

Poznámky k výsledkům zkoušek z MM2G ve zkouškovém období LS 2024/2025

Zkouška 28. 5. 2025

Účast 16: 4 A, 2 B, 1 C, 1 D, 1 E, 7 F (44 %)

[Doba opravování cca 7 člověkohodin.]

Obecný komentář: Předloni i o rok dříve byla neúspěšnost první zkoušky 56 %, loni 40 %, letos první zkouška dopadla velmi podobně, a to i skladbou známek.

K řešení příkladů:

Příklad 1: První příklad už napohled budil obavy z rozsáhlého integrování. Tomu se však dalo vyhnout trochou uvažování.

První dvě ortogonální funkce na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$, tj. $\boxed{\hat{u}_0 = 1}$ a $\boxed{\hat{u}_1 = x}$, byly vlastně zadány, s nimi nikdo problém neměl. Potíže se objevily při ortogonalizaci funkce $u_2 = \sin x$.

Hledáme¹ $\hat{u}_2 = u_2 - c_{2,0}\hat{u}_0 - c_{2,1}\hat{u}_1$, aby platilo

$$\begin{aligned} 0 = (\hat{u}_2, \hat{u}_0) &= (u_2, \hat{u}_0) - c_{2,0}(\hat{u}_0, \hat{u}_0) - c_{2,1} \underbrace{(\hat{u}_1, \hat{u}_0)}_{\text{ortogonální, rovno 0}} \stackrel{c_{2,1} \cdot 0}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x - c_{2,0}) dx \\ &\stackrel{\text{sin je lichá}}{=} 0 - c_{2,0}\pi, \text{ pak } c_{2,0} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Jelikož má být

$$\begin{aligned} 0 &= (\hat{u}_2, \hat{u}_1) = (u_2, \hat{u}_1) - c_{2,0} \underbrace{(\hat{u}_0, \hat{u}_1)}_{=0} - c_{2,1}(\hat{u}_1, \hat{u}_1) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x dx - c_{2,1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx \\ &\stackrel{\text{sudá, dolní mez 0}}{=} 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx - 2c_{2,1} \int_0^{\pi/2} x^2 dx \\ &\stackrel{\text{per part.}}{=} 2 \left([-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right) - 2c_{2,1} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\pi/2} \\ &= 2 \left(0 + [\sin x]_0^{\pi/2} \right) - 2c_{2,1} \frac{\pi^3}{24} = 2 - 2c_{2,1} \frac{\pi^3}{24}, \end{aligned} \quad (2)$$

jest $c_{2,1} = \frac{24}{\pi^3}$ a $\boxed{\hat{u}_2 = \sin x - \frac{24}{\pi^3}x}$. Jako vedlejší produkt jsme zjistili, že $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x dx = 2$.

Nyní se věnujme funkci $u_3 = \cos x$. Hledáme $\hat{u}_3 = u_3 - c_{3,0}\hat{u}_0 - c_{3,1}\hat{u}_1 - c_{3,2}\hat{u}_2$ a využíváme

¹Připomínám, že je jedno, zda použijete vyjádření $\hat{u}_2 = u_2 + c_{2,0}\hat{u}_0 + c_{2,1}\hat{u}_1$. nakonec dostanete stejnou funkci $\hat{u}_2$ jako při $\hat{u}_2 = u_2 - c_{2,0}\hat{u}_0 - c_{2,1}\hat{u}_1$.

ortogonalitu funkcí. Vztahy

$$\begin{aligned}
0 &= (\hat{u}_3, \hat{u}_0) = (u_3, \hat{u}_0) - c_{3,0}(\hat{u}_0, \hat{u}_0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx - c_{3,0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dx \\
&= 2[\sin x]_0^{\pi/2} - c_{3,0}\pi = 2 - c_{3,0}\pi \Rightarrow c_{3,0} = \frac{2}{\pi}, \\
0 &= (\hat{u}_3, \hat{u}_1) = (u_3, \hat{u}_1) - c_{3,1}(\hat{u}_1, \hat{u}_1) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(x \cos x - c_{3,1}x^2)}_{\text{lichá}} \, dx \\
&= 0 - c_{3,1} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \, dx}_{\text{není nutné vyčíslit, stačí, že } \neq 0} \Rightarrow c_{3,1} = 0, \\
0 &= (\hat{u}_3, \hat{u}_2) = (u_3, \hat{u}_2) - c_{3,2}(\hat{u}_2, \hat{u}_2) \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos x \left(\sin x - \frac{24}{\pi^3}x \right)}_{\text{sudá} \cdot \text{lichá} = \text{lichá, integrál nula}} \, dx - c_{3,2} \underbrace{(\hat{u}_2, \hat{u}_2)}_{\text{z principu } > 0} \Rightarrow c_{3,2} = 0
\end{aligned}$$

vedou k $\boxed{\hat{u}_3 = \cos x - \frac{2}{\pi}}$. Takže té integrace vlastně mnoho nebylo.

