pro numerické vyčíslení.

c2) Vyčíslete výraz získaný splněním úkolu c1) a výsledky numerické integrace srovnejte s výsledky úloh a) a b2).

**Příklad 2:** a) Na ploše (geografickém lichoběžníku)

$$\sigma_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \wedge x < 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge \frac{2\sqrt{3}z}{3} < r\},$$

kde  $r > 0$  je daný parametr, vypočítejte plošný integrál funkce  $f(x, y, z) = 10x^2yz$ .

b1) Integrál z úkolu a) vypočítejte přibližně numerickou integrací obdélníkovou metodou ve variantě „střed“ aplikovanou ve směru zeměpisné délky s rovnoměrným dělením na tři podintervaly a ve směru zeměpisné šířky s rovnoměrným dělením na dva podintervaly. Uveďte výraz, jímž je dána numerická integrace, v podobě připravené pro bezprostřední numerické vyčíslení.

b2) Vyčíslete výraz získaný splněním úkolu b1) a výsledek numerické integrace srovnejte s výsledkem úlohy a).

c1) Integrál z úkolu a) vypočítejte přibližně numerickou integrací Gaussovou metodou jednak se čtyřmi a také s devíti body. V obou případech uveďte výraz, jímž je dána numerická integrace, v podobě připravené pro bezprostřední numerické vyčíslení.

c2) Vyčíslete výrazy získané splněním úkolu c1) a výsledky numerické integrace srovnejte s výsledkem úloh a) a b2).

**Příklad 3:** Vypočítejte tok vektorové funkce  $\mathbf{g} = (x, y, z)$  plochou  $\sigma$ , která je dána grafem funkce  $f(x, y) = y \ln(-x)$ , přičemž  $(x, y) \in \Omega$  a oblast  $\Omega$  je vymezena křivkami  $y = x^2 - 7$ ,  $y = x$ ,  $x = -2$  a  $x = -1$ . Plocha  $\sigma$  je orientována jednotkovým normálovým vektorem, jehož třetí souřadnice je záporná.

BODY Z PÍSEMKY:<sup>a</sup>

BODY Z TESTU:

BODY Z DŮ:

CELKEM:

ZÁPOČET:

ZNÁMKA:

<sup>a</sup>Nutná podmínka pro udělení zápočtu – aspoň ... bodů.

(Řešení na další stránce.)

<sup>1</sup>Příklady 1 a 2 jsou si velmi podobné a splnění všech jejich úkolů (a to i bez příkladu 3) by bylo časově neúnosné. Tato ukázková písemka tedy není ukázkou skutečné písemky, nýbrž slouží jako ukáзка některých z možných typů úloh. A to záměrně obtížnějších, protože na jejich promyšlení je při samostudiu dostatek času. V zadání písemné práce budou úlohy časově méně náročné.

**Řešení příkladu 1:** a) Integrál  $I$  je dvojnásobný integrál

$$I = \int_1^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2)) dx dy. \quad (1)$$

Vnitřní integrál upravíme substitucí (v níž  $x$  vystupuje jako proměnná a  $y$  jako konstanta)  $t = xy^2$ ,  $dt = y^2 dx$  a změnou mezí  $x = \pi/2 \mapsto t = \pi y^2/2$ ,  $x = \pi \mapsto t = \pi y^2$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \left( \frac{2}{y} \cos(xy^2) - \frac{2xy^2}{y} \sin(xy^2) \right) y^2 dx dy \\ &= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}y^2}^{\pi y^2} \left( \frac{2}{y} \cos t - 2 \frac{t}{y} \sin t \right) dt dy = \int_1^2 \frac{2}{y} \int_{\frac{\pi}{2}y^2}^{\pi y^2} (\cos t - t \sin t) dt dy. \end{aligned}$$

