

Předmět: MM1G

Lineární algebra

- ▶ vektorové prostory $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$
- ▶ lineární závislost a nezávislost
- ▶ báze a dimenze vektorového prostoru
- ▶ podprostory vektorových prostorů
- ▶ lineární obal množiny vektorů
- ▶ skalární součin a ortogonalita vektorů
- ▶ matice, řešení soustav lineárních algebraických rovnic
- ▶ inverzní matice, maticové rovnice
- ▶ determinant matice, jeho vlastnosti a aplikace

Literatura:

M. Kočandrlová: GEO-MATEMATIKA I, oddíl II (vybrané, případně zjednodušené části)

Lineární algebra

Studium vektorů a lineárních vztahů (zobrazení) mezi vektory.

Rovina $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (prostor $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), množina všech uspořádaných dvojic (trojic) reálných čísel. Dvojice $[x, y]$ a (x, y) (trojice $[x, y, z]$ a (x, y, z)) reprezentuje bod a vektor v kartézských souřadnicích.

Orientovaná úsečka $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, kde $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$.

Definice: Geometrický vektor je množina všech orientovaných úseček, jež lze získat rovnoběžným posunutím orientované úsečky $\vec{AB}$; též se říká volný vektor.

$\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) lze interpretovat jako množinu (přesněji – prostor, viz dále) dvousložkových (třísložkových) vektorů.

Mějme $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Součet dvou vektorů: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
definován prostřednictvím součtu reálných čísel

Násobení vektoru skalárem $c \in \mathbb{R}$: $c\vec{u} = (cu_1, cu_2, cu_3)$

Vektorový (též lineární) prostor

Mějme množinu V , jejíž prvky lze sčítat a násobit skalárem, přičemž platí (1)-(8)

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad (1)$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{z} \in V \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z}, \quad (2)$$

$$\exists! \vec{o} \in V \quad \forall \vec{u} \in V \quad \vec{u} + \vec{o} = \vec{u}, \quad (3)$$

$$\forall \vec{v} \in V \quad \exists! -\vec{v} \in V \quad \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{o}, \quad (4)$$

$$\forall \vec{v} \in V \quad 1\vec{v} = \vec{v}, \quad (5)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v} \in V \quad \alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}, \quad (6)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \quad (7)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v} \in V \quad (\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}. \quad (8)$$

Jestliže dále platí **uzavřenost na sčítání a násobení skalárem**:

$$\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V, \quad \vec{u} \in V, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\vec{u} \in V, \quad (9)$$

nebo ekvivalentně $\vec{u}, \vec{v} \in V, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a\vec{u} + b\vec{v} \in V$,

pak V nazveme **vektorovým** (nebo **lineárním**) **prostorem**.

Nulový vektor $\vec{o}$ sestává ze samých nul, tj. $\vec{o} = (0, 0, \dots, 0)$.

Příklady: uspořádané trojice reálných čísel, tj. prvky $\mathbb{R}^3$;
uspořádané n -tice reálných čísel (tj. $\mathbb{R}^n$).

Příklad: Množina uspořádaných čtveřic

$M = \{(a, b, 0, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ se standardně definovaným součtem a násobením skalárem (tj. po složkách, viz (1) až (8)) je podmnožina vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Je M také vektorový prostor, tudíž podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$?

Ověřme (9). Necht' $\vec{u} = (u_1, u_2, 0, u_4) \in M$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, 0, v_4) \in M$. Pak $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0 + 0, u_4 + v_4) \in M$, protože $\vec{w}$ má strukturu předepsanou pro prvky množiny M , tj. (reálné číslo, reálné číslo, 0, reálné číslo).

Obdobně pro $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha \cdot 0, \alpha u_4) \in M$. Prvky množiny M tedy splňují (9), tudíž M je podprostor dimenze 3 prostoru $\mathbb{R}^4$ (ten má dimenzi 4), k tomu více v pokračování příkladu na str. 9.

Příklad: Množina uspořádaných čtveřic

$K = \{(a, b, 1, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ se standardně definovaným součtem a násobením skalárem (tj. po složkách, viz (1) až (8)) je podmnožina vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Je K také vektorový prostor, tudíž podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$?