Máme ortogonální systém funkcí a můžeme přejít k MNČ, tj. k aproximování funkce y funkcí $y_{\text{apr}}(x) = \sum_{i=0}^3 a_i \hat{u}_i(x)$. K tomu vede cesta přes soustavu lineárních algebraických rovnic

$$(\hat{u}_i, \hat{u}_1)a_1 + (\hat{u}_i, \hat{u}_2)a_2 + (\hat{u}_i, \hat{u}_3)a_3 + (\hat{u}_i, \hat{u}_4)a_4 = (y, \hat{u}_i), \text{ kde } i = 0, 1, 2, 3.$$

V zadání bylo doporučeno věnovat se nejprve pravé straně

$$\begin{aligned}
(y, \hat{u}_0) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{2}, \\
(y, \hat{u}_1) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x \, dx = 0 \text{ (lichá funkce)}, \\
(y, \hat{u}_2) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(x - \frac{24}{\pi^3} \sin x \right) dx \stackrel{\text{lichá}}{=} 0, \\
(y, \hat{u}_3) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\cos x - \frac{2}{\pi} \right) dx = 2[\sin x]_0^{\pi/4} - 1 = \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

Soustava se díky ortogonalitě redukuje na $(\hat{u}_i, \hat{u}_i)a_i = (y, \hat{u}_i)$, tj. v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} (\hat{u}_0, \hat{u}_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\hat{u}_1, \hat{u}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\hat{u}_2, \hat{u}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\hat{u}_3, \hat{u}_3) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}},$$

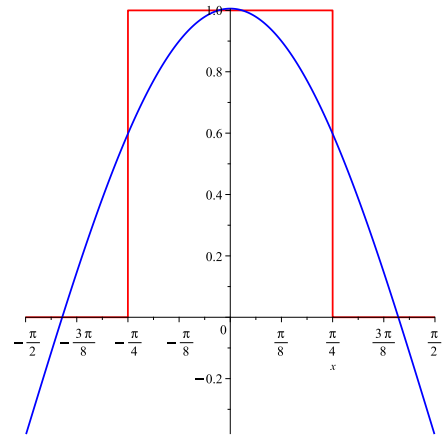
z něhož okamžitě vidíme, že $a_1 = 0$ a $a_2 = 0$, protože platí $(\hat{u}_2, \hat{u}_2) \neq 0$ a $(\hat{u}_3, \hat{u}_3) \neq 0$.

Zbývá tedy vypočítat

$$\begin{aligned}(\hat{u}_0, \hat{u}_0) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dx = \pi \text{ (konstanta } 1 \times \text{ délka integračního intervalu; bylo i v (1))}, \\(\hat{u}_3, \hat{u}_3) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos x - \frac{2}{\pi} \right)^2 dx = 2 \int_0^{\pi/2} \left(\underbrace{\cos^2 x}_{\text{použít } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)} - \frac{4}{\pi} \cos x + \frac{4}{\pi^2} \right) dx \\&= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \cos 2x - \frac{8}{\pi} \cos x \right) dx + \frac{4}{\pi} = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{8}{\pi} \sin x \right]_0^{\pi/2} + \frac{4}{\pi} \\&= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{4}{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi}.\end{aligned}$$

Odtud řešení $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi(\sqrt{2}-1)}{\pi^2-8} \end{pmatrix}$ a funkce

$$y_{\text{apr}}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2\pi(\sqrt{2}-1)}{\pi^2-8} \left(\cos x - \frac{2}{\pi} \right).$$



Výpočet normy rozdílu $y - y_{\text{apr}}$ (pozor, máme ortogonální systém, nikoli ortonormální, pracujeme s vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$, viz oficiální tahák)

$$\begin{aligned}\|y - y_{\text{apr}}\|_{L^2(-\pi/2, \pi/2)} &= \sqrt{(y, y) - \vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi(\sqrt{2}-1)^2}{\pi^2-8}} \\&= \sqrt{\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi(\sqrt{2}-1)^2}{\pi^2-8}} \approx 0,45694.\end{aligned}$$

Časté chyby v písemkách:

a) Chyby při integraci a sestavování ortogonálních funkcí. Ty se obecně obtížně odhalují, ale někdy je okamžitě vidět, že je někde chyba. Např. systém $\left\{ 1, x, \sin x, \cos x - \frac{2}{\pi} \right\}$ nemůže být ortogonální, protože $(x, \sin x) > 0$ (integrace funkce sudé a, až na konečný počet bodů, kladné). Nebo $\left\{ 1, x, \sin x - \frac{24}{\pi^3}x, \cos x + \frac{2}{\pi} \right\}$ také není ortogonální, protože $\left(1, \cos x + \frac{2}{\pi} \right) > 0$ z výše uvedeného důvodu.

b) Matice v MNC musí být diagonální (systém je ortogonální), občas jsme viděli i matice s mimodiagonálními nenulovými prvky.

c) K chybám řadím i někdy velmi nepřehledné zápisy integrace, v nichž se ztrácejí i sami autoři, takže snadno dojde k chybě.

