

Předmět: MMG1

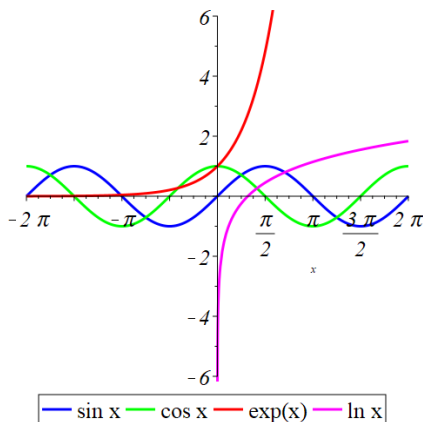
Nová látka:

- ▶ derivace funkce jedné (reálné) proměnné
- ▶ tečna a normála ke grafu funkce
- ▶ L'Hospitalova pravidla pro výpočet limity funkce
- ▶ diferenciál funkce
- ▶ derivace a monotonie

Literatura: M. Kočandrlová: GEO-MATEMATIKA I, kapitola I.7

Elementární funkce

tj. funkce sin, cos, ln, ... více ve skriptech Geo-matematika I.



Inverzní funkce

$$y = e^x$$

$$\ln y = x$$

K funkci $f(x) = e^x$
je funkce inverzní
 $f^{-1}(x) = \ln x$.

Jejich grafy jsou vzájemně symetrické vzhledem k ose I. a III. kvadrantu.

Derivace funkce

Definice: Necht' pro nějaké $\delta > 0$ je funkce f definovaná na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pokud existuje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{vlastní nebo nevlastní}),$$

nazveme ji (první) **derivací** (derivací prvního řádu) funkce f v bodě x_0 a označíme

$$f'(x_0), \quad \text{případně } \frac{df}{dx}(x_0), \quad y'(x_0) \quad (\text{při značení } y = f(x)).$$

Příklad: Necht' $f(x) = x^3$, pak $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

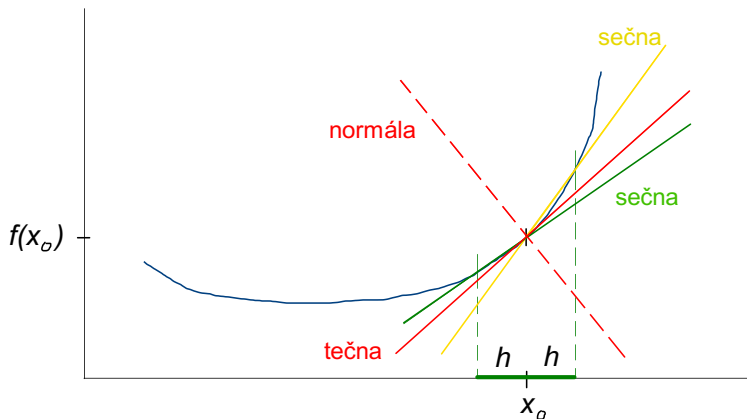
Tedy $f'(x) = 3x^2$ pro $\forall x \in \mathcal{D}_f$.

Dále se budeme zabývat jen vlastními derivacemi.

Geometrický význam: $f'(x_0)$ je směrnicí tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Rovnice tečny: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Rovnice normály: $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ (2)



Derivace elementárních funkcí (další viz skripta)

$$\begin{aligned}(c)' &= 0, & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\(x^q)' &= qx^{q-1}, & (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, \\(a^x)' &= a^x \ln a, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}$$

Derivace algebraických operací: f a g jsou diferencovatelné funkce

$$(f + g)' = f' + g' \quad (\sin x - \cos x)' = \cos x + \sin x$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\sin x \ln x)' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{\sin x}{\ln x}\right)' = \frac{\cos x \ln x - \frac{\sin x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{x \ln^2 x}$$

Příklad: Rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = 3 \sin x \cos x$ v bodě $x_0 = 2\pi/3$.

Umíme $f'(x) = 3(\cos^2 x - \sin^2 x)$, $f'(2\pi/3) = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$.

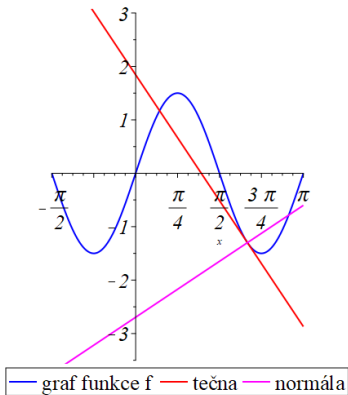
Dále $f(2\pi/3) = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(-1)}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Tečna, viz (1):

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

Normála, viz (2):

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3}(x - 2\pi/3)$$



Poznámka: Úhel dvou křivek

Definice: Úhlem dvou křivek nazýváme úhel mezi jejich tečnami ve společném bodě.

Věta: Mají-li tečny ke křivkám f_1 a f_2 ve společném bodě směrnice k_1 a k_2 , pak pro úhel α křivek f_1 a f_2 platí

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

pokud $k_1 k_2 \neq -1$. Je-li $k_1 k_2 = -1$, pak $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tj. křivky jsou navzájem kolmé.

