MM1G: oficiální tahák

Limita, derivace a jejich použití

Derivace elementárních funkcí:

$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = c^x \ (c > 0)$	$f'(x) = c^x \ln c$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \log_a x \ (1 \neq a > 0)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arccotg} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Derivace algebraických operací:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (f-g)' = f' - g', \quad (f\,g)' = f'g + f\,g', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$$

Derivace složené funkce: $\big(f(g(h(x)))\big)' = f'(g(h(x)))\; g'(h(x))\; h'(x)$

Derivace funkcí typu $f(x) = g(x)^{h(x)}$, kde $g(x) > 0$: Využitím $f(x) = \mathrm{e}^{h(x) \ln g(x)}$.

Rostoucí, klesající, konvexní, konkávní funkce f na intervalu J:
$\forall x \in J\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je na J rostoucí, $\forall x \in J\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je na J klesající
$\forall x \in J\ f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je na J ryze konvexní, $\forall x \in J\ f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je na J ryze konkávní

Inflexní bod $[x_0, f(x_0)]$: Graf funkce f v něm přechází z jedné strany tečny na druhou. Jinak: funkce f se mění v bodě x_0 z konvexní na konkávní nebo z konkávní na konvexní. Postačující (ne nutná) podmínka: Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, je x_0 inflexním bodem funkce f.

Šikmá asymptota grafu funkce f pro $x \to +\infty$: $y = kx + q$, kde $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - q) = 0$. Pak $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = k$ a $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = q$. Obdobně pro $x \to -\infty$.

Rovnice (a) tečny a (b) normály ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$:
(a) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, (b) $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Úhel α křivek c_1 a c_2: $\alpha = \operatorname{arctg}\left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$, je-li však $k_1 k_2 = -1$, pak $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; k_1 a k_2 jsou směrnice tečen ke křivkám c_1 a c_2 ve společném bodě.

Funkce f sudá: $f(-x) = f(x)$, **lichá:** $f(-x) = -f(x)$, **p-periodická:** $f(x) = f(x + p)$

Taylorův polynom T_n stupně n v bodě a: $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$, přičemž
$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
a $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, kde $\xi_x \in (a, x)$, je-li $x > a$, nebo $\xi_x \in (x, a)$, je-li $x < a$.

l'Hospitalova pravidla: Nechť pro funkce f a g buď $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, nebo $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ (o $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ není v tomto případě třeba nic předpokládat). Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní), pak existuje také $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Obdobně pro jednostranné limity a pro $x \to +\infty$ a $x \to -\infty$.

Newtonova metoda: Přibližné řešení rovnice $f(x) = 0$: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

Součet vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$

Násobení vektoru $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ skalárem $c \in \mathbb{R}$: $c\vec{u} \stackrel{\text{def}}{=} (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$

Skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{u} \cdot \vec{v} \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n u_i v_i$

Norma (euklidovská velikost) vektoru $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$: $\|\vec{u}\| \equiv \|\vec{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$

Lineární kombinace (LK) vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$:
je vektor $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_k\vec{u}_k$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Lineární obal množiny M vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in \mathbb{R}^n$:
je množina vektorů $\{a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_m\vec{u}_m : \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m \in M, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}\}$, značíme ji $\operatorname{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$

Lineární závislost (LZ) vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$: Existují čísla $a_i \in \mathbb{R}$ taková, že aspoň jedno je nenulové a zároveň $\vec{o} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_k\vec{u}_k$, kde $\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.
Nejsou-li vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ LZ, jsou lineárně nezávislé (LN).

Množina B vektorů z $\mathbb{R}^n$ tvoří bázi netriviálního (pod)prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^n$: jestliže její vektory jsou LN a lineární obal množiny B je roven (pod)prostoru V (tj. B generuje V.) Každé dvě báze podprostoru V mají stejný počet vektorů.

Dimenze (pod)prostoru V: Počet vektorů (libovolné) báze (pod)prostoru V, značí se $\dim V$.

