K předmětu MM1G: Příklady z analytické geometrie[1]

Verze ze dne 18. prosince 2023

Jan Chleboun

Úvod

O základech analytické geometrie se předpokládá, že se s nimi studující seznámili během středoškolského studia. Proto se příprava na řešení jednoduchých příkladů, které se objevují u zkoušky, ponechává především na samostudium. Nicméně pro ulehčení přípravy a pro ilustraci okruhů zkouškových příkladů vznikla tato minisbírka.

Základní stavební kameny, z nichž lze vybudovat cestu k řešení, jsou mj. obsaženy v oficiálním taháku k MM1G. Ve sbírce jsou příslušné pojmy označeny *. Místa v textu, která jsem považoval za nadprůměrně důležitá, jsou označena **(!)** na pravém okraji stránky.

Jednoduché úkoly nemají své samostatné příklady, jsou součástí složitějších úloh. Například nalezení průniku přímky s rovinou je dílčím úkolem v příkladu 2. Smyslem příkladů není poskytnout návody pro řešení všemožných příkladů, nýbrž ukázat, jak se z několika základních kamenů (vektorový součin, skalární součin, projekce, varianty rovnic roviny a přímky, řešení soustavy lineárních algebraických rovnic) buduje cesta k vyřešení zadané úlohy.

Nemyslím, že je rozumné učit se (zpaměti) jednotlivé typy příkladů. Daleko užitečnější je uvědomit si, že k vyřešení docela pestré rodiny úloh postačí vhodná kombinace několika základních pojmů a nástrojů. Jsou to

- *vektorová rovnice přímky:* $X = Q + s\boldsymbol{u}, \quad s \in \mathbb{R}$
- *parametrická (vektorová) rovnice roviny:* $X = P + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$

[1] Za pečlivé přečtení textu, promyšlení jeho obsahu a za připomínky, které vedly k větší srozumitelnosti a sdělnosti této minisbírky, děkuji osobě, která si ze skromnosti nepřála být jmenována.

- *obecná rovnice roviny:* $ax + by + cz + d = 0$
- *normálový vektor roviny* $ax + by + cz + d = 0$*:* $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$
- *skalární součin vektorů* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *a* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$*:* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \equiv \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
- *vektorový součin vektorů* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *a* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$*:* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$
- *smíšený součin vektorů* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *a* $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$*:* $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$
- *délka (velikost) vektoru:* $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$
- *úhel* φ*, který svírají dva nenulové vektory* $\boldsymbol{u}$ *a* $\boldsymbol{v}$*:* $\cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$ (může být i tupý)
- *projekce vektoru* $\boldsymbol{w}$ *na vektor* $\boldsymbol{u}$*:* $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) = \dfrac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}$, k projekci poznámka[2]

Čtenářům doporučuji učebnici `http://www.realisticky.cz/ucebnice.php?id=4`. Ti, kdo se s analytickou geometrií dosud setkali jen omezeně, v ní naleznou pěkně zpracované základní poznatky, všichni pak mohou využít řadu vyřešených příkladů pokrývajících i úlohy, na něž se v této minisbírce nedostalo.

Příklady

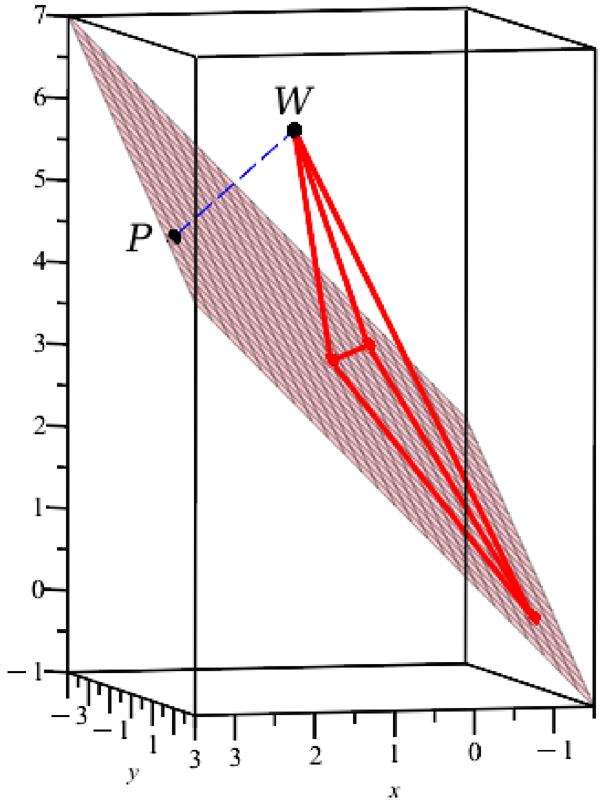
Příklad 1: Rovina ϱ je dána body $A = [1, 2, 0]$, $B = [1, 0, 3]$ a $C = [0, 2, 3]$. Napište obecnou rovnici roviny ϱ.

