

Předmět: MM1G

Nová látka:

- ▶ Gramův - Schmidtův algoritmus
ortogonalizace/ortonormalizace
- ▶ metoda nejmenších čtverců
- ▶ vlastní čísla a vlastní vektory

Literatura:

M. Kočandrlová: GEO-MATEMATIKA str. 119 - 120, 125 - 126

Gramova - Schmidtova ortogonalizace

Mějme lineárně nezávislé vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, kde $n \leq m$. Chceme najít takové lineárně nezávislé vektory $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n \in \mathbb{R}^m$, že bude platit¹

- a) $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} = \text{span}\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$;
- b) $(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = 0$, jestliže $i \neq j$ (pro $i = j$ je tento skalární součin kladný).

Definice: Necht' $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$. Definujme zobrazení

$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{(\vec{u}, \vec{u})} \vec{u}$ a nazvěme je **projekce** vektoru $\vec{v}$ na vektor $\vec{u}$.

Platí, že vektor $\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$ je kolmý na $\vec{u}$.

¹Význam $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ je lineární obal vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, tj. množina všech vektorů, které získáme lineární kombinací $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_n\vec{a}_n$, kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou libovolná reálná čísla. Analogicky pro $\text{span}\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$. Jinými slovy, v a) se říká, že množiny vektorů $\vec{a}_i$ a $\vec{q}_i$, kde $i = 1, 2, \dots, n$, jsou bázemi generujícími stejný (pod)prostor prostoru $\mathbb{R}^m$.

Ortogonalizace – postup

Zvolme $\vec{q}_1 = \vec{a}_1$.

Vektor $\vec{a}_2$ chceme vyjádřit jako lin. komb. $\vec{q}_1$ a $\vec{q}_2$, tj.

$$\vec{a}_2 = r_{1,2}\vec{q}_1 + \vec{q}_2, \quad (1)$$

kde $r_{1,2} \in \mathbb{R}$. Vynásobme (1) skalárně vektorem $\vec{q}_1$

$$(\vec{q}_1, \vec{a}_2) = r_{1,2}(\vec{q}_1, \vec{q}_1) + 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{(\vec{q}_1, \vec{a}_2)}{(\vec{q}_1, \vec{q}_1)},$$

využili jsme požadavku $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0$.

Odtud a z (1) dostáváme

$$\vec{q}_2 = \vec{a}_2 - \text{proj}_{\vec{q}_1}(\vec{a}_2). \quad (2)$$

Snadno se přesvědčíme, že skutečně platí $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0$.

Nyní se zabývejme rozkladem

$$\vec{a}_3 = r_{1,3}\vec{q}_1 + r_{2,3}\vec{q}_2 + \vec{q}_3, \quad (3)$$

kde $r_{1,3}, r_{2,3} \in \mathbb{R}$. Jako dříve, vynásobme (3) skalárně postupně vektory $\vec{q}_1$ a $\vec{q}_2$:

$$(\vec{q}_1, \vec{a}_3) = r_{1,3}(\vec{q}_1, \vec{q}_1) + 0 + 0 \Rightarrow r_{1,3} = \frac{(\vec{q}_1, \vec{a}_3)}{(\vec{q}_1, \vec{q}_1)},$$

$$(\vec{q}_2, \vec{a}_3) = 0 + r_{2,3}(\vec{q}_2, \vec{q}_2) + 0 \Rightarrow r_{2,3} = \frac{(\vec{q}_2, \vec{a}_3)}{(\vec{q}_2, \vec{q}_2)}$$

Odtud a z (3) dostáváme

$$\vec{q}_3 = \vec{a}_3 - \text{proj}_{\vec{q}_1}(\vec{a}_3) - \text{proj}_{\vec{q}_2}(\vec{a}_3). \quad (4)$$

Opět se můžeme přesvědčit, že skutečně platí

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_3) = 0 = (\vec{q}_2, \vec{q}_3).$$

