

Předmět: MM1G

Dnešní látka

- ▶ základní množiny čísel
- ▶ zobrazení, funkce
- ▶ posloupnost reálných čísel
- ▶ limita posloupnosti reálných čísel

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, oddíl I,
kapitola 4

Text doc. A. Nekvindy

<https://mat.fsv.cvut.cz/nales/prednasky/kniha.pdf>

kapitola 1, str. 2 až 5

Schopnost samostudia — důležitá součást VŠ vzdělání

Složky matematického textu

- ▶ **definice** — pomocí již známých pojmů zavádí a pojmenovává nový pojem (Řekneme, že funkce f je kladná na intervalu I , jestliže pro každé $x \in I$ platí $f(x) > 0$.)
- ▶ **věta, lemma** — nejprve vysloví předpoklady, pak formuluje tvrzení (Jestliže funkce f a g jsou kladné na intervalu I , pak také funkce $h = f \cdot g$ je kladná na intervalu I .)
- ▶ **důkaz** — logický řetězec úvah, který začíná známými vlastnostmi a vztahy a končí odvozením tvrzení věty (lemmatu)
- ▶ **výklad** — vysvětlující text, který propojuje definice, věty, lemmata a důkazy a pomáhá čtenáři pochopit souvislosti; také důkazy mívají výkladovou složku, aby byly pro čtenáře srozumitelnější

Základní množiny čísel

Množina je souhrn nějakých předmětů (pro nás obvykle matematických objektů), které se jmenují **prvky** množiny, je plně určena svými prvky. Mají-li množiny A , B tytéž prvky, říkáme, že jsou si rovny, píšeme $A = B$.

$\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ množina všech racionálních čísel (zlomků s celočíselným čitatelem a nenulovým celočíselným jmenovatelem)

$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel

$\emptyset$ prázdná množina, neobsahuje ani jeden prvek

Definice: Množina A se nazývá **podmnožina** množiny B , značíme $A \subset B$, je-li každý prvek množiny A zároveň prvkem množiny B , tj. $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Poznámka: Významy: $\in$ je prvkem; $\Leftrightarrow$ právě tehdy, když;
 $\Rightarrow$ jestliže, pak; z toho plyne;

Pozorování: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Zobrazení, funkce

Definice: Necht' jsou dány množiny A a B . Řekneme, že je dáno **zobrazení f množiny A do množiny B** (značíme $f : A \rightarrow B$), je-li dán předpis, podle kterého je každému prvku $x \in A$ jednoznačně přiřazen určitý prvek $y \in B$. Tento prvek pak značíme $f(x)$ a nazýváme **obraz prvku x** . Prvek x se nazývá **vzor** prvku $f(x)$. Množině A se říká **(definiční) obor** zobrazení f . Často se definičním oborem myslí **maximální** definiční obor, tj. množina všech prvků, pro něž má předpis smysl.

Definice: Zobrazení $M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, říkáme (reálná) **funkce** ((jedné) reálné proměnné).

Příklady: Funkce g reálné proměnné, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, daná předpisem $g(x) = 2 + x^3$.
Nebo $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $h(x) = \ln(x - 5)$ pro $x \in M = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 5\}$.

Posloupnost reálných čísel

Definice: Přiřadíme-li každému přirozenému číslu n reálné číslo a_n a čísla a_n seřadíme podle rostoucích indexů, říkáme, že jsme vytvořili **posloupnost**. Značíme ji $a_1, a_2, \dots$ nebo $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo stručně $\{a_n\}$.

Ekvivalentní definice: Zobrazení $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ říkáme **posloupnost**. Místo $a(1), a(2), \dots$ píšeme $a_1, a_2, \dots$.