Při výpočtu vnitřního integrálu uplatníme integraci po částech

$$\int t \sin t dt = \left| \begin{array}{cc} u = t & u' = 1 \\ v' = \sin t & v = -\cos t \end{array} \right| = -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \sin t$$

a poté substituci  $w = \pi y^2$ . Konkrétně

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{2}{y} \int_{\frac{\pi}{2}y^2}^{\pi y^2} (\cos t - t \sin t) dt dy = \int_1^2 \frac{2}{y} \left[ \sin t - (-t \cos t + \sin t) \right]_{\frac{\pi}{2}y^2}^{\pi y^2} dy \\ &= \int_1^2 \frac{2}{y} \left[ t \cos t \right]_{\frac{\pi}{2}y^2}^{\pi y^2} dy = \int_1^2 \frac{2}{y} \left( \pi y^2 \cos(\pi y^2) - \frac{\pi}{2} y^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2\right) \right) dy \\ &= \int_1^2 \left( 2\pi y \cos(\pi y^2) - \pi y \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2\right) \right) dy = \left| \begin{array}{cc} w = \pi y^2 & dw = 2\pi y dy \\ y = 1 \mapsto w = \pi & y = 2 \mapsto w = 4\pi \end{array} \right| \\ &= \int_{\pi}^{4\pi} \left( \cos w - \frac{1}{2} \cos \frac{w}{2} \right) dw = \left[ \sin w - \sin \frac{w}{2} \right]_{\pi}^{4\pi} = 0 - 0 - (0 - 1) = 1. \quad (2) \end{aligned}$$

b1) Připomeňme Gaussovu-Legendrovu integraci funkce  $g$  dvou proměnných na čtverci  $[-1, 1]^2$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(s, t) ds dt \approx \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_t} w_{s_i} w_{t_j} g(s_i, t_j), \quad (3)$$

kde  $s_i$ , resp.  $t_j$ , jsou kořeny Legendrova polynomu stupně  $n_s$ , resp.  $n_t$ . Čísla  $w_{s_i}$  a  $w_{t_j}$  jsou odpovídající váhy z Gaussovy-Legendrovy 1D integrace.

Kvůli vztahu (3) je nutné převést integrál (1) z obdélníka  $[\pi/2, \pi] \times [1, 2]$  na integraci na čtverci  $[-1, 1]^2$ .

Připomeňme zobrazení čtverce na obdélník (viz též prezentaci z přednášky), které dvojici souřadnic  $(s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  přiřadí dvojici souřadnic  $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$

$$x = \frac{(s+1)(b-a)}{2} + a = \frac{(b-a)s + a + b}{2}, \quad y = \frac{(t+1)(d-c)}{2} + c = \frac{(d-c)t + c + d}{2},$$

$$J(s, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b-a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d-c}{2} \end{vmatrix} = \frac{(b-a)(d-c)}{4},$$

kde  $J(s, t)$  je jakobián zobrazení čtverce  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  na obdélník  $[a, b] \times [c, d]$ . Pro náš integrál (1) je  $a = \pi/2$ ,  $b = \pi$ ,  $c = 1$ ,  $d = 2$ ,  $J(s, t) = \frac{\pi}{8}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}(s+3)$ ,  $y = \frac{1}{2}(t+3)$  a

$$I = \frac{\pi}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{f\left(\frac{\pi}{4}(s+3), \frac{1}{2}(t+3)\right)}_{g(s, t) \text{ v (3)}} ds dt. \quad (4)$$

Nyní již můžeme uplatnit (3) na výpočet integrálu (4), přičemž čtyřbodovému schématu odpovídá  $n_s = 2 = n_t$  a

$$s_1 = t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad s_2 = t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad w_{s_1} = w_{s_2} = w_{t_1} = w_{t_2} = 1.$$

Konkrétně,

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{\pi}{8} (g(s_1, t_1) + g(s_1, t_2) + g(s_2, t_1) + g(s_2, t_2)) \\ &= \frac{\pi}{8} \left( f\left(\frac{\pi}{4}(s_1 + 3), \frac{1}{2}(t_1 + 3)\right) + f\left(\frac{\pi}{4}(s_1 + 3), \frac{1}{2}(t_2 + 3)\right) \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{8} \left( f\left(\frac{\pi}{4}(s_2 + 3), \frac{1}{2}(t_1 + 3)\right) + f\left(\frac{\pi}{4}(s_2 + 3), \frac{1}{2}(t_2 + 3)\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \left( f\left(\frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\right), \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\right)\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 3\right)\right) \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{8} \left( f\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 3\right), \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\right)\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 3\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 3\right)\right) \right). \end{aligned}$$

b2) I s pomocí kalkulačky se zdá vyčíslení předchozího výrazu poměrně pracné. Výpočty si lze usnadnit tím, že si připravíme mezivýsledky pro  $xy^2$  a integrovaný výraz v (1) upravíme na

$$f(x, y) = 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2) = 2y (\cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2)).$$

