

Opakování: Derivace a monotonie

Nová látka:

- ▶ intervaly monotonie
- ▶ lokální extrémy
- ▶ globální extrémy
- ▶ konvexnost a konkávnost
- ▶ inflexní bod
- ▶ asymptota grafu funkce
- ▶ vyšetření průběhu funkce
- ▶ Taylorův polynom
- ▶ Newtonova metoda a Keplerova rovnice
- ▶ fyzikální význam derivace

Literatura:

M. Kočandrlová: GEO-MATEMATIKA I, kapitoly I.8, I.9

Opakování

Derivace a monotonie

Věta (Lagrange): Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a má-li vlastní derivaci na otevřeném intervalu (a, b) , pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Platí toto:

$f'(x) > 0$ na $(a, b) \implies f$ je rostoucí na $[a, b]$.

$f'(x) < 0$ na $(a, b) \implies f$ je klesající na $[a, b]$.

$f'(x) = 0$ na $(a, b) \implies f$ je konstatní na $[a, b]$.

Důsledek

$f'(x) \leq 0$ na $(a, b) \implies f$ je nerostoucí na $[a, b]$.

$f'(x) \geq 0$ na $(a, b) \implies f$ je neklesající na $[a, b]$.

Využíváme ke zjištění intervalů monotonie.

f rostoucí (klesající) na $[a, b]$:

$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \ \& \ x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Lokální extrémy

Ostré lokální minimum v bodě x_0 :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \& \ x \neq x_0 \quad f(x) > f(x_0)$$

V prstencovém okolí bodu x_0 má funkce f větší hodnotu než v bodě x_0 . Příklad: $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$.

Neostré lokální minimum v bodě x_0 :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \& \ x \neq x_0 \quad f(x) \geq f(x_0)$$

V prstencovém okolí bodu x_0 má funkce f hodnotu aspoň takovou jako v bodě x_0 . Příklad: $f(x) = x + |x|$, $x_0 = 0$.

Ostré lokální maximum v bodě x_0 :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \& \ x \neq x_0 \quad f(x) < f(x_0)$$

V prstencovém okolí bodu x_0 má funkce f menší hodnotu než v bodě x_0 . Příklad: $f(x) = -x^2$, $x_0 = 0$.

Neostré lokální maximum v bodě x_0 :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \& \ x \neq x_0 \quad f(x) \leq f(x_0)$$

V prstencovém okolí bodu x_0 má funkce f hodnotu nejvýše takovou jako v bodě x_0 . Příklad: $f(x) = x - |x|$, $x_0 = 0$.

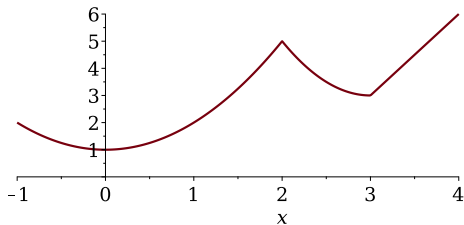
Postup vyšetřování lokálních extrémů

- 1) Body $x \in \mathcal{D}(f)$, kde $f'(x) = 0$ (**stacionární b.**) nebo $f'(x)$ neexistuje. (Dle některých autorů body skupiny 1) **kritické b.**)
- 2) Vyšetření chování funkce f v okolí těchto bodů. Například v levém okolí bodu x_0 f roste, v pravém klesá $\implies$ v x_0 funkce f nabývá ostrého lokálního maxima.

Též je možné využít postačující podmínky dané větou:

Věta: Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.



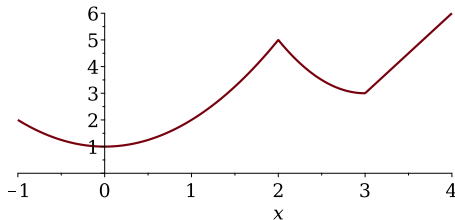
Na intervalu $(-1, 4)$ má funkce ostré lokální min. v bodech 0 a 3 s hodnotami 1 a 3, dále ostré lok. max. v bodě 2 s $f(2) = 5$. Derivace $f'(0) = 0$, $f'(2)$ a $f'(3)$ neexistují.