Hodnost $h(A)$ matice A: Maximální počet LN řádkových (sloupcových) vektorů matice A.

Nulový prostor $\mathcal{N}(A)$ matice A typu $m \times n$, $m \leq n$: $\mathcal{N}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{o}\}$
Platí $\dim \mathcal{N}(A) = n - \dim V = n - h(A)$, kde V je lin. obal množiny vektorů tvořených řádky matice A.

Frobeniova věta o řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A je typu $m \times n$, $m \leq n$:
Soustava má alespoň jedno řešení. $\Leftrightarrow$ Vektor $\vec{b}$ je lineární kombinací sloupcových vektorů matice A. $\Leftrightarrow$ $h(A) = h(A|\vec{b})$

Množina $M_{A,\vec{b}}$ všech řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$: $M_{A,\vec{b}} = \vec{x}_0 + \mathcal{N}(A)$, kde $A\vec{x}_0 = \vec{b}$.

Násobení matice A typu $m \times n$ a matice B typu $n \times k$:
$C = AB$ typu $m \times k$, $c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}$, $i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, k$.
Pro sloupcový vektor $\vec{b}$: $\vec{c} = A\vec{b}$ a $\vec{c} = (\sum_{s=1}^n a_{1s}b_s, \sum_{s=1}^n a_{2s}b_s, \ldots, \sum_{s=1}^n a_{ms}b_s)^{\mathrm{T}}$.

Transponovaná matice $A^{\mathbf{T}}$ k matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$:
Matice $C = A^{\mathrm{T}}$, $c_{ij} = a_{ji}$, typu $n \times m$.
Vlastnosti: $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$, $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$, $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

Inverzní matice A^{-1} matici A typu $n \times n$ splňuje: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, kde I je matice identity (jednotková matice).
Vlastnosti: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$
A je **regulární**, pokud k A existuje A^{-1}, jinak **singulární**.

Základní vlastnosti determinantu čtvercové matice A, případně B:
(a) $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$; (b) $\det(AB) = \det A \det B$; (c) A regulární $\Rightarrow$ $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$;
(d) Det. matice se nezmění, jestliže k jednomu z řádků matice přičteme LK ostatních řádků;
(e) Je-li A typu $n \times n$, pak $\det A \neq 0 \iff h(A) = n$, tj. matice A je regulární právě tehdy, když $\det A \neq 0$;
(f) Je-li B matice, která vznikne z matice A prohozením dvou řádků, pak $\det B = -\det A$;
(g) Je-li B matice, která vznikne z matice A vynásobením některého řádku nebo sloupce číslem $r \in \mathbb{R}$, pak $\det B = r \det A$;
(h) Je-li matice A horní nebo dolní trojúhelníková, pak $\det A$ je součinem jejích prvků na hlavní diagonále.

Cramerovo pravidlo: Soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ se čtvercovou regulární maticí. Pak existuje jediné řešení $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Označme B_j matici, kterou dostaneme z matice A záměnou j-tého sloupce za vektor $\vec{b}$. Platí $x_j = \dfrac{\det B_j}{\det A}$.

Inverzní matice k matici A získaná pomocí adjungované matice: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{Adj} A$, kde

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} \leftarrow \textit{nezapomeňte na transpozici}$$

a $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ (algebraický doplněk prvku a_{ij}),

přičemž M_{ij} je typu $(n-1) \times (n-1)$ a vznikne z matice A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

Výpočet determinantu rozvojem podle i-tého řádku: Matice $A = (a_{ij})$ je typu $n \times n$,
$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det M_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$
nebo podle j-tého sloupce
$\det A = (-1)^{j+1} a_{1j} \det M_{1j} + (-1)^{j+2} a_{2j} \det M_{2j} + \cdots + (-1)^{j+n} a_{nj} \det M_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$.