Ověřme (9). Necht' $\vec{u} = (u_1, u_2, 1, u_4) \in K$
a $\vec{v} = (v_1, v_2, 1, v_4) \in K$. Pak $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$
 $= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 1 + 1, u_4 + v_4)$ není prvek množiny K ,
protože $\vec{z}$ nemá strukturu předepsanou pro prvky množiny K , tj.
(reálné číslo, reálné číslo, 1, reálné číslo).

Podobně zjistíme, že K není uzavřena na násobení skalárem.
Například $3\vec{u} = (3u_1, 3u_2, 3, 3u_4) \notin K$, neboť je opět porušena definice množiny K .

Množina K tedy nemá vlastnosti vektorového (pod)prostoru.

Poznámka: Necht' $C(I)$ značí množinu všech spojitých funkcí na intervalu I , kde např. $I = [a, b]$ nebo $I = (a, b)$ apod. Necht' dále je v $C(I)$ zavedeno standardní sčítání dvou funkcí a násobení funkce reálným číslem. Pak tyto operace splňují (1)-(8) a pro $C(I)$ v roli V platí (9) (součet dvou spojitých funkcí je spojitá funkce, násobek spojité funkce je spojitá funkce). Množina $C(I)$ tedy je vektorovým (lineárním) prostorem.

Poznámka: Ve skriptech — euklidovský prostor. Často se euklidovským prostorem rozumí prostor $\mathbb{R}^n$, v němž je zavedena euklidovská velikost vektorů, tj.

$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$, tento prostor se někdy značí $\mathbb{E}^n$ nebo $\mathbb{E}_n$.

Definice: Necht' $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ a $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{R}$.
Pak vektor $\vec{u} = s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2 + \dots + s_k\vec{u}_k$ nazveme **lineární kombinací** (LK) vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$.

Pozorování: LK lineárních kombinací je LK.

Definice: Řekneme, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou **lineárně závislé** (LZ), pokud je některý z nich lineární kombinací ostatních, a **lineárně nezávislé** (LN), pokud nejsou lineárně závislé.

Věta: Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LZ $\iff$ existují čísla $a_i \in \mathbb{R}$ taková, že platí $\sum_{i=1}^k |a_i| > 0$ a zároveň $\vec{0} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k$.

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina vektorů.

Množina

$\{a_1\vec{u}_1 + \dots + a_m\vec{u}_m : m \in \mathbb{N}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \in M, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}\}$
se nazývá **lineární obal množiny M** .

(Lineární obal je množina všech LK vektorů z množiny M .)

Připomenutí: O množině V vektorů z $\mathbb{R}^n$ řekneme, že je (vektorovým) **podprostorem** prostoru $\mathbb{R}^n$, pokud je neprázdná a pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a každá dvě reálná čísla p, q platí, že $p\vec{u} + q\vec{v} \in V$. (Uzavřenost na sčítání a násobení, viz (9) na str. 3.)

Definice: Podmnožina B netriviálního (pod)prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **báze (pod)prostoru** V , jestliže její vektory jsou LN a lineární obal množiny B je roven (pod)prostoru V . (B generuje V .)

Kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^n$: LN vektory z $\mathbb{R}^n$: $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Věta: Každé dvě báze podprostoru V prostoru $\mathbb{R}^n$ mají stejný počet vektorů.

Definice: Je-li V netriviální podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$, pak počet vektorů v jeho (libovolné) bázi se nazývá **dimenze** podprostoru V a značí se $\dim V$. Dimenze triviálního podprostoru $\{\vec{0}\}$ je rovna nule.

Příklad: Víme (str. 4), že $M = \{(a, b, 0, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Platí $\dim M = 3$, protože např. vektory $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ a $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ tvoří bázi podprostoru M . Libovolný vektor tvaru $(a, b, 0, c)$ získáme jako LK $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_4$.

Definice: Skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ (tj. $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$) nazveme číslo $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (jiné označení $(\vec{u}, \vec{v})$) dané operací

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Pokud platí $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, píšeme $\vec{u} \perp \vec{v}$ a říkáme, že vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou na sebe kolmé (jsou **ortogonální**).

Ortogonálním doplňkem $S^\perp$ množiny $S \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme množinu všech vektorů v $\mathbb{R}^n$, které jsou kolmé ke všem prvkům množiny S , tj. $S^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \perp \vec{u} \text{ pro každé } \vec{u} \in S\}$.