Takto postupujeme dále s $\vec{a}_4, \vec{a}_5, \dots$ Nakonec

$$\begin{aligned}\vec{a}_n &= r_{1,n}\vec{q}_1 + r_{2,n}\vec{q}_2 + \dots + r_{n-1,n}\vec{q}_{n-1} + \vec{q}_n, \\ \vec{q}_n &= \vec{a}_n - \text{proj}_{\vec{q}_1}(\vec{a}_n) - \text{proj}_{\vec{q}_2}(\vec{a}_n) - \dots - \text{proj}_{\vec{q}_{n-1}}(\vec{a}_n).\end{aligned}$$

Nyní je snadné získat **ortonormální**² množinu vektorů $\vec{\hat{q}}_i$:

$$\vec{\hat{q}}_1 = \frac{\vec{q}_1}{\|\vec{q}_1\|}, \vec{\hat{q}}_2 = \frac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}, \dots, \vec{\hat{q}}_n = \frac{\vec{q}_n}{\|\vec{q}_n\|}.$$

²Tj. v b) na str. 2 navíc požadujeme $\|\vec{q}_i\| = \sqrt{(\vec{q}_i, \vec{q}_i)} = 1$, kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Příklad: (doc. Růžička, MFF UK) Určete ortonormální bázi $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ podprostoru prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, -1, 0)$ a $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$.

Nejprve najdeme ortogonální bázi $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$. Zvolíme

$$\vec{q}_1 = \vec{a}_1 = (1, 0, 1, 1).$$

Nyní uijeme (2) s tím, že $(\vec{q}_1, \vec{a}_2) = 1$ a $(\vec{q}_1, \vec{q}_1) = 3$, tedy

$$\vec{q}_2 \stackrel{(2)}{=} (2, 1, -1, 0) - \frac{1}{3}(1, 0, 1, 1) = \frac{1}{3}(5, 3, -4, -1).$$

S takovým vektorem $\vec{q}_1$ by se nám však hůře počítalo, proto v dalším použijeme jeho trojnásobek a definujeme

$$\vec{q}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (5, 3, -4, -1).$$

Platí $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0$ a $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \text{span}\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$.

Zbývá aplikovat (4). Po vyčíslení skalárních součinů v projekcích dostaneme

$$\begin{aligned}\vec{q}_3 &\stackrel{(4)}{=} (1, 1, 1, 1) - (1, 0, 1, 1) - \frac{3}{51}(5, 3, -4, -1) \\ &= \frac{1}{17}(-5, 14, 4, 1)\end{aligned}$$

a kvůli pohodlí definujeme $\vec{q}_3 \stackrel{\text{def}}{=} (-5, 14, 4, 1)$.

Ortonormální báze (jest $(\vec{q}_1, \vec{q}_1) = 3$, $(\vec{q}_2, \vec{q}_2) = 51$, $(\vec{q}_3, \vec{q}_3) = 238$)

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1), & \vec{p}_2 &= \frac{1}{\sqrt{51}}(5, 3, -4, -1), \\ \vec{p}_3 &= \frac{1}{\sqrt{238}}(-5, 14, 4, 1).\end{aligned}$$

Metoda nejmenších čtverců

Přímka: V rovině jsou dány body $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Chceme najít takovou **přímku** $y = a + bx$, aby funkce f dvou proměnných $a, b \in \mathbb{R}$ $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2$

byla minimální.

Ukáže se (učivo 2. semestru), že pro minimalizující a, b musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i) = 0 \Rightarrow na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)x_i = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Soustava dvou (modrých) rovnic pro neznámé a, b . Říká se jim normální rovnice.

Zaved'me uspořádané n -tice (pro jednoduchost bez $\rightarrow$)

$$v_1 = (1, 1, \dots, 1)^T,$$

$$v_x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

$$v_y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

Pak soustavu můžeme zapsat takto³

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \end{pmatrix} (v_1 \ v_x) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \end{pmatrix} v_y,$$

neboť dostaneme

$$\begin{pmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_x \\ v_x^T v_1 & v_x^T v_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T v_y \\ v_x^T v_y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

což jsou přesně modré rovnice.