Dospějeme k<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} I &\approx 0,3926990818(-4,593306312 + 7,742139895 + 6,952974016 - 16,81533963) \\ &= -2,636397864, \end{aligned} \tag{5}$$

což je hodnota nečekaně vzdálená od (2).

c1) Devítibodové integrační schéma je dáno parametry  $n_s = 3 = n_t$  a

$$\begin{aligned} s_1 = t_1 &= -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad s_2 = t_2 = 0, \quad s_3 = t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \\ w_{s_1} = w_{s_3} = w_{t_1} = w_{t_3} &= \frac{5}{9}, \quad w_{s_2} = w_{t_2} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Váhy se již nerovnají jedné, musíme je uvést v příslušném výrazu, tj.

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{\pi}{8} \left( \frac{25}{81} g(s_1, t_1) + \frac{40}{81} g(s_1, t_2) + \frac{25}{81} g(s_1, t_3) + \frac{40}{81} g(s_2, t_1) + \frac{64}{81} g(s_2, t_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{40}{81} g(s_2, t_3) + \frac{25}{81} g(s_3, t_1) + \frac{40}{81} g(s_3, t_2) + \frac{25}{81} g(s_3, t_3) \right) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{8 \cdot 81} \left( 25(g(s_1, t_1) + g(s_1, t_3) + g(s_3, t_1) + g(s_3, t_3)) + 64g(s_2, t_2) \right. \\ &\quad \left. + 40(g(s_1, t_2) + g(s_2, t_1) + g(s_2, t_3) + g(s_3, t_2)) \right). \end{aligned} \tag{7}$$

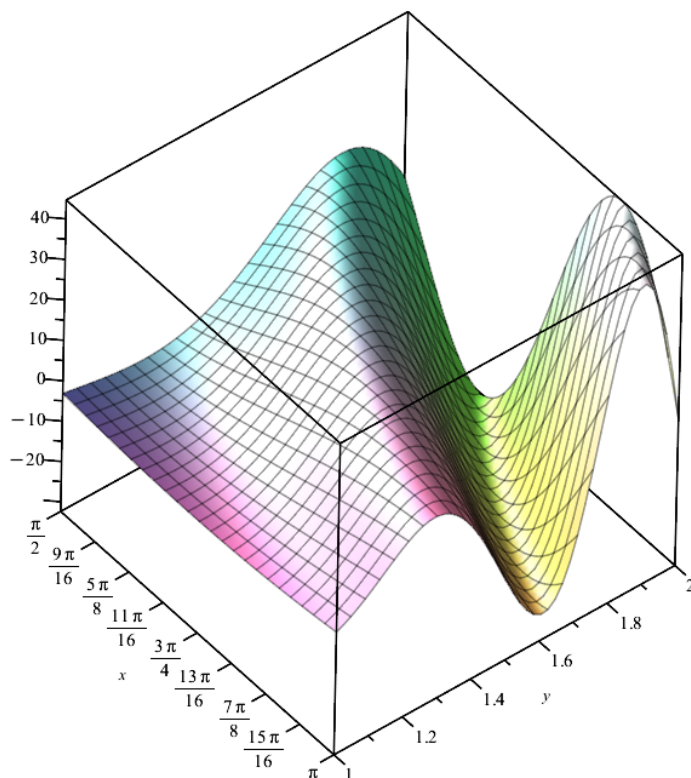
Rozepsání do výrazu s argumenty funkce  $f$  je analogické jako v části a1), jen delší.

c2) Také vyčíslení výrazu (7) je pracnější než v části a2). Vyjde

$$I \approx 2,999980355, \tag{8}$$

---

<sup>2</sup>Poslední dvě až tři desetinná místa se mohou lišit podle použité výpočetní techniky a zvoleného postupu vyčíslení.



OBRÁZEK 1. K příkladu 1. Graf funkce  $f$ .