Tvrzení: Bud' V lineární podprostor $\mathbb{R}^n$. Pak

1. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \exists \vec{v} \in V, \vec{w} \in V^\perp \quad \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$
2. Pokud $S \subseteq V$ generuje V , pak $S^\perp = V^\perp$
3. $(V^\perp)^\perp = V$
4. $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$
5. Pro dimenzi podprostoru $V \subseteq \mathbb{R}^n$ a jeho doplňku platí $\dim V^\perp = n - \dim V$

Ukázat platnost těchto tvrzení bude snadné, až se později seznámíme s Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. Její aplikací lze získat n vzájemně ortogonálních vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$, které tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$, přičemž vektory $v_1, v_2, \dots, v_d$, kde $d = \dim V$, tvoří bázi $\mathcal{B}_V$ podprostoru V . Pak ovšem vektory $v_{d+1}, v_{d+2}, \dots, v_n$ tvoří bázi $\mathcal{B}_{V^\perp}$ podprostoru $V^\perp$. Z úvah založených na bázích $\mathcal{B}_V$ a $\mathcal{B}_{V^\perp}$ plynou uvedená tvrzení.

Definice: Maticí A typu $m \times n$ (též značeno (m, n)) nazýváme schéma (tabulku) mn reálných (komplexních) čísel

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ sestavených do m řádků a n sloupců:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Řádkové vektory, sloupcové vektory, u čtvercových matic (tj. $m = n$) **hlavní¹ a vedlejší² diagonála**.

O čtvercové matici typu $n \times n$ řekneme, že je **řádu n** .

¹ $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

² $(a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1})$

Definice: Maximální počet lineárně nezávislých řádkových (sloupcových) vektorů matice A nazýváme **hodností** matice A , značíme $h(A)$.

Věta: Hodnost matice se nezmění, jestliže

1. zaměníme pořadí řádků v matici nebo
2. vynásobíme jeden řádek nenulovým číslem nebo
3. přičteme k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků nebo
4. vynecháme v matici řádek, jenž je lineární kombinací ostatních řádků matice.

Poznámka: Totéž platí i pro úpravy sloupců.

Příklad:

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 15 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} &\stackrel{(a)}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{(b)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(c)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{(d)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{hodnost } h(B) = 2 \end{aligned}$$

(a) Druhý řádek $\times \frac{1}{5}$, viz 2.

(b) Prohodíme první řádek s druhým, viz 1.

(c) Od druhého řádku odečteme trojnásobek prvního řádku, k druhému řádku přičteme dvojnásobek prvního řádku, viz 3.

(d) Ke třetímu řádku přičteme druhý řádek.

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Připomenutí: Sloupcový vektor je matice typu $m \times 1$, řádkový vektor je matice typu $1 \times n$.

Transponovaná matice k matici M typu $k \times \ell$ je matice M^T typu $\ell \times k$, jejíž i -tý sloupec je totožný s i -tým řádkem matice M , kde $i = 1, 2, \dots, k$.

Součin matic: Nechť matici A typu $m \times n$ tvoří řádkové vektory délky n , tj. $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i = 1, 2, \dots, m$ je pořadové číslo řádku. Dále nechť matici B typu $n \times p$ tvoří sloupcové vektory délky n , tj. $\vec{b}_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})^T$, kde $j = 1, 2, \dots, p$ je pořadové číslo sloupce. Výsledkem součinu AB je matice $C = (c_{ij})$ typu $m \times p$, kde $c_{ij} = (\vec{a}_i, \vec{b}_j)$.

$$AB = C = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{b}_1) & (\vec{a}_1, \vec{b}_2) & \dots & (\vec{a}_1, \vec{b}_p) \\ (\vec{a}_2, \vec{b}_1) & (\vec{a}_2, \vec{b}_2) & \dots & (\vec{a}_2, \vec{b}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{a}_m, \vec{b}_1) & (\vec{a}_m, \vec{b}_2) & \dots & (\vec{a}_m, \vec{b}_p) \end{pmatrix}$$

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix},$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} (3 - 2 + 6 + 15) & (1 + 1 + 0 - 6) & (2 - 1 - 2 + 9) \\ (-12 + 4 + 0 + 5) & (-4 - 2 + 0 - 2) & (-8 + 2 + 0 + 3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & -4 & 8 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Povšimněte si, že počet sloupců prvního činitele musí odpovídat počtu řádků druhého činitele. Příklad také ukazuje, že z existence součinu AB neplyne existence součinu BA (řádky matice B jsou delší než sloupce matice A , skalární součin řádků a sloupců není možný).