³Vektory s T tvoří řádky a vektory bez T tvoří sloupce matic.

Příklad: Ve smyslu nejmenších čtverců proložte přímku $y = a + bx$ body $[-1, 3]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[1, 3]$, $[2, 4]$.

Ze souřadnic zadaných bodů ihned získáme vektory $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$, $v_x = (-1, 0, 1, 1, 2)^T$, $v_y = (3, 1, 2, 3, 4)^T$. Pak označme

$$M^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M^T v_y = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Matice $M^T M$ odpovídá matici na levé straně soustavy (5).

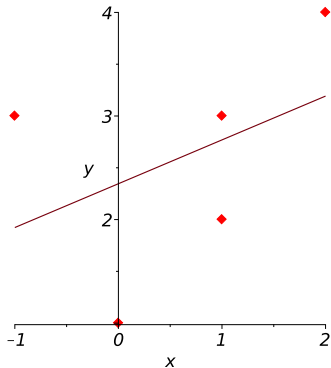
Řešíme soustavu $M^T M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M^T v_y$, konkrétně

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix},$$

a to buď Gaussovou eliminační metodou, Cramerovým pravidlem, nebo pomocí adjungované matice (tj. výpočtem inverzní matice).

Získáme $a = \frac{61}{26}$, $b = \frac{11}{26}$, přímka má rovnici

$$y = \frac{61}{26} + \frac{11}{26}x.$$



Parabola: Nyní hledíme takovou parabolu $y = a + bx + cx^2$, aby funkce f tří proměnných $a, b, c \in \mathbb{R}$

$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2$ byla minimální.

Odvodíme rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cx_i^2 - y_i) = 0$$

$$\Rightarrow na + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)x_i = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial c}(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$$

Soustava tří rovnic pro neznámé a, b, c . (Normální rovnice.)

Zaved'me ještě $v_{x^2} = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)^T$ a zapišme soustavu takto

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \\ v_{x^2}^T \end{pmatrix} (v_1 \ v_x \ v_{x^2}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \\ v_{x^2}^T \end{pmatrix} v_y.$$

Nebo, při označení $M^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \\ v_{x^2}^T \end{pmatrix}$, takto $M^T M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^T v_y$.⁴

⁴Maticový tvar normálních rovnic.

Neboli

$$\begin{pmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_x & v_1^T v_{x^2} \\ v_x^T v_1 & v_x^T v_x & v_x^T v_{x^2} \\ v_{x^2}^T v_1 & v_{x^2}^T v_x & v_{x^2}^T v_{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T v_y \\ v_x^T v_y \\ v_{x^2}^T v_y \end{pmatrix},$$

což je opět ona již odvozená soustava tří rovnic. Matice soustavy je symetrická. Navíc je rozšířením soustavy, kterou jsme odvodili pro přímku

$$\begin{pmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_x & v_1^T v_{x^2} \\ v_x^T v_1 & v_x^T v_x & v_x^T v_{x^2} \\ v_{x^2}^T v_1 & v_{x^2}^T v_x & v_{x^2}^T v_{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T v_y \\ v_x^T v_y \\ v_{x^2}^T v_y \end{pmatrix}.$$

Příklad: Ve smyslu nejmenších čtverců proložte parabolu $y = a + bx + cx^2$ body $[-1, 3]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[1, 3]$, $[2, 4]$.