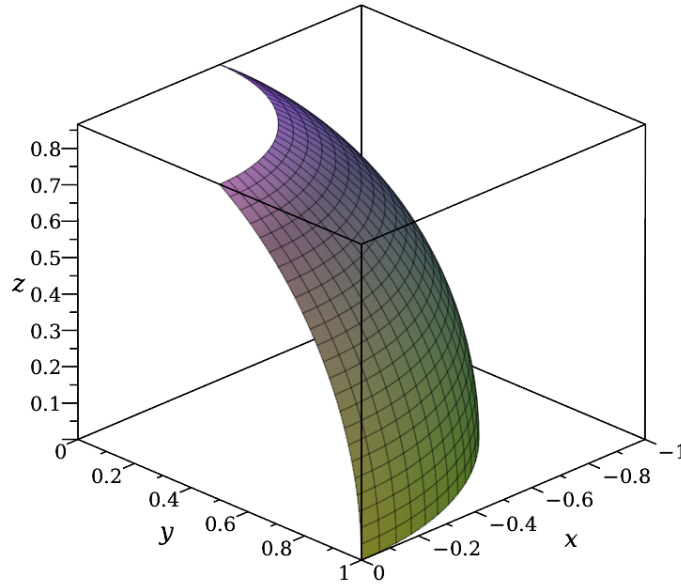
což sice je proti (5) zlepšení, ale ve srovnání s (2) neuspokojivé.

**Poznámka:** Důvod nepřesnosti použité numerické integrace je patrný z grafu funkce  $f$ , viz obr. 1.

Vidíme, že funkce  $f$  na obdélníku  $[\pi/2, \pi] \times [1, 2]$  má výrazně zvlněný graf a nabývá maxima cca 40 a minima cca  $-30$ , přičemž její integrál je roven jedné, takže objemy mezi rovinou  $xy$  a kladnými částmi grafu a mezi rovinou  $xy$  a zápornými částmi grafu se liší jen o jedničku. Takové chování lze stěží dostatečně přesně vystihnout čtyřmi, případně devíti body, v nichž vyčíslíme hodnotu funkce  $f$ . Hlubší příčina tkví v tom, že G-L integrace je přesná pro polynomy jistých stupňů, pokud tedy integrovanou funkci lze dosti přesně vystihnout takovým polynomem, bude i výsledek její numerické G-L integrace dosti blízko k hodnotě přesné integrace. Pro dobré vystižení grafu naší funkce  $f$  však polynomy nižších stupňů nestačí, proto není překvapivé, že numerická integrace zpočátku nedává dobré výsledky.

Výpočetními pokusy byste zjistili, že G-L integrace s 16 body dává  $I \approx 0,6802346987$ , a teprve 25 integračních bodů vede k uspokojivému přiblížení k přesné hodnotě integrálu, konkrétně  $I \approx 1,010213886$ .

Ke zvýšení přesnosti numerické integrace se praxi také zvyšuje počet integračních bodů, avšak obvykle nikoli cestou zvyšování stupně aproximačních polynomů (které stojí v pozadí G-L integrační metody), nýbrž rozdělením integrační oblasti na několik menších podoblastí, na nichž se pak integruje čtyřbodovou nebo devítibodovou formulí. V našem



OBRÁZEK 2. K příkladu 2. Plocha  $\sigma_r$ , kde  $r = 1$ .

případě například

$$I = \int_1^2 \int_{\pi/2}^{\pi} f(x, y) dx dy = \int_1^{3/2} \int_{\pi/2}^{3\pi/4} f(x, y) dx dy + \int_1^{3/2} \int_{3\pi/4}^{\pi} f(x, y) dx dy \\ + \int_{3/2}^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/4} f(x, y) dx dy + \int_{3/2}^2 \int_{3\pi/4}^{\pi} f(x, y) dx dy$$

a každý ze čtyř dvojnásobných integrálů pak integrujeme numericky. Při použití čtyřbodového schématu dostaneme  $I \approx 2,008578995$ , při devítibodovém schématu  $I \approx 0,927420046$  a při šestnáctibodovém  $1,001572616$ .

**Řešení příkladu 2:** a) Plocha  $\sigma_r$  je částí kulové plochy (sféry) vymezenou rovinami  $yz$  a  $xz$  a dvěma rovinami rovnoběžnými se souřadnou rovinou  $xy$ , viz obr. 2.