Pozor! I pro čtvercové matice obecně platí $AB \neq BA$, viz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ale } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & -8, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & = & -12, \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1, \\ 3x_1 & + & 9x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & = & -10, \end{array}$$

lze napsat maticově jako $A\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Pokud $\vec{b} = \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$, hovoříme o **homogenní** soustavě lin. alg. rovnic, jinak o soustavě **nehomogenní**.

Rozšířená matice $(A|\vec{b})$ soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ vznikne tím, že k matici A přidáme sloupcový vektor $\vec{b}$.

Postup řešení Gaussovou eliminační metodou: Rozšířenou matici upravíme na schodovitý tvar postupem ze strany 12 aplikovaným výhradně na řádky rozšířené matice a vzniklou ekvivalentní soustavu vyřešíme zpětným chodem, viz str. 19.

Definice: Množina $\mathcal{N}(A)$ všech řešení homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{0}$, kde A je matice typu $m \times n$ a $m \leq n$, tj. $\mathcal{N}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$, se nazývá **nulový prostor** matice A .

Jelikož $A\vec{x} = \vec{0}$, je vektor $\vec{x}$ kolmý na všechny řádky matice A , jejich množinu označme $M = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_m\}$ a definujme prostor V jako lineární obal množiny M . Je tedy $\vec{x} \in V^\perp$.

Platí, že $\mathcal{N}(A) = V^\perp$
a $\dim \mathcal{N}(A) = \dim V^\perp = n - \dim V = n - h(A)$.

Důsledek: Soustava $A\vec{x} = \vec{0}$, kde A je matice typu $m \times n$ (soustava s n neznámými) má **právě jedno řešení**, a to $\vec{x} = \vec{0}$, **právě když $h(A) = n$** .

Pokud $h(A) < n$, má soustava $A\vec{x} = \vec{0}$ nekonečně mnoho řešení, která tvoří prostor $\mathcal{N}(A)$ s $\dim \mathcal{N}(A) = n - h(A)$.

Nehomogenní soustavy lineárních alg. rovnic

Věta (Frobeniova): Mějme soustavu $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A je typu $m \times n$ a $\vec{b}$ je typu $m \times 1$, přičemž $n \geq m$. Tyto vlastnosti jsou ekvivalentní:

- 1) Soustava má alespoň jedno řešení.
- 2) Vektor $\vec{b}$ je lineární kombinací sloupcových vektorů matice A .
- 3) $h(A) = h(A|\vec{b})$.

Struktura řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$.

Množinu $M_{A,\vec{b}}$ všech řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ získáme tím, že nalezneme $\mathcal{N}(A)$ (tj. nulový prostor matice A) a jedno řešení $\vec{x}_0$ splňující $A\vec{x}_0 = \vec{b}$, pak $M_{A,\vec{b}} = \vec{x}_0 + \mathcal{N}(A)$.

Poznámka: Necht' matici A tvoří sloupce $\vec{s}_j, j = 1, 2, \dots, n$, a $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. **Smysl $A\vec{x} = \vec{b}$ je**, že hledáme takové koeficienty $x_j \in \mathbb{R}$, aby **$\vec{b} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{s}_j$** , tj. $\vec{b}$ je LK vektorů $\vec{s}_j$.

Příklad: Řešme soustavu ze str. 16. Rozšířená matice soustavy:

$$\begin{aligned}(A|\vec{b}) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & -8 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & -12 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 9 & -1 & -4 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & 14 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)\end{aligned}$$

Vidíme, že $h(A|\vec{b}) = 4 = h(A)$, tudíž $\dim \mathcal{N}(A) = 4 - 4 = 0$, tj.

$\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ a soustava má právě jedno řešení.

Ekvivalentní soustava (má stejné řešení jako původní soustava)

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 &= -8, \\ -3x_2 + x_4 &= 4, \\ 2x_3 + x_4 &= 7, \\ 3x_4 &= 3\end{aligned}$$

má řešení (získané zpětným chodem) $x_4 = 3/3 = 1$,

$$x_3 = (7 - x_4)/2 = 3, \quad x_2 = (4 - x_4)/(-3) = -1,$$

$$x_1 = -8 + 3x_4 + x_3 - 4x_2 = -8 + 3 + 3 + 4 = 2, \text{ tj. } \vec{x} = (2, -1, 3, 1)^T.$$

Zkouška: Ověříme, že $A\vec{x} = \vec{b}$.