Ze souřadnic zadaných bodů ihned získáme vektory $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$, $v_x = (-1, 0, 1, 1, 2)^T$, $v_y = (3, 1, 2, 3, 4)^T$.
Dopočítáme $v_{x^2} = (1, 0, 1, 1, 4)^T$. Pak

$$M^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \\ v_{x^2}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M^T v_y = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix},$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 19 \end{pmatrix}.$$

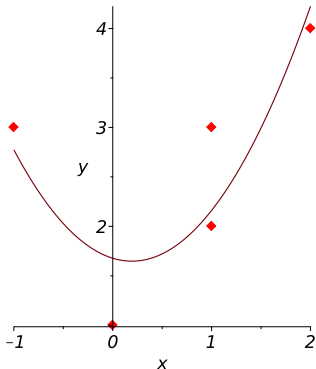
Řešíme soustavu $M^T M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^T v_y$, konkrétně

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix},$$

a to buď Gaussovou eliminační metodou, Cramerovým pravidlem, nebo pomocí adjungované matice (tj. výpočtem inverzní matice).

Získáme $a = \frac{51}{31}$, $b = -\frac{19}{62}$, $c = \frac{49}{62}$, parabola má rovnici

$$y = \frac{51}{31} - \frac{19}{62}x + \frac{49}{62}x^2.$$



Rovina: V prostoru jsou dány body $[x_i, y_i, z_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.
Chceme najít takovou rovinu $z = a + bx + cy$, aby funkce tří proměnných $a, b, c \in \mathbb{R}$

$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cy_i - z_i)^2$ byla minimální.

Odvodíme rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cy_i - z_i) = 0$$

$$\Rightarrow na + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n z_i,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cy_i - z_i)x_i = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial c}(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cy_i - z_i)y_i = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^n y_i + b \sum_{i=1}^n x_i y_i + c \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i z_i$$

Soustava tří rovnic pro neznámé a, b, c .

Zaved'me ještě $v_z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ a zapišme soustavu takto

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \\ v_y^T \end{pmatrix} (v_1 \ v_x \ v_y) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \\ v_y^T \end{pmatrix} v_z.$$

Nebo, při označení $M^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \\ v_y^T \end{pmatrix}$, takto $M^T M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^T v_z.$

Matice soustavy je symetrická. Navíc je rozšířením a modifikací soustavy, kterou jsme odvodili pro přímku, a modifikací soustavy pro parabolu

$$\begin{pmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_x & v_1^T v_y \\ v_x^T v_1 & v_x^T v_x & v_x^T v_y \\ v_y^T v_1 & v_y^T v_x & v_y^T v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T v_z \\ v_x^T v_z \\ v_y^T v_z \end{pmatrix}.$$

Příklad: Ve smyslu nejmenších čtverců proložte rovinu $z = a + bx + cy$ body $[-1, 3, -1]$, $[0, 1, 0]$, $[1, 2, 1]$, $[1, 3, 3]$, $[2, 4, 2]$.

Ze souřadnic zadaných bodů ihned získáme vektory

$$v_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T, \quad v_x = (-1, 0, 1, 1, 2)^T, \\ v_y = (3, 1, 2, 3, 4)^T, \quad v_z = (-1, 0, 1, 3, 2)^T. \text{ Pak}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_x^T \\ v_y^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad M^T v_z = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix},$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 13 \\ 3 & 7 & 10 \\ 13 & 10 & 39 \end{pmatrix}.$$

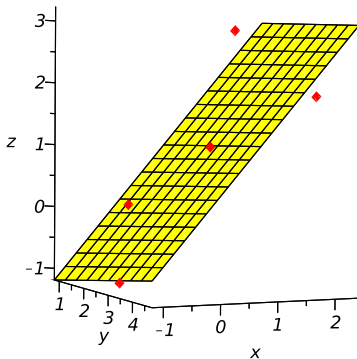
Řešíme soustavu $M^T M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^T v_z$, konkrétně

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 13 \\ 3 & 7 & 10 \\ 13 & 10 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix},$$

a to buď Gaussovou eliminační metodou, Cramerovým pravidlem, nebo pomocí adjungované matice. Získáme $a = \frac{2}{37}$,

$b = \frac{41}{37}$, $c = \frac{4}{37}$, rovina má

rovnici $z = \frac{2}{37} + \frac{41}{37}x + \frac{4}{37}y$.



