

Předmět: MM1G

Dnešní látka

- ▶ periodické funkce

Periodická funkce

Definice: O funkci f s maximálním definičním oborem D_f řekneme, že je periodická s periodou $P > 0$, pokud platí

$$\forall x \in D_f \quad ((x + P) \in D_f \text{ a zároveň } (x - P) \in D_f), \quad (1)$$

$$\forall x \in D_f \quad f(x + P) = f(x). \quad (2)$$

Připomeňme, že $\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ je množina všech celých čísel.

Z (1) a (2) plyne

$$\forall x \in D_f \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(x + nP) = f(x).$$

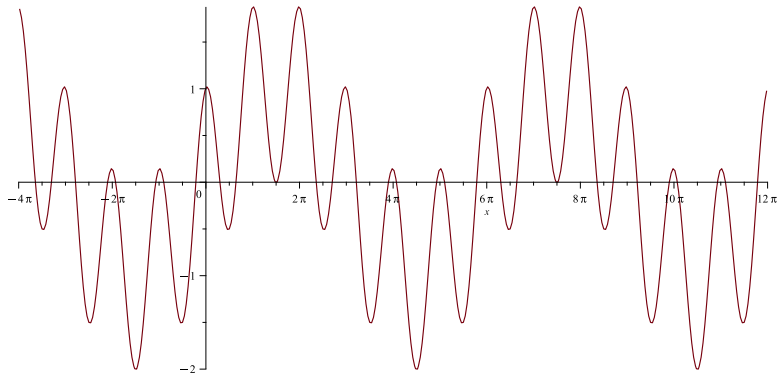
Příklad: Funkce $\sin x$ je periodická s periodou 2π , ale také s periodou 4π nebo 6π atd. Nejdůležitější proto je ta nejkratší perioda P , pro niž platí (1) a (2), říká se jí *primitivní perioda*.

Příklad: Najděte primitivní periodu funkce $h(x) = f(x) + g(x)$, kde $f(x) = \sin(x/3)$ a $g(x) = \cos 2x$.

Řešení: $D_f = D_g = (-\infty, +\infty)$ Funkce $\sin x$ a $\cos x$ mají obě primitivní periodu 2π . Označme P_f neznámou primitivní periodu funkce f . Pak $f(x + P_f) = f(x) = \sin(x/3) = \sin(x/3 + 2\pi)$, tedy $\sin((x + P_f)/3) = \sin(x/3 + 2\pi)$, tj. $(x + P_f)/3 = x/3 + 2\pi$. Odtud $P_f = 6\pi$. Jinými slovy, P_f je taková perioda, že násobena $1/3$ dává periodu 2π .

Nyní necht' P_g je neznámá primitivní perioda funkce g . Pak $g(x + P_g) = g(x) = \cos 2x = \cos(2x + 2\pi)$, tedy $\cos(2(x + P_g)) = \cos(2x + 2\pi)$, tj. $2(x + P_g) = 2x + 2\pi$. Odtud $P_g = \pi$. Jinými slovy, P_g je taková perioda, že násobena 2 dává periodu 2π .

Jedna perioda je 6π a druhá π , takže 6π je i perioda funkce g . Primitivní perioda funkce h tedy je $P_h = 6\pi$.



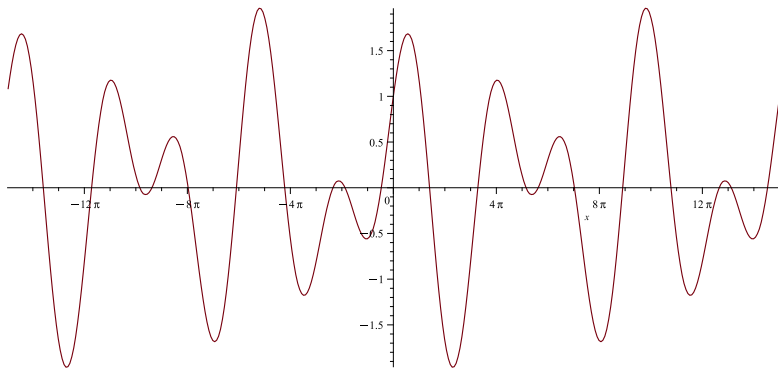
Pozorujeme, že P_h je například vzdálenost mezi $x_1 = 3\pi/2$ a $x_2 = 15\pi/2$, což je $12\pi/2 = 6\pi$.

Příklad: Najděte primitivní periodu funkce $h(x) = f(x) + g(x)$, kde $f(x) = \sin(2x/3)$ a $g(x) = \cos(2x/5)$.

Řešení: $D_f = D_g = (-\infty, +\infty)$ Funkce $\sin x$ a $\cos x$ mají obě primitivní periodu 2π .

Zjistíme, že $P_f = 2\pi/(2/3) = 3\pi$ a $P_g = 2\pi/(2/5) = 5\pi$.

Primitivní perioda P_h se však nemůže rovnat P_f ani P_g , nýbrž je rovna π -násobku nejmenšího společného násobku čísel 3 a 5, jímž je 15. Odtud $P_h = 15\pi$.



Pozorujeme, že P_h je například vzdálenost mezi $x_1 = -8\pi$ a $x_2 = 7\pi$, což je 15π .