Příklad: Řešme soustavu $B\vec{x} = \vec{b}$, kde B je matice ze strany 13 a $\vec{b} = (1, 20, 0)^T$. Nejprve zjistíme hodnotu rozšířené matice soustavy, povolené úpravy uplatněné na řádky (viz str. 12) nemají vliv na řešení soustavy.

$$\begin{aligned}(B|\vec{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 5 & -5 & 15 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & -3 & 4 & 8 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow h(B|\vec{b}) = 3 \neq h(B) = 2\end{aligned}$$

Soustava $B\vec{x} = \vec{b}$ tedy nemá řešení. Vektor $\vec{b}$ nelze získat jako LK sloupců matice B (viz str. 18), což sice není patrné hned ze zadání soustavy, ale je jasné na konci řetězce matic ekvivalentních soustav: hodnotu 3 poslední souřadnice vektoru $(4, -11, 3)$ nemůžeme dostat LK sloupců upravené matice B .

Příklad: Řešme soustavu $B\vec{x} = \vec{b}$, kde B je matice ze strany 13 a $\vec{b} = (4, 20, 0)^T$. Úpravy řádků (str. 12) nemají vliv na řešení.

$$\begin{aligned}(B|\vec{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & -5 & 15 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & 4 & 8 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{hodnost } h(B|\vec{b}) = 2 = h(B)\end{aligned}$$

Soustava $B\vec{x} = \vec{b}$ tedy má nekonečně mnoho řešení,
 $\dim \mathcal{N}(B) = 3 - 2 = 1$, řešení tudíž závisí na jednom parametru. Řešení $\vec{x}$ lze vyjádřit např. takto (viz struktura řešení na str. 18):

$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{u}$, kde $\vec{x}_0 = (3, -4, -1)^T$, $\vec{u} = (-5, 4, 3)^T$ a $t \in \mathbb{R}$.
Platí $B\vec{x}_0 = \vec{b}$ a $B\vec{u} = \vec{0}$.

Aplikace: Newtonův interpolační polynom stupně n ...

je proložen body $X_0 = [x_0, y_0]$, $X_1 = [x_1, y_1]$, $\dots$, $X_n = [x_n, y_n]$
a má tvar

$$\begin{aligned} N_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Jak získat koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$?

Z rovností $N_n(x_i) = y_i$, kde $i = 0, 1, 2, \dots, n$, obdržíme soustavu lineárních algebraických rovnic s trojúhelníkovou maticí. Z ní vypočítáme koeficienty a_i . Tedy

$$a_0 = y_0,$$

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1,$$

$$a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2,$$

a tak dále

Příklad na další straně (příklad 8 ve skriptech GEO-M. I, tam navíc speciální úsporný algoritmus.

Příklad: Proložte body $X_0 = [-1, -2]$, $X_1 = [2, 1]$, $X_2 = [3, -1]$ a $X_3 = [5, 1]$ Newtonův interpolační polynom.

Označme $X_i = [x_i, y_i]$, kde $i = 0, 1, 2, 3$, a sestavme soustavu rovnic dle návodu na straně 22.

