

Předmět: MMG1

Opakování: Spojitost, limita

Nová látka:

- ▶ funkce jedné (reálné) proměnné
- ▶ spojitost funkce jedné proměnné
- ▶ limita funkce jedné proměnné

Literatura: M. Kočandrlová: GEO-MATEMATIKA I, kapitoly I.2, I.5, I.6

Funkce jedné reálné proměnné

Připomeňme, že reálná funkce f jedné reálné proměnné je zobrazení definované na množině $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ (na definičním oboru), které každému $x \in \mathcal{D}_f$ přiřazuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$. Obor hodnot je množina $\mathcal{H}_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathcal{D}_f f(x) = y\}$.

Příklad: $f(z) = (\ln(z^2 - 4))^4$, $\mathcal{D}_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, $\mathcal{H}_f = [0, \infty)$; snadno nahlédneme, že $f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 0$.

Pro přehled vlastností funkcí, operací s funkcemi, přehled grafů elementárních funkcí aj. odkazujeme na kapitolu I. 2 skript Geo-matematika I.

Zde připomeňme jen několik pojmů:

Monotónní funkce

Mějme funkci f a interval $I \subset \mathcal{D}_f$. Funkce f se nazývá

1. **rostoucí** na intervalu I , jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.
2. **neklesající** na intervalu I , jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
3. **nerostoucí** na intervalu I , jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
4. **klesající** na intervalu I , jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Případ 1. a 4. – **ryze monotónní**.

Příklad: Funkce e^{-x} je klesající na $(-\infty, \infty)$.

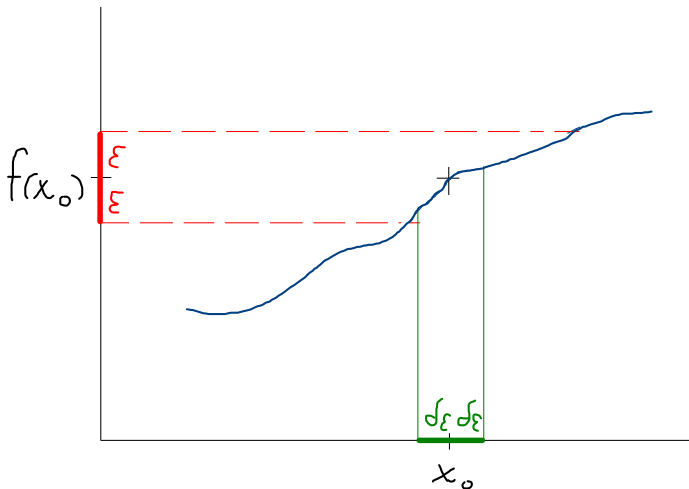
Funkce $x - |x|$ je rostoucí na $(-\infty, 0]$, neklesající na $(-\infty, \infty)$ (protože na $[0, \infty)$ je konstantní).

$$f(x) = x - |x| = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \in (-\infty, 0] \\ 0 & \text{pro } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Spojitosť funkce f v bodě x_0

Každé okolí bodu $f(x_0)$ obsahuje obraz nějakého úplného okolí bodu x_0 .

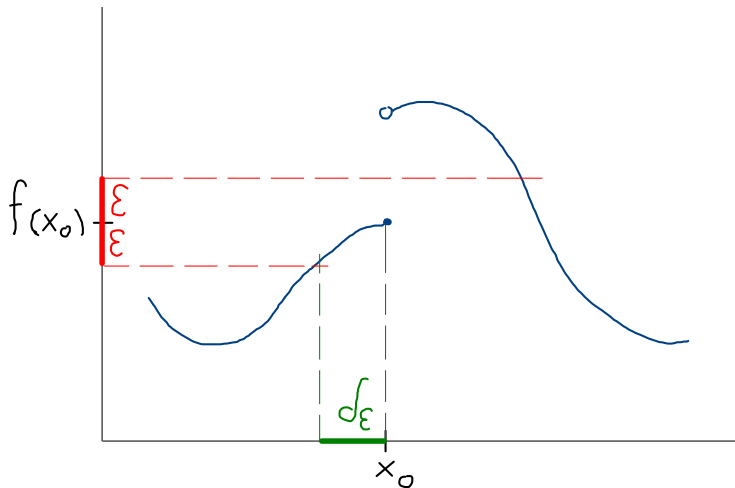
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



Spojitosť funkce f v bodě x_0 zleva

Každé okolí bodu $f(x_0)$ obsahuje obraz nějakého úplného levého okolí bodu x_0 .