Řešení: Obecná rovnice roviny ϱ má tvar* $ax + by + cz + d = 0$. Víme, že vektor (a, b, c) je normálovým vektorem* roviny ϱ. Vzpomeneme si na vlastnosti vektorového součinu* a ihned nás napadne, že vektorovým součinem dvou vektorů v rovině ϱ získáme vektor k nim kolmý, tj. normálový vektor roviny ϱ. Potřebné vektory jsou v rovině ϱ určeny body A, B a C. Počítejme

$$\boldsymbol{v}_{AB} = B - A = (0, -2, 3), \quad \boldsymbol{v}_{AC} = C - A = (-1, 0, 3), \quad \boldsymbol{v}_{AB} \times \boldsymbol{v}_{AC} = (-6, -3, -2).$$

Vektor $(-6, -3, -2)$ je kolmý k rovině ϱ a jeho složky bychom mohli ztotožnit s parametry a, b a c. Protože však raději počítáme s kladnými čísly, ke stanovení obecné rovnice roviny ϱ použijeme vektor $(6, 3, 2)$, jenž je samozřejmě také kolmý k rovině ϱ. Získáme rovnici $6x + 3y + 2z + d = 0$.

[2]Protože $\dfrac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u} = \dfrac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}_0$, kde $\boldsymbol{u}_0 = \dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$ je vektor délky jedna, platí pro velikost vektoru $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$, že $\|\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})\| = |(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w})|$. Toto číslo tedy je velikost kolmého průmětu vektoru $\boldsymbol{w}$ do jednotkového vektoru $\boldsymbol{u}_0$. Jinými slovy, pro vektor $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{w} - (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}_0$ platí, že je kolmý na vektor $\boldsymbol{w}$ a že $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{q} + (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}_0$.



Obrázek 1: K příkladu 2. Čtyřstěn je zároveň jedním ze dvou řešení příkladu 3.

Pro určení hodnoty d postačí do rovnice dosadit souřadnice nějakého bodu, který leží v rovině ϱ, například bodu A. Z rovnice $6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + d = 0$ plyne $d = -12$. Obecná rovnice roviny ϱ tedy je $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

Zkouška: Dosazením ověříme, že zadané body leží v rovině ϱ.

Příklad 2: Rovina ϱ je dána body $A = [-1, 2, 0]$, $B = [1, 0, 3]$ a $C = [0, -2, 3]$. Z bodu $W = [2, 2, 6]$ spusťte kolmici p na rovinu ϱ a určete její průsečík P s rovinou ϱ. Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCW$.

Řešení: Postupem jako v příkladu 1 odvodíme normálový vektor $\boldsymbol{n}_\varrho$ roviny ϱ, tj. $\boldsymbol{n}_\varrho = \boldsymbol{v}_{AB} \times \boldsymbol{v}_{AC} = (6, -3, -6)$, a obecnou rovnici roviny ϱ, tj. $6x - 3y - 6z + 12 = 0$, tu však můžeme zjednodušit na $2x - y - 2z + 4 = 0$. *Pozor, vektor* $\widehat{\boldsymbol{n}}_\varrho = (2, -1, -2)$ *je kolmý k rovině* ϱ *a je vhodný pro odvození obecné rovnice roviny a definici kolmice k rovině, avšak vztah k obsahu trojúhelníka* ABC *má vektor* $\boldsymbol{n}_\varrho = \boldsymbol{v}_{AB} \times \boldsymbol{v}_{AC} = (6, -3, -6)$. *Nelze tedy bezmyšlenkovitě zaměňovat* $\boldsymbol{n}_\varrho$ *a* $\widehat{\boldsymbol{n}}_\varrho$. **(!)**