$$a_0 = -2,$$

$$a_0 + a_1(2 + 1) = 1,$$

$$a_0 + a_1(3 + 1) + a_2(3 + 1)(3 - 2) = -1,$$

$$a_0 + a_1(5 + 1) + a_2(5 + 1)(5 - 2) + a_3(5 + 1)(5 - 2)(5 - 3) = 1$$

Tedy

$$a_0 = -2, \quad (9)$$

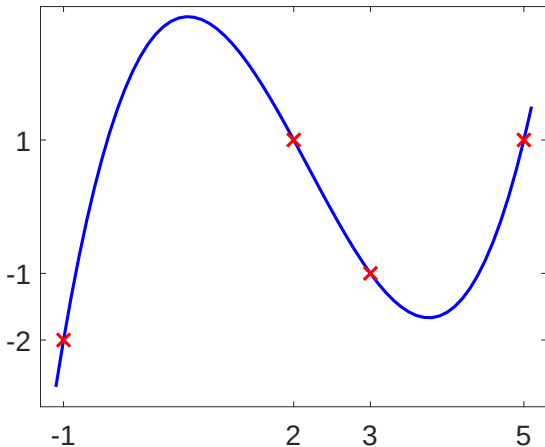
$$a_0 + 3a_1 = 1, \quad (10)$$

$$a_0 + 4a_1 + 4a_2 = -1, \quad (11)$$

$$a_0 + 6a_1 + 18a_2 + 36a_3 = 1 \quad (12)$$

(9) $\Rightarrow a_0 = -2$, dosadíme do (10) $\Rightarrow a_1 = 1$,
dosadíme do (11) $\Rightarrow a_2 = -3/4$,
dosadíme do (12) $\Rightarrow a_3 = 7/24$.

$$N_3(x) = -2 + x + 1 - \frac{3}{4}(x+1)(x-2) + \frac{7}{24}(x+1)(x-2)(x-3)$$



Početní operace s maticemi

Součet dvou matic A, B typu $m \times n$

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = A + B, C = (c_{ij}), c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \\ i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Násobení matice A skalárem $r \in \mathbb{R}$

$$C = rA, c_{ij} = ra_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Vlastnosti ... Matice stejného typu tvoří vektorový prostor.

Násobení matice A typu $m \times n$ a matice B typu $n \times k$

$$C = AB, c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k$$

Vlastnosti ... **Obecně $AB \neq BA$**

Transponovaná matice k matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$.

$$C = A^T, c_{ji} = a_{ij}, \text{ typu } n \times m.$$

Vlastnosti: $(A^T)^T = A, (A + B)^T = A^T + B^T, (AB)^T = B^T A^T.$

Matice identity (jednotková matice) I : Čtvercová, prvky na hlavní diagonále rovny 1, prvky mimo hlavní diagonálu rovny 0. Při násobení matic má roli jedničky, tj. $AI = IA$, kde I je typu $n \times n$ a A je libovolná matice stejného typu.

Definice: Inverzní maticí ke čtvercové matici n -tého řádu (tj. typu $n \times n$) nazýváme čtvercovou matici A^{-1} n -tého řádu, pro niž platí $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Vlastnosti: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Definice: Čtvercovou matici A nazveme **regulární** maticí, pokud k ní existuje matice inverzní, tj. A^{-1} .

Čtvercovou matici A nazveme **singulární** maticí, pokud k ní neexistuje matice inverzní.

Výpočet inverzní matice

Nechť A je matice typu $n \times n$ a A^{-1} matice inverzní k A .
Označme sloupce matice A^{-1} symboly $s_1, s_2, \dots, s_n$, tj.
 $A^{-1} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Jelikož $AA^{-1} = I$, musí platit, že $As_i = e_i$, kde e_i je i -tý kanonický sloupcový vektor a $i = 1, 2, \dots, n$. Musíme tedy vyřešit n soustav lineárních algebraických rovnic.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \spadesuit \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -6 \end{array} \right) \\ & \clubsuit \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2 \end{array} \right) = (I|A^{-1}). \end{aligned}$$

Pro pohodlí jsme nejprve přeuspořádali řádky rozšířené matice (krok ♠).

Matice vlevo od $|$ je v horním trojúhelníkovém tvaru (viz ♣), dalšími úpravami ji převedeme na matici identity I , vpravo od $|$ pak bude A^{-1} .

Maticové rovnice

Předpokládá se, že zúčastněné matice jsou kompatibilního typu, tj. lze provádět jejich sčítání a násobení, a že existují i potřebné inverzní matice.

Příklady:

a) Jsou dány matice A a B , kde A je regulární. Vyřešme maticovou rovnici $AX = 7B - 2I$ pro neznámou matici X .

b) Vyřešme maticovou rovnici $2X + 3XA = B - A$.

Řešení: a) Rovnici vynásobíme zleva maticí A^{-1} .

Pak $A^{-1}AX = A^{-1}(7B - 2I) \Rightarrow X = A^{-1}(7B - 2I)$.

b) Upravíme

$$2X + 3XA = B - A,$$

$$X(2I) + X(3A) = B - A,$$

$$X(2I + 3A) = B - A,$$

$$X = (B - A)(2I + 3A)^{-1},$$

násobíme zprava, pokud matice $(2I + 3A)^{-1}$ existuje. **Pozor**, nelze $X(2 + 3A)$, neboť v závorce by se sčítal skalár 2 s maticí $3A$.