Globální (absolutní) extrémy

Definice: Největší (nejmenší) hodnotě, kterou funkce f nabývá na množině M , říkáme globální (nebo absolutní) maximum (minimum) funkce f na množině M .

Připomeňme: Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ má na $[a, b]$ globální minimum i globální maximum.

Jak spojitost funkce, tak uzavřenost intervalu jsou podstatné!



Body, v nichž by na intervalu $[-1, 4]$ mohl být glob. extrém jsou $-1, 0, 2, 3$ a 4 . Ostré glob. min. v bodě 0 , kde $f(0) = 1$, ostré glob. max. v bodě 4 , kde $f(4) = 6$.

Hledání globálních extrémů na intervalu $[a, b]$

- ▶ Vytvořit $\hat{B} = \{x \in (a, b) \mid f'(x) = 0 \text{ nebo } f'(x) \text{ neexistuje}\}$.
- ▶ Vytvořit $B = \hat{B} \cup \{a, b\}$.
Tj. B sestává z bodů, v nichž by mohl být globální extrém.
- ▶ Určit takové prvky $x_{\min}, x_{\max} \in B$, aby platilo $f(x_{\min}) = \min_{x \in B} f(x)$ a $f(x_{\max}) = \max_{x \in B} f(x)$.
Tj. vypočítat hodnoty funkce f v bodech z B a podle největší a nejmenší z nich určit odpovídající argumenty funkce f .

Je-li interval (polo)otevřený nebo neomezený, pak

- ▶ $\hat{B}$ jako výše
- ▶ Vytvořit B přidáním krajního bodu intervalu, pokud je konečný a je prvkem intervalu. Tedy $B = \hat{B}$ nebo $B = \hat{B} \cup \{a\}$ nebo $B = \hat{B} \cup \{b\}$.
- ▶ Jako výše vyhodnotit $f(x)$, kde $x \in B$. Navíc vyšetřit chování funkce v blízkosti otevřeného (neomezeného) konce intervalu.

Konvexní a konkávní funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je **ryze konvexní** na intervalu J , jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí: Bod $Q_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží **pod přímkou** Q_1Q_3 , danou body $Q_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $Q_3 = [x_3, f(x_3)]$.

ryze konkávní ... **nad přímkou** Q_1Q_3
(neryze) konvexní ... **pod přímkou nebo na přímce** Q_1Q_3
(neryze) konkávní ... **nad přímkou nebo na přímce** Q_1Q_3

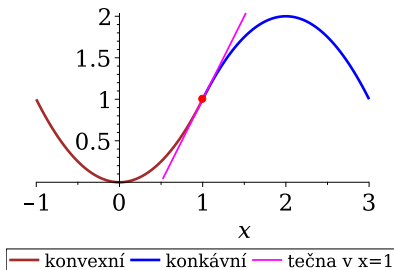
Věta: Necht' funkce f je spojitá na intervalu J . Pak platí

- a) $\forall x \in J \quad f''(x) > 0 \implies f$ je na J ryze konvexní
- b) $\forall x \in J \quad f''(x) \geq 0 \implies f$ je na J (neryze) konvexní
- c) $\forall x \in J \quad f''(x) < 0 \implies f$ je na J ryze konkávní
- d) $\forall x \in J \quad f''(x) \leq 0 \implies f$ je na J (neryze) konkávní
- e) $\forall x \in J \quad f''(x) = 0 \implies f$ je na J lineární

Poznámka: Interval J může být uzavřený a předpoklad o $f''(x)$ se může týkat jen vnitřních bodů intervalu J .