Vektorová rovnice* kolmice p je $X = W + t\widehat{\boldsymbol{n}}_\varrho = [2, 2, 6] + t(2, -1, -2)$, kde $t \in \mathbb{R}$. Protože $P \in p$ a zároveň $P \in \varrho$, musí pro nějaké $t_0 \in \mathbb{R}$ platit

$$2(2 + 2t_0) - (2 - t_0) - 2(6 - 2t_0) + 4 = 0,$$

odtud $t_0 = \dfrac{2}{3}$ a $P = \left[\dfrac{10}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{14}{3}\right]$, viz Obr. 1.

Objem V jehlanu je roven třetině součinu obsahu jeho podstavy S a jeho výšky v, tj. $V = \dfrac{1}{3} S v$. Víme, že $S = \|\boldsymbol{n}_\varrho\|/2$ (polovina obsahu rovnoběžníka), konkrétně $S = \dfrac{9}{2}$.

Výška v je rovna délce úsečky PW: $v = \left\| \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3} \right) \right\| = 2$. Odtud $V = 3$.

Kontrolu můžeme provést i poněkud pozměněnou úvahou o výšce jehlanu. Vzdálenost v bodu W od roviny ϱ je rovna velikosti vektoru, který dostaneme jako kolmý průmět (projekci) vektoru (například) $\boldsymbol{v}_{BW} = W - B = (1, 2, 3)$ do vektoru normály $\boldsymbol{n}_\varrho$. Z předchozího víme, že $S = \|\boldsymbol{n}_\varrho\|/2$ a $V = \frac{1}{3}Sv = \frac{1}{6}\|\boldsymbol{n}_\varrho\|v$, tedy

$$V = \frac{1}{6}\|\boldsymbol{n}_\varrho\| \left\| \mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}_\varrho}(\boldsymbol{v}_{BW}) \right\| = \frac{1}{6}\|\boldsymbol{n}_\varrho\| \left\| \frac{(\boldsymbol{n}_\varrho, \boldsymbol{v}_{BW})}{(\boldsymbol{n}_\varrho, \boldsymbol{n}_\varrho)} \boldsymbol{n}_\varrho \right\| = \frac{1}{6} \left| (\boldsymbol{v}_{BW}, \boldsymbol{n}_\varrho) \right|. \tag{1}$$

Po dosazení konkrétních vektorů $V = \frac{1}{6} \left| \big((1, 2, 3), (6, -3, -6) \big) \right| = \frac{18}{6} = 3$. Zdůrazněme, že vztah (1) neplatí pro jakýkoli normálový vektor roviny ϱ. Vyšli jsme totiž ze vztahu $S = \|\boldsymbol{n}_\varrho\|/2$, jenž vznikl z vektorového součinu vektorů odpovídajících dvěma stranám trojúhelníka, jenž tvoří jednu stěnu čtyřstěnu.

Poznámky: Stejnou hodnotu V dostaneme i v případě, že v (1) místo $\boldsymbol{v}_{BW}$ použijeme $\boldsymbol{v}_{AW} = (3, 0, 6)$ nebo $\boldsymbol{v}_{CW} = (2, 4, 3)$. **(!)**

Zároveň můžeme odvozený vztah zobecnit na výpočet objemu jehlanu nebo hranolu s podstavou tvořenou trojúhelníkem[3] ABD nebo rovnoběžníkem $ABCD$ **(!)**

$$V = \frac{1}{k} |(\boldsymbol{v}_{AB} \times \boldsymbol{v}_{AD}) \cdot \boldsymbol{v}_{AW}|, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{v}_{AW} = W - A$ je vektor daný hranou AW jehlanu nebo hranolu (nerovnoběžnou s podstavou), $k = 6$ pro jehlan s trojúhelníkovou podstavou, $k = 3$ pro jehlan s rovnoběžníkovou podstavou, $k = 2$ pro hranol s trojúhelníkovou podstavou, $k = 1$ pro hranol s rovnoběžníkovou podstavou (rovnoběžnostěn). Tečka značí skalární součin.