Determinant matice

Determinant $\det A$ je číslo (reálné v případě reálných matic) jistým způsobem odvozené ze **čtvercové** matice A .

Determinant lze definovat různými způsoby, jeden z nich je založen na rozvoji determinantu podle řádku nebo sloupce, k tomu se dostaneme na straně 39.

Pro matice typu 2×2 a 3×3 jsou vztahy pro výpočet determinantu jednoduché.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Příklad: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 90 - 48 - 63 = -15$

Geometrický význam determinantu

Nechť $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Označme P obsah rovnoběžníka daného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ se společným počátečním bodem.

Pak $P = |\hat{P}|$, kde $\hat{P} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

Nechť $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Označme V objem rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany vycházející z téhož vrcholu jsou určeny vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

Pak $V = |\hat{V}|$, kde

$$\hat{V} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka: Pro objem $V_{\text{čtyřstěn}}$ čtyřstěnu, jehož tři hrany vycházející z téhož vrcholu jsou určeny vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, platí $V_{\text{čtyřstěn}} = V/6$.

Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

- ▶ vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý jak k vektoru $\vec{u}$, tak k vektoru $\vec{v}$;
pravidlo pravé ruky;
- ▶ $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \varphi$, kde φ je úhel vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$;
- ▶ číslo $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ udává obsah rovnoběžníka určeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Vlastnosti:

1. $\det A = \det A^T$
2. $\det(AB) = \det A \det B$
3. Determinant matice se nezmění, jestliže k jednomu z řádků matice přičteme LK ostatních řádků
4. Je-li A typu $n \times n$, pak $\det A \neq 0 \iff h(A) = n$, tj. matice A je regulární právě tehdy, když $\det A \neq 0$
5. Je-li A regulární, pak $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
6. Je-li B matice, která vznikne z matice A výměnou (prohozením) dvou řádků, pak $\det B = -\det A$
7. Je-li B matice, která vznikne z matice A vynásobením některého řádku nebo sloupce číslem $r \in \mathbb{R}$, pak $\det B = r \det A$
8. Je-li matice A trojúhelníková, pak $\det A$ je součinem jejích prvků na hlavní diagonále

Cramerovo pravidlo

Umožňuje vypočítat konkrétní složku vektoru řešení soustavy lin. alg. rovnic, aniž by bylo nutné počítat jiné složky (jako při zpětném chodu u Gaussovy eliminace).

Věta: Necht' $A\vec{x} = \vec{b}$ je soustava se čtvercovou regulární maticí, pak existuje jediné řešení $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Označme B_j matici, kterou dostaneme z matice A záměnou j -tého sloupce za vektor $\vec{b}$. Pak platí

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

Poznámka: Tento postup se může vyplatit jen u malých soustav a potřebujeme-li jen neúplné řešení.

Příklad: Mějme soustavu $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
a $\vec{b} = (1, 3, 2)^T$. Vypočítejte x_2 z řešení $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.

Můžeme přímo spočítat $\det A$ nebo si pomoci povolenými úpravami (viz vlastnost 3 na str. 33) a v matici získat nulové prvky, díky nimž se výpočet zjednoduší:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$x_2 = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{3}{5}.$$

Inverzní matice

Pomocí determinantů lze spočítat A^{-1} , je to efektivní u matic typu 2×2 , schůdné u matic 3×3 , ale obvykle nepraktické u matic větších. Například pomocí adjungované matice (viz dále) ihned odvodíme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Obecně: $A = (a_{ij})$, typu $n \times n$.

Adjungovaná matice:

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ (algebraický doplněk prvku a_{ij}),
přičemž M_{ij} je typu $(n-1) \times (n-1)$ a vznikne z matice A
vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce.

Věta: Je-li matice A regulární, pak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A.$$

Příklad: Necht' A je matice z příkladu na str. 28. Vypočítejme A^{-1} .

$$\begin{aligned}\text{Adj } A &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 0 - 1 - 0 + 4 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2 \end{pmatrix}$$

Dospěli jsme k výsledku identickému s maticí A^{-1} na str. 28.

Rozvoj determinantu podle i -tého řádku:

Matice $A = (a_{ij})$ je typu $n \times n$.

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det M_{i2} + \dots \\ \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det M_{in}$$