

Předmět: MA01

Základy analytické geometrie

- ▶ vektory, skalární a vektorový součin
- ▶ přímky v rovině $\mathbb{R}^2$ a v prostoru $\mathbb{R}^3$
- ▶ roviny v prostoru $\mathbb{R}^3$
- ▶ odchylky přímek
- ▶ vzdálenosti

Literatura:

M. Kočandrlová: GEO-MATEMATIKA II.1

(F. Bubeník, O. Zindulka: Matematika 1 (kapitola 2))

Skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ nazveme číslo $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \vec{v}^T = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Kolmé vektory.

Délkou vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ nazveme číslo

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Vzdáleností bodů A a B nazveme délku vektoru $B - A$ (nebo, což je stejné číslo, vektoru $A - B$).

Úhel, který svírají dva nenulové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, je definován jako úhel φ , pro nějž platí

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Přímky v rovině

Dán bod Q a vektor $\vec{u}$.

Parametrická rovnice přímky: $X = Q + s\vec{u}$, $s \in \mathbb{R}$

Obecná rovnice přímky: $ax + by + d = 0$

Odchylka přímek se směrovými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$: $\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Vlastnosti:

1. $\vec{u} = r\vec{v}$, $r \in \mathbb{R}$, pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
4. $(s\vec{u}) \times \vec{v} = s(\vec{u} \times \vec{v})$
5. vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý jak k vektoru $\vec{u}$, tak k vektoru $\vec{v}$;
pravidlo pravé ruky
6. $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \varphi$, kde φ je úhel vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$
($\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ je obsah rovnoběžníka určeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$).

Objem rovnoběžnostěnu daného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

Smíšený součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Roviny v prostoru

Rovina ϱ určena třemi body nebo bodem a dvěma vektory

$$\varrho = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : \exists s, t \in \mathbb{R} \quad X = P + s\vec{u} + t\vec{v} \right\}$$

Parametrická (vektorová) rovnice roviny ($P, \vec{u}, \vec{v}$ je dáno):

$$X = P + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Obecná rovnice roviny ϱ

$$ax + by + cz + d = 0$$

určuje souřadnice všech bodů $X = (x, y, z) \in \varrho$.

Normálový vektor, tj. kolmý k rovině ϱ : $\vec{n} = (a, b, c)$.

Odchylka $\varphi \in [0, \pi/2]$ dvou rovin s normálovými vektory $\vec{n}_1, \vec{n}_2$:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$$

Přímky v prostoru

Bod $P = [x_0, y_0, z_0]$, směrový vektor $\vec{u} = (a, b, c)$

Zadání přímky v $\mathbb{R}^3$:

1. Vektorová rovnice přímky p : $X = P + s\vec{u}$, $s \in \mathbb{R}$
2. Kanonické (osové) rovnice pro $X = (x, y, z) \in p$:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
3. Přímka p daná průnikem dvou rovin popsanych např. obecnými rovnicemi.

Odchylka $\varphi \in [0, \pi/2]$ dvou přímek se směrovými vektory

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2: \cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|}$$

Odchylka $\varphi \in [0, \pi/2]$ přímky se směrovým vektorem $\vec{u}$ od

roviny s normálovým vektorem $\vec{n}$: $\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|}$

Definice: Řekneme, že dvě různé přímky jsou

1. **rovnoběžné**, pokud mají rovnoběžné směrové vektory
2. **různoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a mají společný bod
3. **mimoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a nemají společný bod

Vzdálenost bodů $A, B \in \mathbb{R}^3$: $d(A, B) = \|B - A\|$

Vzdálenost bodu P od přímky p : $d(P, p) = \frac{\|(P - A) \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p a A je libovolný bod přímky p .

Vzdálenost bodu $P = [x_0, y_0, z_0]$ od roviny ϱ dané obecnou rovnicí $ax + by + cz + d = 0$:

$$d(P, \varrho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vzdálenost dvou přímek p_1, p_2

1. rovnoběžných: viz vzdálenost bodu a přímky
2. různoběžných: vzdálenost nulová
3. mimoběžných:

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(P_1 - P_2) \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|},$$

kde P_i je libovolný bod přímky p_i a $\vec{u}_i$ je směrový vektor přímky p_i , přičemž $i = 1, 2$.