Příklad 2: Vrstevnice a spádnice funkce $f(x, y) = xy^2$ nedopadly špatně, úkoly byly většinou snadné. Vrstevnice svým tvarem v jednotlivých kvadrantech připomínají hyperboly, souřadné osy odpovídají vrstevnicím o nulové kótě.

Několikrát se objevila chyba v řešení diferenciální rovnice metodou separace proměnných, kdy na pravé straně zůstal součin $2xy$, jenž pak byl integrován dle x s tím, že na y se pohlíželo jako na konstantu.

Správný postup spočívá v takové úpravě rovnice, že na (např.) levé straně je výraz jen s proměnnou y a s derivací y' , kdežto na pravé straně jen s proměnnou x , je možné také krátit (v zadané úloze se krátilo y^2 a y), případné konstanty lze mít na libovolné straně.

Diferenciální rovnice průmětů spádnic v rovině xy

$$\begin{aligned}y^2 y' &= 2xy, \\yy'(x) &= 2x, \\ \int y \, dy &= \int 2x \, dx, \\ y^2 &= 2x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pro $C = 0$ dostáváme přímky $y = \sqrt{2}x$ a $y = -\sqrt{2}x$.

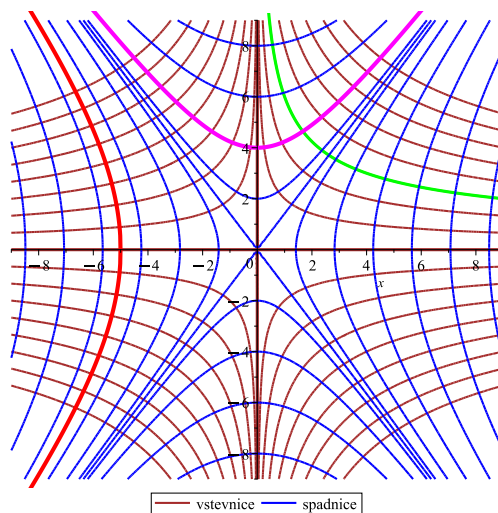
Pro $C \neq 0$ z úpravy $\frac{y^2}{2C} - \frac{x^2}{C} = 1$ plyne, že průměty spádnic obecně jsou nerovnoosé hyperboly. Pro $C > 0$ v postavení B z taháku, pro $C < 0$ v postavení A z taháku.

Nejvíce chyb nastalo při hledání explicitního tvaru průmětu spádnice, který prochází např. bodem $[-5, 0]$. Řešitelé a řešitelky se bez hlubší konzultace se svými (občas i dosti výstižnými) náčrtky spokojili s tím, že bodem $[-5, 0]$ prochází křivka daná výrazem $y = \sqrt{2x^2 - 50}$, což je však jen polovina onoho průmětu spádnice. Správný výraz je $x = -\sqrt{\frac{y^2}{2} + 25}$, s definičním oborem $\mathbb{R}$ (obor proměnné y).

V některých případech souřadnice zadaných bodů ani nevyhovovaly navrženým vztahům (neležely na navržené křivce). Též se ukázalo, že ne všichni vědí, že explicitní tvar je takový, že závislá proměnná y je definována výrazem, který obsahuje pouze funkce nezávislé proměnné x a případně konstanty. V implicitním tvaru $f(x, y) = 0$ proměnné takto rozlišeny nejsou.

Výpočet ortogonální soustavy tří vektorů na ploše byl triviální, přesto se občas stalo, že řešitelé hodnotu souřadnice x zadaného bodu dosadili do proměnné y .