Jiný pohled na metodu nejmenších čtverců

Například při hledání nejbližší paraboly $y = a + bx + cx^2$ můžeme postupovat také takto: Máme vektor v_y a hledáme vektor v_{abc} daný lineární kombinací (tedy koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$)

$$v_{abc} = av_1 + bv_x + cv_{x^2} \quad (6)$$

takový, že jeho euklidovská vzdálenost od vektoru v_y je minimální, tedy

$$\forall z \in V \quad \|v_y - v_{abc}\|^2 \leq \|v_y - z\|^2, \quad (7)$$

kde podprostor $V \subset \mathbb{R}^n$ je lineární obal množiny $\{v_1, v_x, v_{x^2}\}$. Ukažme, že (7) platí, jestliže je vektor $v_y - v_{abc}$ kolmý ke všem vektorům prostoru V , stačí ovšem kolmý k $\{v_1, v_x, v_{x^2}\}$.

Pišme $v_y - z = (v_y - v_{abc}) + (v_{abc} - z)$, díky kolmosti

$$\|v_y - z\|^2 = \|v_y - v_{abc}\|^2 + \|v_{abc} - z\|^2,$$

(neboť $(v_{abc} - z) \in V$), tj. (7) platí.

Úloha (7) je tedy ekvivalentní s úlohou najít vektor $v_y - v_{abc}$ kolmý na podprostor V , a tu je možné redukovat na úkol určit vektor v_{abc} tak, aby platilo

$$\begin{aligned}(v_y - v_{abc}, v_1) &= 0, \\(v_y - v_{abc}, v_x) &= 0, \\(v_y - v_{abc}, v_{x^2}) &= 0.\end{aligned}$$

Po dosazení (6) do těchto skalárních součinů a úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}(v_1, v_1)a + (v_x, v_1)b + (v_{x^2}, v_1)c &= (v_y, v_1), \\(v_1, v_x)a + (v_x, v_x)b + (v_{x^2}, v_x)c &= (v_y, v_x), \\(v_1, v_{x^2})a + (v_x, v_{x^2})b + (v_{x^2}, v_{x^2})c &= (v_y, v_{x^2}),\end{aligned}$$

což je stejná soustava jako na straně 14, kde je jen použit jiný zápis, tj. $(v, w) = v^T w$, kde $v, w \in \mathbb{R}^n$ jsou sloupcové vektory.

Pokud bychom místo paraboly uvažovali přímku, dospěli bychom stejnými úvahami o kolmosti k soustavě

$$(v_1, v_1)a + (v_x, v_1)b = (v_y, v_1),$$

$$(v_1, v_x)a + (v_x, v_x)b = (v_y, v_x),$$

tj. stejné jako na straně 9.

Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Nechť A je **čtvercová** matice. **Nenulový** sloupcový vektor $\vec{u}$ se nazývá **vlastní vektor** matice A , platí-li $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ pro nějaké číslo $\lambda \in \mathbb{C}$. Toto λ se nazývá **vlastní číslo** matice A odpovídající vlastnímu vektoru $\vec{u}$.

λ je vlastní číslo matice $A \iff$ (právě tehdy, když)

λ je kořenem **charakteristického polynomu** matice A , tj.

$\det(A - \lambda I) = 0$. **Návod pro výpočet vl. čísel malé matice!**

Kořeny mohou být násobné i komplexní (čísla).

Vl. vektor(y) odpovídající vl. č. λ získáme vyřešením soustavy lin. alg. rovnic $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$. Řešení tvoří vektorový prostor $\mathcal{N}(A - \lambda I)$, ale **pozor**, vlastní vektory vektorový prostor netvoří, protože nulový vektor sice řeší homogenní soustavu, avšak z definice nepatří mezi vlastní vektory. Každý vektorový prostor však obsahuje nulový vektor. Množina vektorů bez nulového vektoru tedy nemůže vytvářet vektorový prostor.

Nechť A je čtvercová matice (reálná nebo komplexní).