Příklad 3: Rovina ϱ je dána body $A = [-1, 2, 0]$, $B = [1, 0, 3]$ a $C = [0, C_y, 3]$. Najděte všechny hodnoty C_y takové, aby čtyřstěn $ABCW$, kde $W = [2, 2, 6]$, měl objem $V = 3$.

Řešení: Objem jehlanu (čtyřstěnu) $V = \frac{1}{3}vS$, kde v je výška jehlanu a $S = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_{AB} \times \boldsymbol{v}_{AC}\|$ obsah jeho podstavy — trojúhelníka ABC, viz vlastnosti vektorového součinu* dvou vektorů. Výšku v určíme pomocí projekce* vektoru $\boldsymbol{v}_{AW} = W - A$ na vektor $\boldsymbol{v}_{AB} \times \boldsymbol{v}_{AC}$, což je podrobně vyloženo v příkladu (2). Podobně jako u (2) dospějeme[4] k

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}|(\boldsymbol{v}_{AB} \times \boldsymbol{v}_{AC}) \cdot \boldsymbol{v}_{AW}| = \frac{1}{6} \left| \big((2, -2, 3) \times (1, C_y - 2, 3) \big) \cdot (3, 0, 6) \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| (-3C_y, -3, 2C_y - 2) \cdot (3, 0, 6) \right| = \frac{1}{6}|3C_y - 12|. \end{aligned} \tag{3}$$

Zároveň dle zadání $V = 3$ a (3) vede k rovnici

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}|3C_y - 12| &= 3, \\ |C_y - 4| &= 6, \end{aligned}$$

[3] Proč trojúhelník ABD a nikoliv ABC? Protože pak by nebylo možné všechny uvažované případy popsat jednotným vztahem (2).

[4] Poznamenejme, že výpočet smíšeného součinu $(\boldsymbol{v}_{AB} \times \boldsymbol{v}_{AC}) \cdot \boldsymbol{v}_{AW}$ odpovídá výpočtu determinantu matice sestavené z řádkových vektorů $\begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_{AW} \\ \boldsymbol{v}_{AB} \\ \boldsymbol{v}_{AC} \end{vmatrix}$. Protože nás zajímá absolutní hodnota výsledku, na pořadí vektorů v matici nezáleží.

která má dvě řešení: $C_{y,1} = 10$ a $C_{y,2} = -2$. Jim odpovídají dva body, a to[5] $C_1 = [0, 10, 3]$ a $C_2 = [0, -2, 3]$.

Příklad 4: Pro přímku p platí $p = \sigma_1 \cap \sigma_2$, kde $\sigma_1 : \; x + 2y + 3z + 4 = 0$ a $\sigma_2 : 3x - 2y - z - 2 = 0$ jsou obecné rovnice rovin σ_1 a σ_2. Stanovte vzájemné postavení přímky p a přímky q, kde

a) $q : \; X = Q + s\boldsymbol{w}$, kde $Q = [1, 1, 1]$, $\boldsymbol{w} = (2, -1, 2)$ a $s \in \mathbb{R}$;

b) $q : \; X = Q + s\boldsymbol{w}$, kde $Q = [1, 1, 1]$, $\boldsymbol{w} = (-6, -15, 12)$ a $s \in \mathbb{R}$;

c) $q : \; X = Q + s\boldsymbol{w}$, kde $Q = [1, 1, 1]$, $\boldsymbol{w} = (-9, -22, 16)$ a $s \in \mathbb{R}$;

d) $q : \; X = Q + s\boldsymbol{w}$, kde $Q = [3, 7, -7]$, $\boldsymbol{w} = (8, 20, -16)$ a $s \in \mathbb{R}$.

Jsou-li přímky p a q rovnoběžné nebo mimoběžné, stanovte jejich vzdálenost, jestliže se protínají, určete jejich průsečík.