Příklad 3: Rovinný útvar vymezený křivkou $g(x) = x\sqrt{\ln x}$ nad intervalem $[1, 3]$ rotuje kolem osy x . Výpočet objemu V rotačního tělesa podle vztahu $V = \int_1^3 \underbrace{\pi x^2 \ln x}_{f(x)} dx$ se



celkem dařil. Hůře dopadl numerický výpočet přibližného objemu V_{apr} , kdy někteří místo funkce $\pi x^2 \ln x$ integrovali funkci $x\sqrt{\ln x}$ nebo nějak špatně interpretovali integrační formuli lichoběžníkové metody. Správný výpočet byl založen na vyčíslení výrazu

$$V_{\text{apr}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{9 \ln \left(\frac{3}{2} \right)}{4} + 4 \ln(2) + \frac{25 \ln \left(\frac{5}{2} \right)}{4} + \frac{9 \ln(3)}{2} \right) = 22,5495.$$

Ještě menšími úspěchy bylo provázeno řešení úkolů s odhady, ačkoli tam stačilo vyjít ze vztahu z oficiálního taháku

$$|R_h| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \frac{2}{12} h^2 \max_{x \in [1,3]} |2 \ln x + 3| = \frac{1}{6} h^2 (3 + 2 \ln 3), \quad (3)$$

kde bylo využito toho, že $\ln x$ je na intervalu $(1, 3]$ rostoucí kladná funkce, tudíž maxima se nabývá v $x = 3$. Nyní stačí dosadit $h = 10^{-2}$

$$|R_h| \leq \pi \frac{1}{6} 10^{-4} (3 + 2 \ln 3) = 2,72 \cdot 10^{-4},$$

abychom viděli, že krok $h = 10^{-2}$ nezaručuje, že chyba bude nejvýše rovna 10^{-4} .

Z nerovnosti (3) odvodíme i informaci, jak volit h , aby absolutní hodnota chyby byla zaručeně menší než tolerance $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \pi \frac{1}{6} h^2 (3 + 2 \ln 3) &\leq \varepsilon, \\ h^2 &\leq \frac{6}{\pi (3 + 2 \ln 3)} \varepsilon, \\ h &\leq \sqrt{\frac{6}{\pi (3 + 2 \ln 3)} \varepsilon}, \\ h &\leq 0,6062 \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Zkouška 4. 6. 2025

Účast 8: 0 A, 0 B, 0 C, 2 D, 0 E, 6 F (75 %)

[Doba opravování cca 3 člověkohodiny.]

Obecný komentář: Bída, bída. Co říci o písemkách, které získaly celkově 3, 4, 5 či 7 bodů z 50? Když si uvědomím, kolik času a úsilí jsme s kolegou Milanem věnovali různým formám doučování (repetitorium, konzultace, „nalejvárna“, dodatečné cvičení), tak se nedivte, že propadáme pocitům marnosti.

K řešení příkladů:

Příklad 1: Ortogonalizace a MNČ. Zcela standardní, nemá smysl se tady podrobně rozepisovat o postupu řešení. Problém byl v tom, že řešitelé neuměli správně vypočítat $\int_{-1}^2 \sin(\pi x) dx$ a $\int_{-1}^2 x \sin(\pi x) dx$, případně si neuvědomili, že jestliže je funkce y zadána jedním předpisem na intervalu $[-1, 0]$ a jiným předpisem na intervalu $(0, 2]$, je nutné určitý integrál na intervalu $[-1, 2]$ rozepsat jako součet určitého integrálu na intervalu $[-1, 0]$ a určitého integrálu na intervalu $(0, 2]$.

Bylo by velmi užitečné, kdybyste si příště zkontrolovali, že funkce tvořící vypočítaný ortogonální systém opravdu jsou ortogonální. Čas na to je. Možnost kontroly mezivýsledků je jeden z důvodů, proč se u zkoušky nehledí přísně na čas.

Příklad 2: Vrstevnice a spádnic funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x}$. Opět (s výjimkou jednoho řešitele) bídné výsledky. Potíže začaly už u vrstevnic.

Funkce arctg má obor hodnot $\mathcal{H}_f = (-\pi/2, \pi/2)$, z něho tedy vybíráme kóty určující vrstevnice: $\tilde{C} \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\operatorname{arctg} \frac{y^2}{x} = \tilde{C}, \text{ při } \operatorname{arctg} C = \tilde{C} \Rightarrow \frac{y^2}{x} = C \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2 = Cx,$$

jsou to paraboly s nezávislou proměnnou y a závislou proměnnou x (tj. funkce proměnné y) bez bodu $[0, 0]$ s osou splývající s osou x , pro $\tilde{C} = 0$ je $C = 0$, což dává osu x bez počátku.

Diferenciální rovnice průmětů spádníc v rovině xy

$$-\frac{y^2}{x^2 \left(\frac{y^4}{x^2} + 1 \right)} y'(x) = \frac{2y}{x \left(\frac{y^4}{x^2} + 1 \right)} \Rightarrow -yy'(x) = 2x.$$

Rovnici vyřešíme separací² proměnných, $C \in \mathbb{R}$ je obecná konstanta,

$$\begin{aligned} y \, dy &= -2x \, dx, \\ \int y \, dy &= -2 \int x \, dx, \\ y^2 &= -2x^2 + C, \quad C > 0, \\ 2x^2 + y^2 &= C, \\ \frac{x^2}{\widehat{C}} + \frac{y^2}{2\widehat{C}} &= 1, \quad 0 < \widehat{C} = C/2. \end{aligned}$$

Průměty spádníc jsou elipsy.