- ▶ Matice A je singulární (tj. neexistuje A^{-1} , regulární: existuje A^{-1}) právě tehdy, když má vlastní číslo 0.
- ▶ $(\lambda, \vec{u})$ vlastní pár matice $A \implies (\lambda^2, \vec{u})$ vlastní pár matice A^2 .
- ▶ Existuje-li A^{-1} , je $(\lambda, \vec{u})$ vlastním párem matice A právě tehdy, když $(1/\lambda, \vec{u})$ je vlastním párem matice A^{-1} (tj. A i A^{-1} mají stejné vlastní vektory).
- ▶ $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr } A$, kde $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A$
- ▶ Je-li $(\lambda, \vec{u})$ vlastní pár *reálné* matice A , pak také $(\bar{\lambda}, \vec{u})$ je vlastním párem matice A . *Reálná nesymetrická matice může mít komplexní vl. čísla a vektory!*
- ▶ A i A^T mají stejná vl. čísla, vl. vektory mohou být různé.
- ▶ Je-li A *reálná a symetrická*, pak všechna její *vlastní čísla jsou reálná a vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.*

Příklad: Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matic B a B^{-1} , kde $B = A^3$, tj. $B = AAA$.

b) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $C = 162AB^{-1} - 27A^{-1} + 5I$, kde I je jednotková matice typu 2×2 .

Řešení: a) Vlastními čísly matice A jsou kořeny char. polynomu

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -8 \\ -2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9,$$

tedy čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 9$, tudíž vlastní čísla matice B jsou 1 a $9^3 = 3^6 = 729$ a vlastní čísla matice B^{-1} jsou 1 a $9^{-3} = 3^{-6} = 1/729$.

Výpočet vlastních vektorů příslušných k vl. č. $\lambda_1 = 1$. Homogenní soustava $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má řešení $\vec{u}_1 = (2, 1)^T$. Vlastní vektory $p(2, 1)^T$, kde $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Výpočet vlastních vektorů příslušných k vl. č. $\lambda_2 = 9$. Homogenní soustava $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má řešení $\vec{u}_1 = (2, -1)^T$. Vlastní vektory $q(2, 1)^T$, kde $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Po úpravě $C = 162A^{-2} - 27A^{-1} + 5I$, neboť $AB^{-1} = AA^{-1}A^{-1}A^{-1} = A^{-1}A^{-1} = A^{-2}$. Víme, že $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ jsou vlastní vektory matice A i A^{-1} . Spočítejme $C\vec{u}_i$, kde $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} C\vec{u}_i &= (162A^{-2} - 27A^{-1} + 5I)\vec{u}_i = 162A^{-1}A^{-1}\vec{u}_i - 27A^{-1}\vec{u}_i + 5I\vec{u}_i \\ &= 162A^{-1} \left(\frac{1}{\lambda_i} \vec{u}_i \right) - 27 \frac{1}{\lambda_i} \vec{u}_i + 5\vec{u}_i = 162 \frac{1}{\lambda_i} A^{-1} \vec{u}_i - \frac{27}{\lambda_i} \vec{u}_i + 5\vec{u}_i \\ &= \frac{162}{\lambda_i^2} \vec{u}_i - \frac{27}{\lambda_i} \vec{u}_i + 5\vec{u}_i = \left(\frac{162}{\lambda_i^2} - \frac{27}{\lambda_i} + 5 \right) \vec{u}_i. \end{aligned}$$

Pro dvojici $\lambda_1 = 1$ a $\vec{u}_1$ dostáváme $C\vec{u}_1 = 140\vec{u}_1$, pro $\lambda_2 = 9$ a $\vec{u}_2$ je $C\vec{u}_2 = 4\vec{u}_2$. Odtud plyne, že vlastní čísla matice C jsou $\mu_1 = 140$ a $\mu_2 = 4$, jimž po řadě odpovídají vlastní vektory $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} p$ a $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} q$, kde $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.