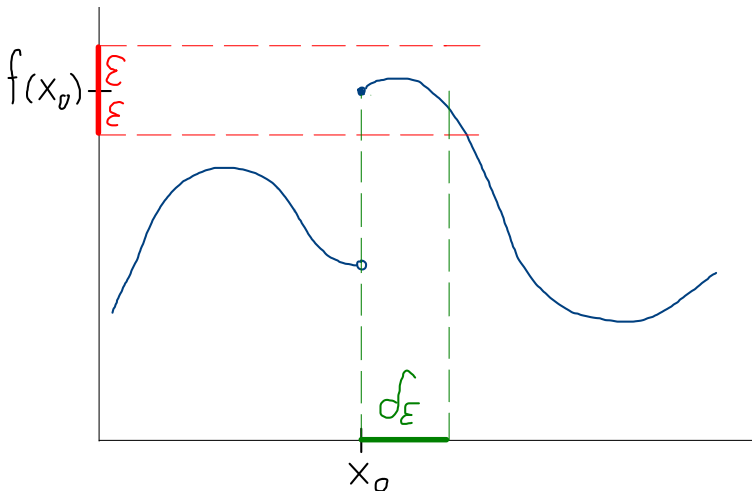
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0] |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



Spojitosť funkce f v bodě x_0 zprava

Každé okolí bodu $f(x_0)$ obsahuje obraz nějakého úplného pravého okolí bodu x_0 .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in [x_0, x_0 + \delta_\varepsilon) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



Věta: Funkce f je v bodě x_0 spojitá právě tehdy, když je v bodě x_0 spojitá zleva i zprava.

Definice: Řekneme, že funkce f je **spojitá na (v) intervalu (a, b)** , je-li spojitá v každém bodě intervalu (a, b) .

... **spojitá na (v) intervalu $[a, b]$** , je-li spojitá v každém bodě intervalu (a, b) a spojitá zprava v bodě a a spojitá zleva v bodě b .

... **spojitá na (v) intervalu $[a, b)$** , je-li spojitá v každém bodě intervalu (a, b) a spojitá zprava v bodě a .

... **spojitá na (v) intervalu $(a, b]$** , je-li spojitá v každém bodě intervalu (a, b) a spojitá zleva v bodě b .

Příklady spojitých funkcí:

na $(-\infty, \infty)$ $\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}, x^n$, kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ x^n , kde $-n \in \mathbb{N}$;

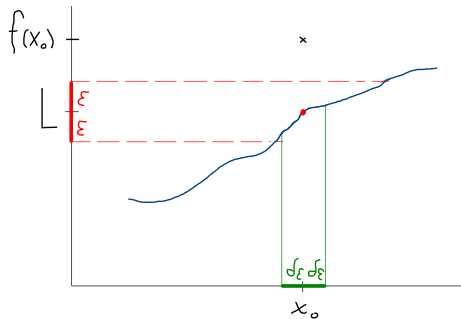
na $[0, \infty)$ $\sqrt{x}$; na $(0, \infty)$ $\ln x$

Definice: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu $L \in \mathbb{R}$, což značíme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad \text{jestliže}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \ \& \ x \neq x_0 \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Každé okolí bodu L obsahuje obraz nějakého prstencového okolí bodu x_0 .



Definujeme

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \neq x_0, \\ L & \text{pro } x = x_0. \end{cases}$$

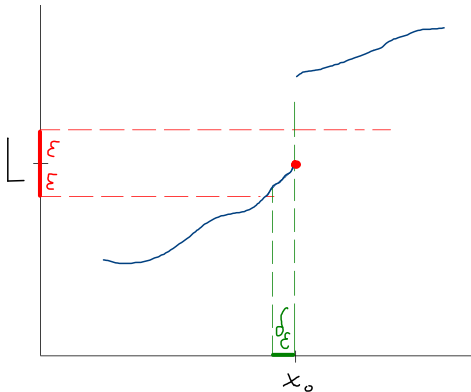
Zde funkce f není spojitá v bodě x_0 , avšak funkce $\hat{f}$ v bodě x_0 už spojitá je.

Limita nezáleží na hodnotě $f(x_0)$!!!

Definice: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zleva $L \in \mathbb{R}$, což značíme $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0) \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Každé okolí bodu L obsahuje obraz nějakého levého **prstencového** okolí bodu x_0 .



Limita nezáleží na tom, zda a jak je funkce f definovaná v bodě x_0 !

Zcela analogicky definujeme limitu zprava.

Definice: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zprava $L \in \mathbb{R}$, což značíme $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = L$, jestliže

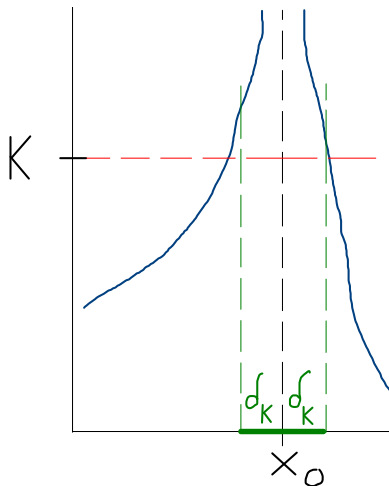
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon) \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Každé okolí bodu L obsahuje obraz nějakého pravého **prstencového** okolí bodu x_0 .

Definice: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní limitu** $+\infty$, což značíme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \text{jestliže}$$

$$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_K, x_0 + \delta_K) \& x \neq x_0 \quad f(x) > K.$$



V každém prstencovém okolí bodu x_0 funkce f roste nade všechny meze.