Plochu můžeme parametrizovat výrazy, které známe ze substituce do sférických souřadnic, tj. s využitím vztahů  $x = r \cos \lambda \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \lambda \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$ . Plochu  $\sigma_r$  tedy budeme parametrizovat zobrazením

$$\mathbf{G}(r; \lambda, \varphi) = (r \cos \lambda \cos \varphi, r \sin \lambda \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Rozsahy  $\lambda \in (\pi/2, \pi)$  a  $\varphi \in (0, \pi/3)$  lze odvodit např. úvahou nebo z náčrtku, případně výpočtem z nerovností vymezujících plochu

$$z > 0 \Rightarrow r \sin \varphi > 0 \stackrel{r>0}{\Rightarrow} \sin \varphi > 0 \quad \varphi \in (0, \pi/2), \quad (9)$$

$$\frac{2\sqrt{3}z}{3} < r \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}r \sin \varphi}{3} < r \Rightarrow \sin \varphi < \sqrt{3}/2 \stackrel{(9)}{\Rightarrow} \boxed{\varphi \in (0, \pi/3)}, \quad (10)$$

$$x < 0 \Rightarrow r \cos \lambda \cos \varphi < 0 \stackrel{r>0, \cos \varphi > 0}{\Rightarrow} \cos \lambda < 0 \Rightarrow \lambda \in (\pi/2, 3\pi/2); \quad (11)$$

$$y > 0 \Rightarrow r \sin \lambda \cos \varphi > 0 \stackrel{r>0, \cos \varphi > 0}{\Rightarrow} \sin \lambda > 0 \Rightarrow \lambda \in (0, \pi); \quad (12)$$

$$(11) \text{ a } (12) \Rightarrow \boxed{\lambda \in (\pi/2, \pi)},$$

kde jsme v (9) využili toho, že z principu je (zeměpisná šířka)  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , avšak výsledek integrace nezáleží na konečném počtu hodnot úhlů, tedy se můžeme omezit na základní interval  $(-\pi/2, \pi/2)$  v kombinaci s nerovností  $\sin \varphi > 0$ .

Než začneme integrovat, spočteme<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{G}_\lambda(r; \lambda, \varphi) \times \mathbf{G}_\varphi(r; \lambda, \varphi)\| \\
&= \|(-r \sin \lambda \cos \varphi, r \cos \lambda \cos \varphi, 0) \times (-r \cos \lambda \sin \varphi, -r \sin \lambda \sin \varphi, r \cos \varphi)\| \\
&= \|(r \cos \lambda \cos \varphi r \cos \varphi - 0, 0 + r \sin \lambda \cos \varphi r \cos \varphi, \\
&\quad r \sin \lambda \cos \varphi r \sin \lambda \sin \varphi + r \cos \lambda \cos \varphi r \cos \lambda \sin \varphi)\| \\
&= \|(r^2 \cos \lambda \cos^2 \varphi, r^2 \sin \lambda \cos^2 \varphi, r^2 \sin^2 \lambda \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \cos^2 \lambda \cos \varphi \sin \varphi)\| \\
&= \|(r^2 \cos \lambda \cos^2 \varphi, r^2 \sin \lambda \cos^2 \varphi, r^2 \cos \varphi \sin \varphi)\| \\
&= \sqrt{r^4 \cos^2 \lambda \cos^4 \varphi + r^4 \sin^2 \lambda \cos^4 \varphi + r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \\
&= r^2 \sqrt{\cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = r^2 \sqrt{\cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = r^2 \cos \varphi,
\end{aligned}$$

kde jsme využili rovností  $\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda = 1$ ,  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  a toho, že<sup>4</sup> pro  $\varphi \in (0, \pi/3)$  je  $\cos \varphi > 0$ .