Inflexní bod

Definice: Necht' funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Jestliže se funkce f mění v bodě x_0 z konvexní na konkávní nebo z konkávní na konvexní, nazýváme bod x_0 **inflexním bodem**. Jinak: **Přecházení z jedné strany tečny na druhou stranu.**



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-1, 1], \\ 2 - (x - 2)^2, & x \in (1, 3), \end{cases}$$

$$f'(1) = 2,$$

$$f''(1_-) = 2, f''(1_+) = -2,$$

inflexní bod $x_0 = 1$

Tvrzení: Je-li $f''(x_0) = 0$ (**kritický b.**) a $f'''(x_0) \neq 0$, je x_0 inflexní bod funkce f . Příklad: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$. **Pozor**, pokud $f'''(x_0) = 0$, tvrzení nelze nijak použít. Viz $x_0 = 0$ a funkce např. $f_1(x) = x^4$ a $f_2(x) = x^5$, kdy x_0 je inflexní bod funkce f_2 , ne však funkce f_1 , ta je na $(-\infty, +\infty)$ konvexní.

Asymptoty grafu funkce

Definice: Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **šikmou asymptotou** grafu funkce f pro $x \rightarrow -\infty$, jestliže $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0$.

... pro $x \rightarrow \infty$, jestliže $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - q) = 0$

Řekneme, že přímka $x = x_0$ je **svislou asymptotou** grafu funkce f v bodě x_0 , jestliže funkce f má v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní (tj. $+\infty$ nebo $-\infty$).

Výpočet konstant k a q : $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, případně

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx), \text{ případně}$$
$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

Příklady: Funkce $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ má svislé asymptoty v bodech $x = \pi/2 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ má pro $x \rightarrow -\infty$ šikmou asymptotu $y = -\pi/2$ a pro $x \rightarrow \infty$ šikmou asymptotu $y = \pi/2$.

Vyšetření průběhu funkce f

- ▶ definiční obor $\mathcal{D}(f)$; f je sudá, lichá, periodická; intervaly spojitosti (též zleva, zprava); limity v krajních bodech intervalů tvořících $\mathcal{D}(f)$; průsečíky se souřadnými osami (tj. $y = f(0)$ a $x \in \mathcal{D}(f)$ splňující $f(x) = 0$)
- ▶ f' , $\mathcal{D}(f')$; intervaly monotonie; lokální extrémy
- ▶ f'' , $\mathcal{D}(f'')$; intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body
- ▶ šikmé a svislé asymptoty; graf f ; obor hodnot $\mathcal{H}(f)$ (někdy jej lze určit už spolu s $\mathcal{D}(f)$)

Příklad: $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$, $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

Funkce f je lichá ($f(-x) = -f(x)$), není periodická.

Je spojitá na intervalech, které tvoří $\mathcal{D}(f)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$f'(x) = -\frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{3}, x = 0, x = 2\sqrt{3}$$

Funkce klesá na intervalech $(-\infty, -2\sqrt{3}]$ a $[2\sqrt{3}, +\infty)$; roste na intervalech $[-2\sqrt{3}, -2)$, $(-2, 2)$ a $(2, 2\sqrt{3}]$.

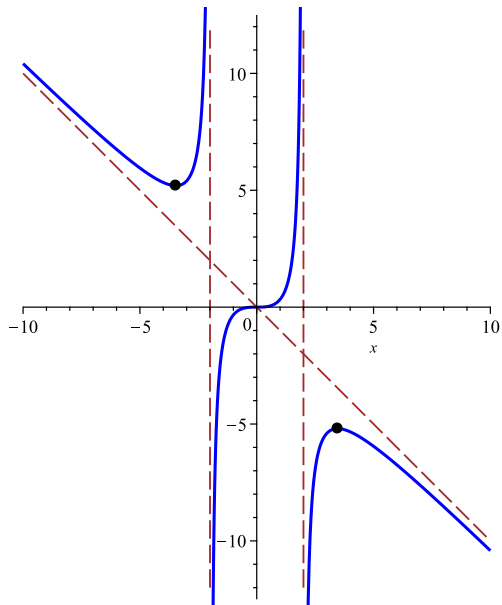
Ostré lokální minimum v $x_1 = -2\sqrt{3}$, $f(x_1) = 3\sqrt{3}$, ostré lokální maximum v $x_2 = 2\sqrt{3}$, $f(x_2) = -3\sqrt{3}$.