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

Analogicky řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní limitu** $-\infty$, což značíme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \text{jestliže}$$

$$\forall K < 0 \exists \delta_K > 0 \forall x \in (x_0 - \delta_K, x_0 + \delta_K) \& x \neq x_0 \quad f(x) < K.$$

V každém prstencovém okolí bodu x_0 funkce f klesá pod všechny meze.

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 0} -2/x^2 = -\infty.$

Obdobně nevlastní limita zleva, nevlastní limita zprava.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Limita v $-\infty$, $+\infty$

Definice: Řekneme, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, \text{ je-li } \lim_{y \rightarrow 0+} f(1/y) = L.$$

Řekneme, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \text{ je-li } \lim_{y \rightarrow 0-} f(1/y) = L.$$

Příklad:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \lim_{y \rightarrow 0+} \ln \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0+} (\ln 1 - \ln y) = +\infty$$

Poznámka: To je elegantní definice. Výpočet limit však můžeme provádět způsobem obdobným jako u posloupností jdoucích do $+\infty$ nebo $-\infty$, tj. bez přechodu k $y = 1/x$.

Počítání s limity

Věta: Jestliže existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G$, pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = FG,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}, \text{ pokud } G \neq 0.$$

Stejná pravidla pro počítání s limity zprava a limity zleva.

Příklad:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x^2 - x|}{2x^2 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x(x - 1)|}{2x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x| |x - 1|}{2x(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-|1 - x|}{2(x - 1)} = -1/(-2) = 1/2; \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x^2 - x|}{2x^2 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x| |x - 1|}{2x(x - 1)} = \dots = 1/(-2) = -1/2 \end{aligned}$$

Nevlastní limity — viz počítání s $+\infty$ a $-\infty$, např.

$+\infty + \infty = +\infty$, ale $+\infty - \infty$ není definováno.

Sevřená funkce — myšlenka jako u sevřené posloupnosti

Jestliže existuje hodnota $\delta > 0$ taková, že pro každý bod $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, platí $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, a jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \text{ (nebo } +\infty \text{ nebo } -\infty),$$

pak také $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ (nebo $+\infty$ nebo $-\infty$).

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x}$

$$-\sqrt{|x|} \leq \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} \leq \sqrt{|x|}$$

Jelikož $\lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|}$, je též

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Limita a spojitost funkce

Věta: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a je rovna $f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f nespojitá v bodě x_0 má v bodě x_0 **odstranitelnou nespojitost (nespojitost prvního druhu)**, pokud lze funkci f v bodě x_0 spojitě dodefinovat limitou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Příklad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4, & \text{jestliže } x = 2. \end{cases}$$

Je-li funkce v bodě x_0 nespojitá a nejde o nespojitost prvního druhu, hovoříme o **neodstranitelné nespojitosti (nespojitosti druhého druhu)**. Například $g(x) = \frac{1}{x}$.

Podobné věty (stručně):

spojitost zleva $\iff \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$.

spojitost zprava $\iff \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Jiné zavedení limity funkce (Heine)

Věta: Funkce f má v bodě x_0 limitu L (též $+\infty$ nebo $-\infty$), jestliže pro **každou** posloupnost $\{x_n\}$, pro niž $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Pro limitu funkce zleva se uvažují jen posloupnosti $\{x_n\}$ splňující $x_n < x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Pro limitu funkce zprava se uvažují jen posloupnosti $\{x_n\}$ splňující $x_n > x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Příklad: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ neexistuje, protože při volbě $x_n = n\pi$ dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$, kdežto při volbě $x_n = \pi/2 + 2n\pi$ dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$.

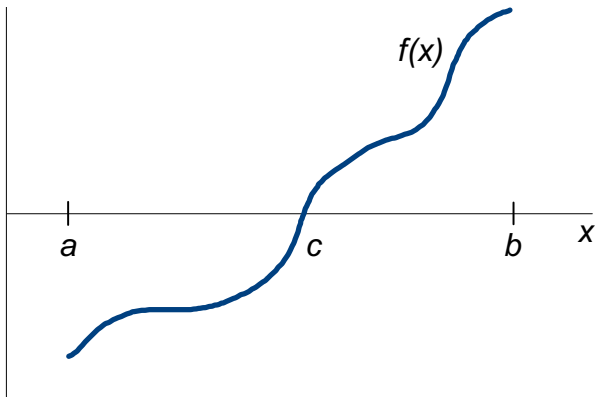
Posloupnosti a spojitost: Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$, pro niž $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, platí $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ právě tehdy, je-li funkce f spojitá v bodě x_0 .

Podobně pro spojitost zleva a zprava.

Využití spojitosti

Věta (Bolzano): Necht' funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje aspoň jeden bod $c \in [a, b]$ takový, že $f(c) = 0$.

Užívá se k numerickému řešení rovnice $f(x) = 0$, např. metodou půlení intervalu.



Věta (Weierstrass): Necht' funkce f je spojitá na **uzavřeném** intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá na $[a, b]$ své největší a nejmenší hodnoty, tj.

$$\exists c_1, c_2 \in [a, b] \quad f(c_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(c_2) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Pozor: Není-li interval $[a, b]$ uzavřený, tvrzení nemusí platit!