Příklad: Předpisem $a_n = \frac{(n-2)^2}{n^3}$, kde $n = 1, 2, 3, \dots$, je definována posloupnost

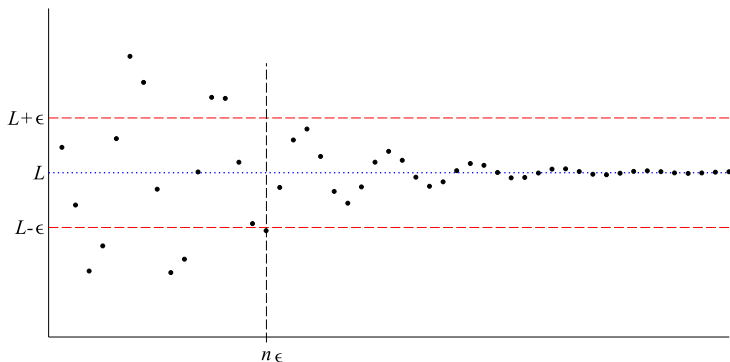
$$1, 0, \frac{1}{27}, \frac{1}{16}, \frac{9}{125}, \dots$$

Limita posloupnosti reálných čísel

Kvantifikátory: $\forall$ pro každý; $\exists$ existuje

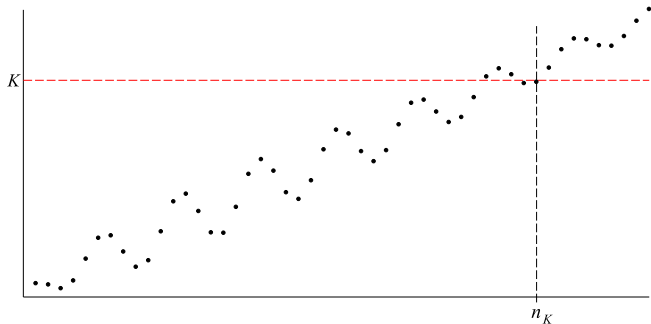
Definice: Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má (konečnou, vlastní) **limitu** L (konverguje k číslu $L \in \mathbb{R}$), jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (obecně závisí na ε), že pro všechna $n > n_\varepsilon$ je $|a_n - L| < \varepsilon$. Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Stručně $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$



Definice: Má-li posloupnost (konečnou) limitu, nazývá se **konvergentní**, v opačném případě **divergentní** (tj. má nevlastní limitu (viz níže) nebo nemá limitu).

Definice: Říkáme, že $\{a_n\}$ **diverguje k $+\infty$** (má nevlastní limitu $+\infty$), jestliže $\forall K > 0 \exists n_K \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > n_K \Rightarrow a_n > K)$.¹
Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.



¹Pro každé $K > 0$ existuje takové přirozené číslo n_K , že pro každé přirozené číslo n větší než n_K platí, že $a_n > K$.

Definice: Říkáme, že $\{a_n\}$ **diverguje k $-\infty$** (má nevlastní limitu $-\infty$), jestliže $\forall Q < 0 \exists n_Q \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > n_Q \Rightarrow a_n < Q)$.
Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Příklad (obtížný, raději přeskočit: Ukažme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, a to úvahou, konkrétně sevřením mezi dvě posloupnosti:
 $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{z^n} = z$, kde $z > 1$ je pevně zvoleno a n je dostatečně velké.

[Existuje takové n_z , aby platilo $n_z \leq z^{n_z}$? Ekvivalentně $\log n_z \leq n_z \log z$. Ano, stačí splnit $n_z \geq \frac{\log n_z}{\log z}$. Takové n_z jistě existuje, protože n roste lineárně a $\log n$ jen logaritmicky.] Máme

tedy $\forall z > 1 \forall n > n_z$ platí $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq z$.

Odtud $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Pozor — nedefinováno: $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$

Příklad:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(n^3 - 2n^4 + 8n^2)}_{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \underbrace{\left(\frac{1}{n} - 2 + \frac{8}{n^2}\right)}_{b_n} \\ &= (+\infty)(-2) = -\infty\end{aligned}$$

Získali jsme tip na nevlastní limitu, tj. $-\infty$, což můžeme ověřit dle definice na straně 8. Zvolme tedy nějaké $Q < 0$ a ptejme se, zda existuje $n_Q \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n > n_Q$ platí $a_n < Q$.

Pro $n \geq 4$ je $\frac{1}{n} - 2 + \frac{8}{n^2} < -1$, tj. $a_n < -n^4$. Stačí zvolit

$$n_Q = \left\lceil \sqrt[4]{-Q} \right\rceil. \text{ Pak } a_{n_Q} = b_{n_Q} n_Q^4 < -\left\lceil \sqrt[4]{-Q} \right\rceil^4 \leq Q.$$

Jelikož z $n > m$ plyne $a_n < a_m$ (neboť posloupnost $\{b_n\}$ je klesající), dostáváme $a_n < Q$ pro $\forall n > n_Q$.