$f'' = -\frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$, funkce je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -2)$

a $[0, 2)$, ryze konkávní na intervalech $(-2, 0]$ a $(2, +\infty)$. Inflexní bod $x = 0$, $f(0) = 0$.

Svislé asymptoty $x = -2$ a $x = 2$, šikmá asymptota $y = -x$ (výpočet pomocí limit, viz str. 9).

Obor hodnot $\mathcal{H}(f) = (-\infty, +\infty)$



Taylorův polynom

Věta: Necht' funkce f má v intervalu $J = [a, a + h]$ (případně $J = [a + h, a]$, je-li h záporné) spojitě derivace do řádu $n + 1$ včetně. Pak existuje bod $\xi_x \in J$ takový, že pro $x = a + h$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde

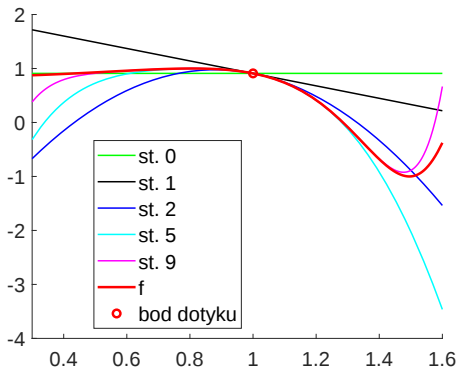
$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

a

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Definice: Polynomu T_n se říká **Taylorův polynom stupně n v bodě a** . (Je-li $a = 0$, pak Maclaurinův polynom).

Taylorův polynom



Rozvoj funkce f v okolí bodu a :

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Graf: $f(x) = \sin(2^{x^2})$, $f'(x) = 2 \ln 2 x 2^{x^2} \cos(2^{x^2})$, $a = 1$.

$$T_3(x) = 0,9092974 - 1,153804(x-1) - 4,871656(x-1)^2 - 8,031152(x-1)^3$$

Příklad: Na intervalu $I = [-\alpha, \alpha]$, kde $\alpha = 0,1$, nahradíme funkci $f(x) = \sin x$ Taylorovým polynomem čtvrtého stupně v bodě $a = 0$ a odhadneme shora absolutní hodnotu chyby, již se náhradou dopustíme.

Jest $f(a) = 0$, $f'(a) = \cos x|_{x=a} = 1$, $f''(a) = -\sin x|_{x=a} = 0$,
 $f'''(a) = -\cos x|_{x=a} = -1$, $f^{(4)}(a) = \sin x|_{x=a} = 0$, z toho plyne, že v
T. polynomu koeficient u čtvrté mocniny bude roven nule a

$$T_4(x) = T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}.$$

Dále pro $x \in I$ je $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_5(x)$,

$$\text{kde } R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}(x-a)^5 = \frac{\sin^{(5)}(\xi_x)}{5!}x^5 = \frac{\cos \xi_x}{120}x^5$$

a $\xi_x \in [a, x]$ nebo $\xi_x \in [x, a]$, je-li $x < a$.

Nechť $x \in I$, horní odhad: $|R_5(x)| \leq \max_{x \in I} |R_5(x)|$

$$= \max_{x \in I} \frac{\cos \xi_x}{120} |x^5| \leq \frac{\alpha^5}{120} \approx 8,33333 \cdot 10^{-8}$$

Poznámka: Pro $\alpha = \pi/2$ je $\max_{x \in I} |R_5(x)| \leq \frac{\alpha^5}{120} \approx 0,07969$.

Přibližné řešení rovnice $f(x) = 0$ Newtonovou metodou

Myšlenka: Sestrojit tečnu ke grafu funkce f v bodě $[x_k, f(x_k)]$ a najít její průsečík x_{k+1} s osou x .