Jestliže bod $A = [2, ?]$ leží v prvním kvadrantu roviny xy na vrstevnici s kótou $\operatorname{arctg} 2$, pak $y^2/x = 2$ a $A = [2, 2]$. Tečnu vrstevnice a tečnu průmětu spádnice, obě v A , zjistíme nejsnáze z gradientu funkce f . Vektor $\nabla f(A) = (-1/5, 2/5)$ je kolmý na vrstevnici, je proto směrovým vektorem tečny průmětu spádnice v A . Odtud směrnice této tečny $k_{\text{sp}} = \frac{2}{-1/5} = -2$, tečna $y(x) = 2 - 2(x - 2)$, tj. $y(x) = -2x + 6$.

Směrový vektor $(2, 1)$ tečny vrstevnice je kolmý na $\nabla f(A)$, směrnice $k_{\text{vrst}} = \frac{1}{2}$, tečna $y(x) = 2 + (x - 2)/2 = \frac{1}{2}x + 1$.

Příklad 3: Ostré lokální maximum funkce $f(x, y) = \left(\frac{x^2}{2} + y^2 - 2x - 2y + 2 \right)^2$ v bodě $[2, 1]$ se dařilo nalézt, protože na to stačil zcela mechanický postup. Horší to bylo s dalšími

²Mnozí opět zapomněli na to, že na jedné straně rovnice musí být výraz obsahující jen y , konstanty a dy , na druhé straně výraz obsahující jen x , konstanty a dx . Proto se metoda jmenuje *separace* proměnných.

stacionárními body. Otázka v zadání (Jaké geometrické útvary jsou vytvořeny stacionárními body?) napovídala, že stacionárních bodů je více a tvoří nějaký geometrický útvar. Jedna z podmínek nulovosti gradientu zadané funkce byla $\frac{x^2}{2} + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$. Touto rovností je v rovině xy implicitně zadána nějaká vrstevnice (křivka) o kótě nula. Jaká, to odhalí standardní úprava

$$0 = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2x - 2y + 2 = \frac{x^2}{2} - 2x + (y - 1)^2 + 1 = \frac{(x - 2)^2}{2} + (y - 1)^2 - 1,$$

jde tedy o elipsu se středem v bodě A a s osami rovnoběžnými s osami x , y . Zároveň je vidět, že jestliže bod $[x, y]$ leží na této elipse, platí $f(x, y) = 0$, a jestliže bod $[x, y]$ na této elipse neleží, je $f(x, y) > 0$. Každý bod této elipsy je bodem *neostrého* lokálního minima funkce f s hodnotou 0.

Důsledkem toho, že stacionární body tvoří souvislou množinu (křivku), je i to, že v bodech elipsy je determinant³ $D_2(x, y) = 0$, tudíž věta o ostrých lokálních extrémech nám nepomůže a $D_2(x, y)$ ani není zapotřebí vypočítat. Vzhledem k vlastnostem funkce f jsou neostrá lokální minima snadno odhalena úvahou uvedenou v předchozím odstavci.

Příklad 4: Ačkoli šlo o standardní problém s podrobným postupem popsáním v oficiálním taháku, řešení počáteční úlohy s diferenciální rovnicí $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ dopadlo velmi špatně. Nebudu opisovat tahák, jen připomenu, že metoda redukce řádu předpokládá, že u y'' stojí koeficient jedna. Výchozí rovnici je tedy nutné upravit do tvaru vhodného pro aplikaci redukce řádu.

Zkouška 11. 6. 2025

Účast 16: 1 A, 1 B, 1 C, 3 D, 3 E, 7 F (44 %)

[Doba opravování cca 8 člověkohodin.]

Obecný komentář: Relativně dobré výsledky zkoušky, zejména při srovnání s minulým týdnem. A mohly být ještě lepší, jen kdyby si posluchači a posluchačky odnesli poučení z těchto komentářů. Třetí příklad byl obdobou třetího příkladu z písemky 28. května a měl být zdrojem snadno získaných bodů, řada řešitelů a řešitelek se však dopustila zásadní chyby, viz níže.