Řešení: Nejprve nalezneme vektorovou rovnici přímky p. Přímka p leží v obou rovinách, je tedy kolmá k jejich normálovým vektorům $\boldsymbol{n}_{\sigma_1} = (1, 2, 3)$ a $\boldsymbol{n}_{\sigma_2} = (3, -2, -1)$. Směrový vektor $\boldsymbol{u}_p$ přímky p tedy získáme výpočtem vektorového součinu

$$\boldsymbol{n}_{\sigma_1} \times \boldsymbol{n}_{\sigma_2} = (4, 10, -8),$$

pro jednoduchost zvolme

$$\boldsymbol{u}_p = (2, 5, -4).$$

Pro určení vektorové rovnice přímky $p : \; X = P + t\boldsymbol{u}_p$, $t \in \mathbb{R}$, nám zbývá nalézt nějaký bod $P \in \sigma_1 \cap \sigma_2$. Protože všechny složky vektoru $\boldsymbol{u}_p$ jsou nenulové, vektor $\boldsymbol{u}_p$ není rovnoběžný s žádnou ze souřadných rovin σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yz} a přímka p protíná každou z těchto rovin, tedy například i rovinu σ_{xy}. Můžeme tudíž hledat bod[6] $\widehat{P} \in p$ takový, aby $\widehat{P} \in \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_{xy}$, čímž je určena třetí souřadnice bodu $\widehat{P} = [?, ?, 0]$. Zbývající souřadnice určíme z obecných rovnic rovin σ_1 a σ_2, do nichž dosadíme $z = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & -4 \\ 3 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & -4 \\ 4 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x = -2, \; x + 2y = -4 \Rightarrow x = -1/2, \; y = -7/4.$$

Tedy $\widehat{P} = [-1/2, -7/4, 0]$ a vektorová rovnice přímky p je $X = \widehat{P} + t\boldsymbol{u}_p$, $t \in \mathbb{R}$. S takovým výrazem bychom mohli počítat, ale dáváme přednost celým číslům. Vidíme, že například pro $t = -1/4$ bude $P = \widehat{P} - \dfrac{1}{4}\boldsymbol{u}_p = [-1, -3, 1] \in p$. Pak

$$p : \; X = P + t\boldsymbol{u}_p = [-1, -3, 1] + t(2, 5, -4), \; t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Poznámka: K vektorové rovnici přímky p dospějeme i řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -4 \\ 3 & -2 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -4 \\ 0 & -8 & -10 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -4 \\ 0 & 4 & 5 & | & -7 \end{pmatrix}.$$

Zvolme $z = r$, pak $y = -(7 + 5r)/4$ a

$$x = -4 - 2y - 3z = -4 + (7 + 5r)/2 - 3r = -1/2 - r/2.$$

[5] Srovnejte se zadáním příkladu 2.

[6] Proč místo $P \in p$ zavádíme bod $\widehat{P} \in p$ bude zřejmé za chvíli.

Odtud $(x, y, z) = (-1/2, -7/4, 0) + r(-1/2, -5/4, 1)$, kde $r \in \mathbb{R}$. Volbou $r = -4t + 1$ získáme stejný výsledek (4).

a) Vektory $\boldsymbol{w} = (2, -1, 2)$ a $\boldsymbol{u}_p = (2, 5, -4)$ nejsou jeden násobkem druhého (nejsou kolineární), přímky p a q tedy nejsou rovnoběžné ani totožné. Vyšetřeme, zda se protínají, tj. zda mají společný bod. Hledáme tedy průsečík řešením rovnice $P + t\boldsymbol{u}_p = Q + s\boldsymbol{w}$, číselně $[-1, -3, 1] + t(2, 5, -4) = [1, 1, 1] + s(2, -1, 2)$. Jinak řečeno, hledáme koeficienty t a s lineární kombinace, aby platilo $t\boldsymbol{u}_p + s(-\boldsymbol{w}) = Q - P = [2, 4, 0]$. V maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zkoumejme, zda soustava má řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right). \tag{5}$$

Je patrné, že hodnost matice soustavy je menší než hodnost rozšířené matice soustavy. Soustava tedy nemá řešení a $p \cap q = \emptyset$, přímky se neprotínají, jsou mimoběžné.