Funkci  $f$  vyjádříme v proměnných  $\lambda$ ,  $\varphi$  a s parametrem  $r$ , transformovanou funkci označíme  $\hat{f}$ . Konkrétně

$$\begin{aligned}
\hat{f}(r; \lambda, \varphi) &= 10(r \cos \lambda \cos \varphi)^2 r \sin \lambda \cos \varphi r \sin \varphi \\
&= 10r^4 \sin \lambda \cos^2 \lambda \sin \varphi \cos^3 \varphi.
\end{aligned}$$

Nyní již můžeme integrovat<sup>5</sup>

$$I = \iint_{\sigma_r} f dS = 10 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/3} r^4 \sin \lambda \cos^2 \lambda \sin \varphi \cos^3 \varphi r^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda \quad (13)$$

$$= 10r^6 \int_{\pi/2}^{\pi} \underbrace{\sin \lambda \cos^2 \lambda}_{g(\lambda)} d\lambda \int_0^{\pi/3} \underbrace{\sin \varphi \cos^4 \varphi}_{q(\varphi)} d\varphi \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
&= 10r^6 \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \lambda \right]_{\lambda=\pi/2}^{\lambda=\pi} \left[ -\frac{1}{5} \cos^5 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/3} \\
&= \frac{10r^6}{15} (-1 - 0) \left( \frac{1}{32} - 1 \right) = \frac{2r^6}{3} \frac{31}{32} = \frac{r^6}{3} \frac{31}{16} = \frac{31}{48} r^6 \approx 0,6458333333r^6, \quad (15)
\end{aligned}$$

což je hledaný přesný výsledek a jeho numerické přiblížení na 10 desetinných míst.

b1) Cílem je numericky aproximovat dvojnásobný integrál funkce  $g(\lambda)q(\varphi)$ , viz řešení úkolu a). Z (14) plyne, že postačí numericky integrovat dvě funkce jedné proměnné. Interval  $(\pi/2, \pi)$  rozdělíme na tři podintervaly délky  $h_\lambda = \pi/6$ , integrační body budou v jejich středech:  $\lambda_1 = 7\pi/12$ ,  $\lambda_2 = 3\pi/4$  a  $\lambda_3 = 11\pi/12$ . Interval  $(0, \pi/3)$  rozdělíme na dva podintervaly délky  $h_\varphi = \pi/6$ , integrační body budou v jejich středech:  $\varphi_1 = \pi/12$  a  $\varphi_2 = \pi/4$ . Počítejme pomocí numerické aproximace součinu integrálů v (14)

$$I \approx 10r^6 (g(\lambda_1) + g(\lambda_2) + g(\lambda_3)) (q(\varphi_1) + q(\varphi_2)) h_\lambda h_\varphi. \quad (16)$$

<sup>3</sup>Jde délku normálového vektoru daného vektorovým součinem tečných vektorů získaných parciální derivací funkce  $\mathbf{G}$  podle  $\lambda$  a  $\varphi$ .

<sup>4</sup>Zaměřujeme se na  $\varphi \in (0, \pi/3)$ , viz (10), i když  $\cos \varphi > 0$  platí na větším intervalu.

<sup>5</sup>Po transformaci souřadnic integrujeme součin  $\hat{f}(r; \lambda, \varphi) \|\mathbf{G}_\lambda(r; \lambda, \varphi) \times \mathbf{G}_\varphi(r; \lambda, \varphi)\|$ .

Výraz (16) je přípravou k bezprostřednímu výpočtu numerické aproximace hodnoty  $I$ .<sup>6</sup>

b2) Nyní postačí dosadit do výrazu (16)

$$I \approx 10r^6 \cdot 0,6597396084 \cdot 0,4020819615 \cdot 0,2741556779 \approx 0,7272511103r^6. \quad (17)$$

Při srovnání s (15) vidíme, že numerický výpočet integrálu vedl k přecenění hodnoty  $I$ .

