

Příklady k malému zopakování témat cvičení z MA3G

Dobrým zdrojem úloh na vícenásobné a křivkové integrály jsou elektronické sbírky dr. Zdeňka Šibravy — viz odkazy na stránce vyučujícího k předmětu MA3G. Příklady uvedené níže hrají roli malých domácích úkolů organizovaných podle jednotlivých cvičení. Zdrojem je *Sbírka příkladů z Matematiky II* (E. Brožíková, M. Kittlerová, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002).

1. CVIČENÍ

Příklad: Vypočítejte $\iint_M \frac{xye^{x^2}}{y^2 + 3} dx dy$, kde $M : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$.

Výsledek: $\frac{\ln 2}{2} (e^4 - 1)$

Příklad: Vypočítejte $\iint_M \frac{1}{x^2 + 1} dx dy$, kde oblast M je vymezena grafy funkcí $y = 2x - x^2$ a $y = -x$.

Výsledek: $\frac{3}{2} \ln 10 + \arctg 3 - 3$

2. CVIČENÍ

Příklad: Vypočítejte $\iint_M x dx dy$; souřadnice bodů množiny M vyhovují nerovnosti

$$(x - 2)^2 + \frac{(y - 1)^2}{4} \leq 1.$$

(Rada: Použijte transformaci souřadnic $x = 2 + r \cos \varphi$, $y = 1 + 2r \sin \varphi$, nezapomeňte na jakobián.)

Výsledek: 4π

3. CVIČENÍ

Určete těžiště rovinné desky omezené křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$, je-li plošná hustota $\rho = 10$. Jak se změní poloha těžiště při $\rho = 3$?

(Poznámky: Příklad je podobný příkladu počítanému na přednášce (viz prezentaci), ale jednodušší. Načrtněte si obrázek, při výpočtu použijte standardní polární souřadnice, nezapomeňte na jakobián.)

Výsledek: $m = 30\pi$, $S_y = 70\pi$, $T = \left[\frac{7}{3}, 0 \right]$; nezmění se

4. CVIČENÍ

Vypočítejte $\iiint_M y \cos(x + z) dx dy dz$, kde množina M je omezená plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \pi/2$.

(Poznámky: Zkuste si načrtnout obrázek. Uvědomte si, že plochy leží v prostoru, z něhož vydělují omezené těleso M . Např. plochu $y = \sqrt{x}$ tvoří rovnoběžky s osou z , jejichž průsečíky s rovinou xy vytvářejí v rovině xy křivku $y = \sqrt{x}$; rovina $x + z = \pi/2$ je rovnoběžná s osou y . Dále si uvědomte, že meze vnějšího integrálu musejí být pevné, doporučuji za ně zvolit koncové body integračního intervalu proměnné x . V průběhu výpočtu se asi nevyhnete integraci výrazu $x \sin x$, uplatněte metodu integrace po částech.)

Výsledek: $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$