Newtonův interpolační polynom stupně n:
$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$
jeho graf prochází zadanými body $X_0 = [x_0, y_0]$, $X_1 = [x_1, y_1]$, …, $X_n = [x_n, y_n]$.
Koeficienty a_i se získají vyřešením rovnic $N_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Projekce vektoru $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ na vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$: $\operatorname{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{(\vec{u}, \vec{v})}{(\vec{u}, \vec{u})} \vec{u}$

Gramova - Schmidtova ortogonalizace: Dány LN vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, kde $n \le m$. Hledáme LN vektory $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n \in \mathbb{R}^m$ takové, že $\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} = \operatorname{span}\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n\}$ a zároveň $(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = 0$, jestliže $i \ne j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Postup (ortogonalizace):
1) $\vec{q}_1 = \vec{a}_1$
2) $\vec{q}_2 = \vec{a}_2 - \operatorname{proj}_{\vec{q}_1}(\vec{a}_2)$
3) $\vec{q}_3 = \vec{a}_3 - \operatorname{proj}_{\vec{q}_1}(\vec{a}_3) - \operatorname{proj}_{\vec{q}_2}(\vec{a}_3)$ a tak dále
4) $\vec{q}_n = \vec{a}_n - \operatorname{proj}_{\vec{q}_1}(\vec{a}_n) - \operatorname{proj}_{\vec{q}_2}(\vec{a}_n) - \ldots - \operatorname{proj}_{\vec{q}_{n-1}}(\vec{a}_n)$

Ortonormalizace: $\vec{\bar{q}}_1 = \dfrac{\vec{q}_1}{\|\vec{q}_1\|}$, $\vec{\bar{q}}_2 = \dfrac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}$, …, $\vec{\bar{q}}_n = \dfrac{\vec{q}_n}{\|\vec{q}_n\|}$

Vlastní čísla a vlastní vektory matice A typu $n \times n$: $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\vec{o} \ne \vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu $\det(A - \lambda I) = 0$. Vlastní vektory řeší soustavu $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{o}$.
Základní vlastnosti: (a) A je singulární $\Leftrightarrow$ má vl. č. 0. (b) $A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow AA\vec{u} = \lambda^2\vec{u}$
(c) Je-li $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ a existuje-li A^{-1}, pak $A^{-1}\vec{u} = \lambda^{-1}\vec{u}$.
(d) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A$, kde $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, a dále $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = \det A$; čísla λ_i jsou vlastní čísla matice A (započítaná se svou násobností).
(e) A i A^{T} mají stejná vl. čísla, vl. vektory mohou být různé.
(f) Je-li A reálná a symetrická, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná a k nim existují navzájem kolmé vlastní vektory.

Metoda nejmenších čtverců – přímka: V rovině dány body $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Hledáme přímku $y = a_0 + b_0 x$ takovou, aby funkce $f(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - y_i)^2$ nabývala svého minima v $[a_0, b_0]$, což je řešení soustavy: $a\sum_{i=1}^{n} 1 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $\quad a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Při zavedení $\vec{v}_1 \overset{\text{def}}{=} (1, 1, \ldots, 1)$, $\vec{v}_x \overset{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{v}_y \overset{\text{def}}{=} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jde o soustavu
$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\mathrm{T}} & \vec{v}_x^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_x \end{pmatrix} \vec{v}_y^{\mathrm{T}}.$$

Metoda nejmenších čtverců – parabola: V rovině dány body $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Hledáme parabolu $y = a_0 + b_0 x + c_0 x^2$ takovou, aby funkce $f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2$ nabývala svého minima v $[a_0, b_0, c_0]$, což je řešení soustavy: $\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_x \\ \vec{v}_{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\mathrm{T}} & \vec{v}_x^{\mathrm{T}} & \vec{v}_{x^2}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_x \\ \vec{v}_{x^2} \end{pmatrix} \vec{v}_y^{\mathrm{T}}$, kde $\vec{v}_{x^2} = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$.