c1) Nejprve je nutné integraci (14) převést na integraci na čtverci  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Ve speciálním případě (14), kdy se integrace na čtverci rovná součinu integrálů na intervalu  $[-1, 1]$ , postačí jednotlivé integrály v (14) transformovat na interval  $[-1, 1]$ .<sup>7</sup> V případě proměnné  $\lambda$  se interval  $[-1, 1]$  má zobrazit na interval  $[\pi/2, \pi]$ , a to nejjednodušším způsobem, tj. lineárně, konkrétně vztahem  $\lambda = cu + d$ , kde  $u \in [-1, 1]$ . Odtud získáme jak rovnice  $\pi/2 = -c + d$  a  $\pi = c + d$  s řešením  $c = \pi/4$ ,  $d = 3\pi/4$ , tak poté vztah  $d\lambda = \frac{\pi}{4}du$ . Obdobně u proměnné  $\varphi = \alpha v + \beta$  dostaneme rovnice  $0 = -\alpha + \beta$ ,  $\pi/3 = \alpha + \beta$  s řešením  $\alpha = \pi/6$ ,  $\beta = \pi/6$ , jakož i  $d\varphi = \frac{\pi}{6}dv$ .<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} I &= 10r^6 \int_{\pi/2}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \int_0^{\pi/3} q(\varphi) d\varphi \\ &= 10r^6 \int_{-1}^1 g\left(\frac{\pi}{4}u + \frac{3\pi}{4}\right) \frac{\pi}{4} du \int_{-1}^1 q\left(\frac{\pi}{6}v + \frac{\pi}{6}\right) \frac{\pi}{6} dv \\ &= \frac{5\pi^2 r^6}{12} \int_{-1}^1 \underbrace{g\left(\frac{\pi}{4}u + \frac{3\pi}{4}\right)}_{\hat{g}(u)} du \int_{-1}^1 \underbrace{q\left(\frac{\pi}{6}v + \frac{\pi}{6}\right)}_{\hat{q}(v)} dv \end{aligned} \quad (18)$$

Integrály v (18) spočítáme přibližně čtyřbodovým Gaussovým schématem na čtverci  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , tj. s dvoubodovým schématem s uzly  $\pm 1/\sqrt{3}$  a vahami 1 na intervalu  $[-1, 1]$ .

$$I \approx \frac{5\pi^2 r^6}{12} \left( \hat{g}(-1/\sqrt{3}) \cdot 1 + \hat{g}(1/\sqrt{3}) \cdot 1 \right) \left( \hat{q}(-1/\sqrt{3}) \cdot 1 + \hat{q}(1/\sqrt{3}) \cdot 1 \right). \quad (19)$$

Devítibodové Gaussovo schéma na čtverci uplatněné na (18) je odvozeno z postavení tří bodů na intervalu  $[-1, 1]$  jak na ose  $u$ , tak na ose  $v$ . Body  $-\sqrt{3}/5$ ,  $0$ ,  $\sqrt{3}/5$  mají váhy (po řadě)  $5/9$ ,  $8/9$ ,  $5/9$ . Numerická integrace:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{5\pi^2 r^6}{12} \left( \hat{g}(-\sqrt{3}/5) \cdot 5/9 + \hat{g}(0) \cdot 8/9 + \hat{g}(\sqrt{3}/5) \cdot 5/9 \right) \\ &\quad \times \left( \hat{q}(-\sqrt{3}/5) \cdot 5/9 + \hat{q}(0) \cdot 8/9 + \hat{q}(\sqrt{3}/5) \cdot 5/9 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>6</sup>Požaduje se jen zápis numerického schématu ve tvaru (16) s údaji o hodnotách zúčastněných proměnných a parametrů, případně po jejich dosazení, tj.

$$I \approx 10r^6 (g(7\pi/12) + g(3\pi/4) + g(11\pi/12)) (q(\pi/12) + q(\pi/4)) \pi^2/36.$$

Dále obdobně, viz (19) a (20).

<sup>7</sup>Podívejme se, co lze vyčíst z (3), jestliže funkci  $g$  lze vyjádřit jako součin dvou funkcí jedné proměnné, tj.  $g(s, t) = p(s)q(t)$ . Pak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_t} w_{s_i} w_{t_j} g(s_i, t_j) &= \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_t} w_{s_i} p(s_i) w_{t_j} q(t_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n_s} w_{s_i} p(s_i) \left( \sum_{j=1}^{n_t} w_{t_j} q(t_j) \right) = \left( \sum_{j=1}^{n_t} w_{t_j} q(t_j) \right) \left( \sum_{i=1}^{n_s} w_{s_i} p(s_i) \right), \end{aligned}$$

což odpovídá součinu numerické G-L integrace funkce  $p$  na intervalu  $[-1, 1]$  a numerické G-L integrace funkce  $q$  na intervalu  $[-1, 1]$ . Odtud plyne vztah mezi čtyřbodovou (devítibodovou) numerickou integrací na čtverci  $[-1, 1]^2$  a dvoubodovou (tříbodovou) integrací jednotlivých funkcí na intervalu  $[-1, 1]$ .