K řešení příkladů:

Příklad 1: Ortogonalizace byla snadná, šlo jen o jednu ortogonalizovanou funkci. Tento krok nezpůsobil potíže. Horší, ale nikoli tragické, to bylo s MNČ. Jako obvykle u tohoto typu příkladů se vyskytly chyby při integraci a při řešení odpovídajícího systému lineárních algebraických rovnic. Nezřídka i kvůli tomu, že řešitelé postupovali zbytečně těžkopádně a složitě. Aproximaci bylo možné hledat jako lineární kombinaci funkcí ortogonálního systému $\{x, x^2 - 3x/2\}$ nebo výchozí dvojice $\{x, x^2\}$. Řešitelé šli oběma cestami, použití dvojice $u_1 = x$ a $u_2 = x^2$ snad bylo o trochu častější. Ukažme tedy postup touto cestou.

K $y(x) = \frac{x}{x+1}$ hledáme $y_{\text{apr}} = a_1u_1 + a_2u_2$. Pro soustavu lineárních algebraických rovnic

³Determinant $D_2(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$ lze pro tuto úlohu odvodit a není to ani těžké. Ukáže se, že v bodech elipsy opravdu má hodnotu nula.

$(u_i, u_1)a_1 + (u_i, u_2)a_2 = (y, u_i)$, kde $i = 1, 2$, počítáme skalární součiny:

$$\begin{aligned}(u_1, u_1) &= \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}, & (u_1, u_2) &= \int_0^2 x^3 dx = 4, & (u_2, u_2) &= \int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5}, \\(y, u_1) &= \int_0^2 \frac{x^2 - 1 + 1}{x + 1} dx = \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x + 1} \right) dx \\&= -2 + \left[\frac{x^2}{2} + \ln(x + 1) \right]_0^2 = \ln 3, \\(y, u_2) &= \int_0^2 \frac{x^3}{x + 1} dx = \int_0^2 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x + 1} \right) dx = 2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \ln(x + 1) \right]_0^2 \\&= 2 + \frac{8}{3} - 2 - \ln 3 = \frac{8}{3} - \ln 3.\end{aligned}$$

Rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{8}{3} & 4 & \ln 3 \\ 4 & \frac{32}{5} & \frac{8}{3} - \ln 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{8}{3} & 4 & \ln 3 \\ 0 & \frac{32}{5} - 6 & \frac{8}{3} - \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{8}{3} & 4 & \ln 3 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{8}{3} - \frac{5}{2} \ln 3 \end{array} \right).$$

$$\text{Zpětný chod dává } a_2 = \frac{5}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{2} \ln 3 \right) = \frac{20}{3} - \frac{25}{4} \ln 3,$$

$$a_1 = \frac{3}{8} (\ln 3 - 4a_2) = \frac{3}{8} \left(\ln 3 - \frac{80}{3} + 25 \ln 3 \right) = \frac{39}{4} \ln 3 - 10$$

$$\begin{aligned}\text{a } y_{\text{apr}} &= \left(\frac{20}{3} - \frac{25}{4} \ln 3 \right) x^2 + \left(\frac{39}{4} \ln 3 - 10 \right) x \\&= -0,1996601400x^2 + 0,7114698166x.\end{aligned}$$

Výraz pro výpočet normy chyby si snad všichni našli v oficiálním taháku

$\|y - y_{\text{apr}}\|_{L^2(0,2)} = \sqrt{(y, y) - a_1(y, u_1) - a_2(y, u_2)}$, jeho vyčíslení bylo ovlivněno chybnými hodnotami a_1 , a_2 , (y, u_1) , (y, u_2) a také (y, y) , kde

$$\begin{aligned}(y, y) &= \int_0^2 \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x - 1}{(x + 1)^2} dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{2x + 2 - 2}{(x + 1)^2} - \frac{1}{(x + 1)^2} \right) dx \\&= 2 - 2 \int_0^2 \frac{1}{x + 1} dx + 2 \int_0^2 \frac{1}{(x + 1)^2} dx - \int_0^2 \frac{1}{(x + 1)^2} dx \\&= 2 - 2[\ln(x + 1)]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{(x + 1)^2} dx \\&= 2 - 2 \ln 3 - \left[\frac{1}{x + 1} \right]_0^2 = 2 - 2 \ln 3 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{8}{3} - 2 \ln 3 \approx 0,469442089.\end{aligned}$$

Příklad 2: Úloha s vrstevnicemi a spádnici patřila k těm lehčím, přesto v jejím řešení posluchači dosáhli jen rozpačitých úspěchů, které nezřídka přinesl poslední dílčí úkol — Taylorův polynom.

Definiční obor funkce $f(x, y) = \arctg(x^2 + 3y^2)$ je zřejmě $\mathbb{R}^2$, obor hodnot $[0, \pi/2)$.

Vrstevnice pro $\tilde{C} \in [0, \pi/2)$

$$\operatorname{arctg}(x^2 + 3y^2) = \tilde{C} \Rightarrow x^2 + 3y^2 = C \geq 0, \text{ kde } \operatorname{arctg}(C) = \tilde{C},$$

jsou elipsy, je-li $C > 0$, případně bod $[0, 0]$, je-li $C = 0$.