Příklad: Určíme úhel α , pod nímž graf funkce $\ln$ protíná osu x . Průsečík v bodě $[1, 0]$. Máme $f_1(x) = \ln x$, $f'_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = 0$, $f'_2(x) = 0$, $k_1 = f'_1(1) = 1$, $k_2 = f'_2(1) = 0$. Po dosazení do vztahu pro úhel α dostáváme

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{1 - 0}{1 + 1 \cdot 0} \right| = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Derivace zleva a zprava

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Věta: Derivace $f'(x_0)$ existuje právě tehdy, když existuje $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
(Pak ovšem $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.)

Definice: Řekneme, že funkce f má derivaci f' v intervalu (a, b) , jestliže má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$.

Věta: Má-li funkce f vlastní derivaci $f'(x_0)$, pak je v bodě x_0 spojitá.

Pozor, funkce f může být spojitá v bodě x_0 , ale nemusí v něm mít derivaci $f'(x_0)$!

Příklad: Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na $(-\infty, \infty)$, ale nemá v bodě $x_0 = 0$ derivaci, avšak má v něm derivaci zleva s hodnotou -1 a derivaci zprava s hodnotou 1 .

Derivace složené funkce:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x) \quad (\sin(\ln x))' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

Derivace inverzní funkce:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ kde } f'(x) \neq 0 \text{ a } y = f(x)$$

Příklad: $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$, tj. $x = f^{-1}(y) = \operatorname{tg} y$. Z rovností = a = vyjádříme $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Derivaci funkcí typu $f(x) = g(x)^{h(x)}$, kde $g(x) > 0$ získáme derivováním funkce $\ln(f(x))$:

$$f'(x) = f(x) \left(h'(x) \ln(g(x)) + \frac{h(x)}{g(x)} g'(x) \right)$$

L'Hospitalova pravidla

Věta: Necht' funkce f a g splňují buď

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \text{ nebo } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +/- \infty.$$

Jestliže existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní), pak existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obdobně pro jednostranné limity a pro $x \rightarrow +\infty$ a $x \rightarrow -\infty$.

Příklad: Ukažme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, kde $n \in \mathbb{N}$.

To bude platit, pokud např. ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$, kde

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ a } x \in \mathbb{R}.$$

Počítejme $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x))$, po úpravě $\ln(f(x)) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}, \text{ vidíme, že jde o typ } \frac{0}{0}. \text{ Pak}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Limita podílu derivací existuje a je konečná, tedy **?** můžeme nahradit rovností. Máme $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x)) = 1$, tudíž $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$.

Diferenciál funkce

Definice: Říkáme, že funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná (má v x_0 diferenciál), je-li možné její přírůstek $\Delta f_h(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ vyjádřit ve tvaru

$$\Delta f_h(x_0) = Ah + h\tau(h),$$

kde $A \in \mathbb{R}$ je konstanta (závislá na x_0) a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$.

(Nebo $\Delta f_h(x_0) = Ah + \omega(h)$, kde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$.)

Věta: Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná právě tehdy, když má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$. Pak platí, že $A = f'(x_0)$, tj. $\Delta f_h = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\tau(h)$.

Definice: Výrazu $f'(x_0)h$ říkáme **diferenciál** funkce f v bodě x_0 . Značíme $df(x_0)(h)$, též $df(x_0)$, dy .

Známe-li pro funkci f hodnotu $f(x_0)$ a chceme-li jednoduše odhadnout hodnotu $f(x_0 + h)$ pro kladné nebo záporné h , avšak s malou hodnotou $|h|$, použijeme diferenciál a vztah

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h. \quad (3)$$

Příklad: V bodě $x_1 = 0,1$ vypočítejte přibližně hodnotu funkce $f(x) = \ln(1 + \sin x)$.

Povšimneme si, že $x_1 = x_0 + h$, kde $x_0 = 0$ a $h = 0,1$. Počítejme

$$f(x_0) = \ln 1 = 0, \quad f'(x_0) = \frac{\cos x_0}{1 + \sin x_0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Pak podle (3)

$$f(0,1) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0,1 = 0 + 0,1 = 0,1.$$

Přesná hodnota $f(0,1) = \ln(1 + \sin 0,1) = 0,09515872925$.

Derivace a monotonie

Věta (Lagrange): Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a má-li vlastní derivaci na otevřeném intervalu (a, b) , pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důsledek: Necht' $x_1, x_2 \in [a, b]$ a $x_1 < x_2$, pak $f(x_2) = f(x_1) + f'(c_{12})(x_2 - x_1)$, kde $c_{12} \in (x_1, x_2)$. Odtud a z definice monotónních funkcí nahlédneme, že platí toto:

$f'(x) > 0$ na $(a, b) \implies f$ je rostoucí na $[a, b]$.

$f'(x) < 0$ na $(a, b) \implies f$ je klesající na $[a, b]$.

$f'(x) = 0$ na $(a, b) \implies f$ je konstatní na $[a, b]$.