V praxi se limitní hodnota už zpravidla neověřuje podle definice.

Příklad: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(-n)^3 - 7(-n)^2 - 6(-n) + 1000}{-3(-n)^3 + 20(-n) - 2}$. Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{5n^3 - 7n^2 - 6n + 1000}{-3n^3 + 20n - 2} &= \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^3 \left(5 - \frac{7}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1000}{n^3}\right)}{n^3 \left(-3 + \frac{20}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{5 - \frac{7}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1000}{n^3}}{-3 + \frac{20}{n^2} - \frac{2}{n^3}}}_{a_n} = \frac{5 - 0 - 0 + 0}{-3 + 0 - 0} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Opět bychom mohli detailně ověřit, že pro $L = -5/3$ platí definice limity, viz str. 6. Je však patrné, že výrazy $-\frac{7}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1000}{n^3}$ a $\frac{20}{n^2} - \frac{2}{n^3}$ se pro rostoucí n blíží k nule, takže při zvoleném $\varepsilon > 0$ bude pro všechna dostatečně velká n platit

$$\left| a_n - \left(-\frac{5}{3}\right) \right| < \varepsilon.$$

Příklad:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}{n^2 + n - n^2 - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{n\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{1 - \frac{1}{n}} = 2\end{aligned}$$

Důležité: Lze ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, Eulerovo číslo 2,718 281..., základ přirozených logaritmů.

Příklad: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n} = ?$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 1 + 1}{3n-1}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)^{3n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1+1} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)^1 = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

Ještě pár pojmů

Dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; posloupnost z ní **vybraná** $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$,
kde $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Např. $a_n = (-1)^n$, vybrané posloupnosti $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$
a $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$, kde $k = 1, 2, \dots$

Omezená zdola $\exists M \in \mathbb{R} \forall n a_n \geq M$.

Omezená shora $\exists M \in \mathbb{R} \forall n a_n \leq M$.

Omezená $\exists M \in \mathbb{R} \forall n |a_n| \leq M$, tj. omezená shora i zdola.

1. **Rostoucí** $\forall n a_{n+1} > a_n$.
2. **Neklesající** $\forall n a_{n+1} \geq a_n$.
3. **Nerostoucí** $\forall n a_{n+1} \leq a_n$.
4. **Klesající** $\forall n a_{n+1} < a_n$.

Společný název – **monotónní** posloupnosti (1. až 4.),
ryze monotónní posloupnosti (1. a 4.).

Některé poznatky:

- ▶ Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. (Plyne z definice limity.)
- ▶ Každá monotónní omezená posloupnost je konvergentní.
- ▶ Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, kde $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ větší než nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.
(Posloupnost $\{b_n\}$ je sevřená mezi posloupnostmi $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$, které mají stejnou limitu L . Příklad na další straně.)

Více Geo-matematika str. 33 (vydání z r. 2008).

Příklad: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n} = ?$

Povšimněme si, že pro každé přirozené číslo n platí řetězec rovností a nerovností

$$5 = \sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{2^n + 5^n} < \sqrt[n]{5^n + 5^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = 5 \sqrt[n]{2}.$$

Vyšetřovaná posloupnost $b_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$ je sevřena mezi posloupností $a_n = \sqrt[n]{5^n} = 5$ a posloupností $c_n = 5 \sqrt[n]{2}$.

Jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 5$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 \sqrt[n]{2} = 5$, platí i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n} = 5$.

Příklad (obtížný, úvahový): $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ?$, kde $b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

Platí: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$. Upravme

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}.$$

Pro každé zvolené $k \in \mathbb{N}$ (tedy na chvíli neměnné) platí

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq c_n^k = \sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}},$$

a to pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší než $k \in \mathbb{N}$.

Jelikož k je pevné, jest $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \sqrt[k]{e}$.

Zjistíme, že $1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^k = \sqrt[k]{e}$.

Hodnotu k můžeme libovolně zvyšovat, tj. hodnotu $\sqrt[k]{e}$ snižovat libovolně blízko k hodnotě 1. Z toho plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.