Metoda nejmenších čtverců – rovina: V prostoru dány body $[x_i, y_i, z_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Hledáme rovinu $z = a_0 + b_0 x + c_0 y$ takovou, aby funkce $f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i + cy_i - z_i)^2$ nabývala svého minima v $[a_0, b_0, c_0]$, což je řešení soustavy: $\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_x \\ \vec{v}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\mathrm{T}} & \vec{v}_x^{\mathrm{T}} & \vec{v}_y^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_x \\ \vec{v}_y \end{pmatrix} \vec{v}_z^{\mathrm{T}}$,

kde $\vec{v}_z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Analytická geometrie ve 2D a 3D

Úhel φ, který svírají dva nenulové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

Přímka v rovině:
Vektorová rovnice: Dán bod Q a směrový vektor $\vec{u}$: $X = Q + s\vec{u}$, $s \in \mathbb{R}$
Obecná rovnice přímky: $ax + by + d = 0$; normálový vektor $\vec{n} = (a, b)$.
Odchylka přímek se směrovými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, <u>platí i pro přímky v prostoru</u>.

Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2,\, u_3v_1 - u_1v_3,\, u_1v_2 - u_2v_1)$

Základní vlastnosti: (a) $\vec{u} = r\vec{v}$, $r \in \mathbb{R}$, pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$; (b) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;
(c) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$; (d) $(s\vec{u}) \times \vec{v} = s(\vec{u} \times \vec{v})$, $s \in \mathbb{R}$;
(e) vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý jak k vektoru $\vec{u}$, tak k vektoru $\vec{v}$; pravidlo pravé ruky;
(f) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\varphi$, kde φ je úhel vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$;
(g) číslo $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ udává obsah rovnoběžníka určeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Smíšený součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Objem rovnoběžnostěnu daného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

Rovina v prostoru:
Parametrická (vektorová) rovnice roviny ϱ ($P, \vec{u}, \vec{v}$ je dáno): $X = P + s\vec{u} + t\vec{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$
Obecná rovnice roviny ϱ: $ax + by + cz + d = 0$; normálový vektor $\vec{n} = (a, b, c) \perp \varrho$
Odchylka $\varphi \in [0, \pi/2]$ dvou rovin s normálovými vektory $\vec{n}_1, \vec{n}_2$: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|}$

Přímka v 3D prostoru:
Vektorová rovnice: dán bod P a směrový vektor $\vec{u}$, pak přímka $p:\ X = P + s\vec{u}$, $s \in \mathbb{R}$.
Průnik dvou rovin, např.: přímka $p = \varrho \cap \eta$, kde $\varrho:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
a $\eta:\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
Odchylka $\varphi \in [0, \pi/2]$ přímky se směrovým vektorem $\vec{u}$ od roviny s normálovým vektorem $\vec{n}$:
$\sin\varphi = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{n}\|}$.
Řekneme, že dvě různé přímky jsou *rovnoběžné*, pokud mají rovnoběžné směrové vektory; *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a mají společný bod; *mimoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a nemají společný bod.

Vzdálenost bodů $A, B \in \mathbb{R}^3$: $d(A, B) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|B - A\|$

Vzdálenost bodu $P \in \mathbb{R}^3$ od přímky p v $\mathbb{R}^3$: $d(P, p) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{X \in p} d(P, X) = \dfrac{\|(P - A) \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p a A je libovolný bod přímky p.

Vzdálenost bodu $P = [x_0, y_0, z_0]$ od roviny ϱ dané obecnou rovnicí $ax + by + cz + d = 0$:
$d(P, \varrho) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{X \in \varrho} d(P, X) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Vzdálenost dvou přímek p_1, p_2:
(a) rovnoběžných: viz vzdálenost bodu a přímky; (b) různoběžných: vzdálenost nulová;
(c) mimoběžných: $d(p_1, p_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{X_1 \in p_1, X_2 \in p_2} d(X_1, X_2) = \dfrac{|(P_1 - P_2) \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}$,
kde P_i je libovolný bod přímky p_i a $\vec{u}_i$ je směrový vektor přímky p_i, přičemž $i = 1, 2$.