<sup>8</sup>Nebo lze použít příslušné vztahy z řešení části b1) příkladu 1.

c2) Dosadíme do výrazu (19) odpovídajícímu čtyřbodovému schématu

$$I \approx \frac{5\pi^2 r^6}{12} 0,3916798988 \cdot 0,3541071099 = 0,5703670580 r^6. \quad (21)$$

Pozorujeme, že numerický výpočet integrálu vedl k podcenění hodnoty  $I$  z (15).

Z výrazu (20) odpovídajícímu devítibodovému schématu po dosazení dostaneme

$$I \approx \frac{5\pi^2 r^6}{12} 0,4260339178 \cdot 0,3707179153 = 0,6494956609 r^6. \quad (22)$$

Srovnání s (15), (17), (21) a (22) ukazuje, že nyní numerický výpočet už celkem uspokojivě aproximuje přesnou hodnotu integrálu.

**Řešení příkladu 3:** Pro integraci je vhodné mít jasnou představu o oblasti  $\Omega$ :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-2, -1) \wedge x^2 - 7 < y < x\} \quad (23)$$

Dále je nutné určit normálový vektor plochy  $\sigma$ . Lze postupovat dvěma způsoby. Můžeme si například připomenout, že v Matematice 2 jsme zjistili, že normálový vektor grafu funkce  $z = f(x, y)$  v bodě  $[x, y, f(x, y)]$  je dán výrazem (kde  $A = (x, y)$ )

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1 \right) = \left( \frac{y}{x}, \ln(-x), -1 \right), \quad (24)$$

jenž odpovídá gradientu funkce  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$  v bodě  $[x, y, f(x, y)]$ .

Nebo můžeme postupovat pomocí parametrizace  $\mathbf{X}$  plochy  $\sigma$ . Parametrizaci bodu  $[x, y, z] \in \sigma$  vyčteme přímo ze zadání úlohy

$$(x, y, z) = \mathbf{X}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

kde<sup>9</sup>  $(u, v) \in \Omega$ , proměnná  $u$  je totožná s proměnnou  $x$  a proměnná  $v$  je totožná s proměnnou  $y$ . Tečné vektory v bodě  $[u, v, f(u, v)]$  jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right) = \left( 1, 0, \frac{v}{u} \right), \\ \mathbf{X}_v &= \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right) = (0, 1, \ln(-u)). \end{aligned}$$

Normálový vektor  $\hat{\mathbf{n}}$  získáme vektorovým součinem

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = \left( 1, 0, \frac{v}{u} \right) \times (0, 1, \ln(-u)) = \left( -\frac{v}{u}, -\ln(-u), 1 \right).$$

Vidíme, že třetí souřadnice vektoru  $\hat{\mathbf{n}}$  je kladná, k výpočtu tedy použijeme normálový vektor opačně orientovaný, viz (24).

---

<sup>9</sup>Proměnné  $u$  a  $v$  jsou zavedeny jen kvůli značení parametrizace plochy v oficiálním taháku. Je ovšem možné zůstat u proměnných  $x$  a  $y$  a napsat parametrizaci pro ně. Ostatně níže při výpočtu toku plochou využíváme toho, že  $x \equiv u$  a  $y \equiv v$ . Roli  $\vec{F}$ , viz tahák, v naší úloze hraje vektorová funkce  $\mathbf{g}$ .

Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu toku

$$\begin{aligned}
 \iint_{\sigma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\sigma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{-2}^{-1} \int_{x^2-7}^x (x, y, y \ln(-x)) \cdot \left( \frac{y}{x}, \ln(-x), -1 \right) dy dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} \int_{x^2-7}^x (y + y \ln(-x) - y \ln(-x)) dy dx = \int_{-2}^{-1} \int_{x^2-7}^x y dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} [y^2]_{x^2-7}^x dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} (x^2 - (x^4 - 14x^2 + 49)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} (-x^4 + 15x^2 - 49) dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{5}x^5 + 5x^3 - 49x \right]_{-2}^{-1} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{5} - 5 + 49 - \left( -\frac{32}{5} - 40 + 98 \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{31}{5} + 44 - 58 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{31}{5} - 14 \right] = -\frac{101}{10}.
 \end{aligned}$$