Chyby se častěji objevovaly u analýzy průmětů spádnic. Diferenciální rovnice průmětů spádnic v rovině xy je $f'_x(x, y)y'(x) = f'_y(x, y)$, kde

$$f'_x = \frac{2x}{(x^2 + 3y^2)^2 + 1}, \quad f'_y = \frac{6y}{(x^2 + 3y^2)^2 + 1}$$

jsou parciální derivace funkce f . Konkrétně⁴

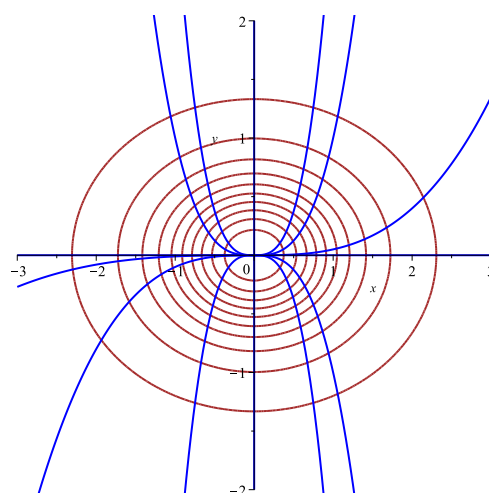
$$\frac{2xy'(x)}{(x^2 + 3y^2)^2 + 1}y'(x) = \frac{6y}{(x^2 + 3y^2)^2 + 1} \Rightarrow xy'(x) = 3y.$$

Rovnici vyřešíme separací proměnných, $C \in \mathbb{R}$ je obecná konstanta. Existuje konstantní řešení $y(x) = 0$, tj. osa x . Nenulové řešení:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} dy &= \frac{3}{x} dx, \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{3}{x} dx, \\ \ln |y| &= 3 \ln |x| + C, \quad x, y \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}, \\ \ln |y| &= \ln |x|^3 + \ln C, \quad C \in (0, \infty), \\ |y| &= C|x|^3, \quad C > 0, \\ y &= Cx^3, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Řešení na intervalu $(-\infty, 0)$ nebo $(0, +\infty)$.^a

Spádnici nejsou kuželosečky. Nakonec průmět spádnice, který nedostaneme z diferenciální rovnice, nýbrž z obrázku — osa y .



^aZ těchto řešení lze prodloužením do počátku a „slepováním“ získat průměty spádnic ve tvaru

$$y(x) = \begin{cases} C_1 x^3, & \text{pokud } x \in (-\infty, 0], \\ C_2 x^3 & \text{pokud } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty ne nutně shodné. Tyto pokročilé úvahy jsme však po studujících nepožadovali.

Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě $A = [1, 1/\sqrt{3}]$ byl v tomto příkladu často významnou záchranou a přinášel body. Objevovala se však jedna chyba — člen s koeficientem daným smíšenou derivací $f''_{xy}(A)$ se v Taylorově polynomu nejprve vyskytuje s koeficientem 2, jenž se pak krátí s hodnotou $2!$. Na vynásobení číslem 2 mnozí zapomínali a

⁴Vzhledem k tomu, že vrstevnice ekvivalentně definuje vztah $x^2 + 3y^2 = C$, lze tutéž diferenciální rovnici sestavit z parciálních derivací funkce $x^2 + 3y^2$.

jejich koeficient u tohoto členu byl jen poloviční. Správně

$$T_2(x, y) = \operatorname{arctg} 2 + \frac{2}{5}(x-1) + \frac{2\sqrt{3}}{5} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \frac{3}{25}(x-1)^2 \\ - \frac{16\sqrt{3}}{25}(x-1) \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \frac{9}{25} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2.$$

Příklad 3: Je potěšující, že si leckdo uvědomil, že vypočítat délku $\mathcal{L}$ grafu funkce $y(x) = \sqrt{x^3}$, kde $x \in [0, 1]$, znamená výpočet integrálu $\int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx$, ale u mnohých řešitelů a řešitelek pak přišlo zatmění mysli a Simpsonovou metodou vyčíslovali integrál $\int_0^1 \sqrt{x^3} dx$. Pro ty, kdo si chtějí ověřit své schopnosti:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \frac{13\sqrt{13}}{27} - \frac{8}{27} = 1,439709873372.$$

$$\mathcal{L}_{\text{Simpson}} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{17}}{48} + \frac{\sqrt{13}}{24} + \frac{\sqrt{43}}{12} + \frac{1}{2} = 1,439640842455.$$