Tečna: $y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$

Řešíme $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$, odtud algoritmus

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{kde } k = 0, 1, 2, \dots$$

a počáteční bod x_0 zvolíme.

Keplerova rovnice pro nerušený keplerovský pohyb družic:

$E - e \sin E = M$, kde E je excentrická anomálie, M je střední anomálie a e je excentricita eliptické dráhy.

Příklad: $M = 4,8484$, $e = 0,048$, $E = ?$

Řešíme $f(E) = E - e \sin E - M = 0$, tj. $f'(E) = 1 - e \cos E$.

Zvolme počáteční hodnotu $E_0 = 4$.

Pak $f(E_0) = -0,8120734802$, $f'(E_0) = 1,031374894$ a

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 - \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} = 4 - \frac{4 - 0,048 \sin 4 - 4,8484}{1 - 0,048 \cos 4} \\ &= 4 - \frac{-0,8120734802}{1,031374894} = 4,787369835261424, \end{aligned}$$

máme $f(E_0) < f(E_1) < 0$, neboť $f(E_1) = -0,01316503288$.

Další krok $E_2 = E_1 - f(E_1)/f'(E_1) = 4,800582376341891$,
 $f(E_2) = -4,17684 \cdot 10^{-6}$.

Další iterace $E_3 = E_2 - f(E_2)/f'(E_2) = 4,800586570568975$,
 $f(E_3) = 4,3 \cdot 10^{-10} \approx 0$ ukazuje, že už máme uspokojivé řešení.

Ještě zkusíme jednu iteraci, výsledek $E_4 = 4,800586570569398$,
 $f(E_4) = 4,3 \cdot 10^{-10}$ už nevede ke zlepšení (vliv zaokrouhlovacích chyb).

Fyzikální význam derivace

Příklad: Je dán kvádr s konstantní výškou c a se čtvercovou podstavou s délkou strany $b(t)$ závislou na čase t . Okamžitá rychlost změny délky strany $b(t)$ je popsána funkcí $v(t)$, okamžité zrychlení této změny je popsáno funkcí $a(t)$. Najděte funkce, které popisují okamžitou rychlost a okamžité zrychlení změny objemu $V(t)$ kvádru v závislosti na čase.

Platí $V(t) = cb^2(t)$, $v(t) = b'(t)$ a $a(t) = v'(t) = b''(t)$.

Rychlost změny objemu:

$$V'(t) = (cb^2(t))' = 2cb(t)b'(t) = 2cb(t)v(t).$$

$$\begin{aligned} \text{Zrychlení změny objemu: } V''(t) &= (2cb(t)v(t))' \\ &= 2c(b'(t)v(t) + b(t)v'(t)) = 2c(v^2(t) + b(t)a(t)). \end{aligned}$$

Příklad: Hmotný bod se pohybuje po přímce. Závislost jeho dráhy $s(t)$ (v metrech) na čase t (v sekundách) je popsána funkcí $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 16t$. Určete:

- a) okamžitou rychlost a zrychlení v časech $t_1 = 1$ s a $t_2 = 6$ s;
- b) časy, v nichž se mění orientace pohybu, a okamžitou rychlost v a okamžité zrychlení a v těchto časech.

Stručně: derivace dráhy = rychlost,
derivace rychlosti = zrychlení.

a) Rychlost $v(t) = s'(t) = 2t^2 - 12t + 16$, $v(1) = 6$ [m/s]
a $v(6) = 16$ [m/s].

Zrychlení $a(t) = s''(t) = 4t - 12$, $a(1) = -8$ [m/s²],
 $a(6) = 12$ [m/s²].

b) Změna orientace $\Leftrightarrow$ změna znaménka rychlosti v časech,
pro něž $v(t) = 0$, což nastane v časech $t_3 = 2$ a $t_4 = 4$.
Pak $a(2) = -4$ [m/s²] a $a(4) = 4$ [m/s²].