Vzdálenost $d(p, q)$ dvou mimoběžek*

$$d(p, q) = \frac{|(P - Q) \cdot (\boldsymbol{u}_p \times \boldsymbol{w})|}{\|\boldsymbol{u}_p \times \boldsymbol{w}\|} = \cdots \textit{ dosazení a výpočet} \cdots = 2.$$

Poznámka: Posouzení, zda jsou přímky mimoběžné, můžeme provést i jiným postupem. Definujme vektor $\boldsymbol{v}_{QP} = Q - P$. Pokud jsou přímky různoběžné, leží v jedné rovině a vektory $\boldsymbol{u}_p$, $\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{v}_{QP}$ jsou lineárně závislé, což lze zjistit například výpočtem hodnosti matice sestavené z těchto vektorů nebo výpočtem determinantu této matice (lineárně závislé – hodnost menší než tři, determinant roven nule). Hodnost matice se sloupci $\boldsymbol{u}_p$, $\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{v}_{QP}$ jsme vlastně odvodili při řešení soustavy rovnic (5), je rovna třem, vektory jsou lineárně nezávislé.[7]

b) Vektory $\boldsymbol{w} = (-6, -15, 12)$ a $\boldsymbol{u}_p = (2, 5, -4)$ jsou jeden násobkem druhého ($\boldsymbol{w} = -3\boldsymbol{u}_p$), jsou kolineární. Přímky p a q tedy jsou rovnoběžné nebo totožné. Avšak vektor $\boldsymbol{v}_{QP} = Q - P = (2, 4, 0)$ není násobkem vektoru $\boldsymbol{u}_p = (2, 5, -4)$, bod Q tedy neleží na přímce p, přímky nesplývají, jsou rovnoběžné. Jejich vzdálenost je rovna například vzdálenosti* $d(Q, p)$ bodu Q od přímky p

$$d(Q, p) = \frac{\|(Q - P) \times \boldsymbol{u}_p\|}{\|\boldsymbol{u}_p\|} = \cdots \textit{ dosazení a výpočet} \cdots = \frac{18}{3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

c) Vektory $\boldsymbol{w} = (-9, -22, 16)$ a $\boldsymbol{u}_p = (2, 5, -4)$ nejsou jeden násobkem druhého (nejsou kolineární), přímky p s q tedy jsou různoběžné nebo mimoběžné. Vyšetřeme, zda se protínají, tj. zda mají společný bod. Hledáme tedy průsečík řešením rovnice $P + t\boldsymbol{u}_p = Q + s\boldsymbol{w}$, číselně $[-1, -3, 1] + t(2, 5, -4) = [1, 1, 1] + s(-9, -22, 16)$. Jinak řečeno, hledáme

[7] Připomeňme, že hodnost matice i matice k ní transponované je shodná. Není tedy na závadu, že posuzované vektory netvoří řádky matice.

koeficienty t a s lineární kombinace, aby platilo $t\boldsymbol{u}_p + s(-\boldsymbol{w}) = Q - P = [2,4,0]$. V maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 22 \\ -4 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zkoumejme, zda soustava má řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & | & 2 \\ 5 & 22 & | & 4 \\ -4 & -16 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 9 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 9 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 9 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice soustavy i rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost dvě. Soustava tedy má řešení, konkrétně $s = 2$ a $t = -8$. Tomu odpovídá průsečík $S = p \cap q = [-1,-3,1] - 8(2,5,-4) = [-17,-43,33]$. Stejný výsledek obdržíme z $[1,1,1] + 2(-9,-22,16) = [-17,-43,33]$.

Poznámka: Opět lze uplatnit postupy z poznámky k úloze a). Matice $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 5 & 22 & 4 \\ -4 & -16 & 0 \end{pmatrix}$ má hodnost dvě, její determinant se rovná nule $(-144 - 160 + 176 + 128 = 0)$, vektory jsou lineárně závislé, přímky leží v jedné rovině.

d) Vektory $\boldsymbol{w} = (8,20,-16)$ a $\boldsymbol{u}_p = (2,5,-4)$ jsou jeden násobkem druhého ($\boldsymbol{w} = 4\boldsymbol{u}_p$), jsou kolineární. Přímky p a q tedy jsou rovnoběžné nebo totožné. Vektor $\boldsymbol{v}_{QP} = Q - P = [3,7,-7] - [-1,-3,1] = (4,10,-8)$ je dvojnásobkem vektoru $\boldsymbol{u}_p$, bod Q tudíž leží na přímce p, přímky jsou totožné.