Při horních odhadech absolutní hodnoty chyby R_h hrála rozhodující roli čtvrtá derivace funkce y , neboť $|R_h| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$, kde $f^{(4)}(x) = -\frac{98415}{32(9x+4)^{7/2}}$ je na intervalu $[0, 1]$ záporná funkce. Proto

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in [a,b]} \frac{98415}{32(9x+4)^{7/2}} = \frac{98415}{32 \cdot 4^{7/2}} = \frac{98415}{2^{12}} = 24,0270996094.$$

Požadovanou přesnost $\varepsilon > 0$ zajistíme splněním nerovností

$$|R_h| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| = \frac{1}{180} h^4 \frac{98415}{2^{12}} \leq \varepsilon.$$

Z poslední nerovnosti dostáváme

$$\frac{1}{180} h^4 \frac{98415}{2^{12}} \leq \varepsilon, \\ h^4 \leq \frac{180 \cdot 2^{12}}{98415} \varepsilon, \\ h \leq \sqrt[4]{\frac{2^{14}}{2187}} \varepsilon, \\ h \leq 2^3 \sqrt[4]{\frac{2^2}{2187}} \varepsilon, \\ h \leq 1,654408638 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Odtud například vychází, že zárukou pro dosažení chyby $\varepsilon = 10^{-5}$ je volba $0 < h \leq 0,0930342346$.

[Doba opravování cca 6 člověkohodin.]

Obscný komentář: Na poměry MM2G docela slušný výsledek.*K řešení příkladů:***Příklad 1:** Ortogonalizace se dařila více, než její následné použití v metodě nejmenších čtverců, kde se naopak v integraci objevovaly chyby.Připomeňme ortogonální systém $\left\{ \sin x, 1, x - 2 \sin x, x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right\}$ a funkci

$$y(x) = \begin{cases} -1, & \text{jestliže } x \in [-\pi, 0], \\ 1, & \text{jestliže } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Soustava lineárních algebraických rovnic

$$(\hat{u}_i, \hat{u}_1)a_1 + (\hat{u}_i, \hat{u}_2)a_2 + (\hat{u}_i, \hat{u}_3)a_3 + (\hat{u}_i, \hat{u}_4)a_4 = (y, \hat{u}_i), \text{ kde } i = 1, 2, 3, 4,$$

se díky ortogonalitě redukuje na $(\hat{u}_i, \hat{u}_i)a_i = (y, \hat{u}_i)$. Výpočet pravé strany

$$(y, \hat{u}_1) = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin(x) dx = 4,$$

$$(y, \hat{u}_2) = 0,$$

$$(y, \hat{u}_3) = \int_{-\pi}^{\pi} y(x)(x - 2 \sin x) dx = 2 \int_0^{\pi} (x - 2 \sin x) dx = \pi^2 + 4[\cos x]_0^{\pi} = \pi^2 - 8,$$

$$(y, \hat{u}_4) \stackrel{\text{lichá}}{=} 0$$

ukazuje, že $a_2 = 0 = a_4$. Stačí tedy vypočítat

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_1) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \pi$$

$$\begin{aligned} \text{a } (\hat{u}_3, \hat{u}_3) &= \int_{-\pi}^{\pi} (x - 2 \sin x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - 4x \sin x + 4 \sin^2 x) dx = \frac{2\pi^3}{3} - 8\pi + 4\pi \\ &= \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi = \frac{2}{3}\pi(\pi^2 - 6). \end{aligned}$$

$$\text{Pravá strana } \vec{c} = (4, 0, \pi^2 - 8, 0)^T \text{ pak vede k řešení } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \\ 0 \\ \frac{3(\pi^2 - 8)}{2\pi(\pi^2 - 6)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Při sestavování hledané aproximační funkce

$$\begin{aligned} y_{\text{apr}}(x) &= \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{3(\pi^2 - 8)(x - 2 \sin x)}{2\pi(\pi^2 - 6)} = \frac{2\pi^2 \sin x + 3(\pi^2 - 8)x}{2\pi(\pi^2 - 6)} \\ &= 0,8118640375 \sin x + 0,2306877536x \end{aligned}$$

někteří zapomněli, že vypočtené koeficienty a_i se vztahují k funkcím z ortogonálního systému a násobili jimi výchozí, neortogonalizované funkce.Kromě chyb zavlečených z chybného výpočtu funkce y_{apr} se při výpočtu chyby aproximace objevovaly různé zmatky, ačkoli tento úkol byl snadný

$$\|y - y_{\text{apr}}\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = (y, y) - \vec{a} \cdot \vec{c} = 2\pi - \frac{16}{\pi} - \frac{3(\pi^2 - 8)^2}{2\pi(\pi^2 - 6)} = 0,7589322895.$$

$$\|y - y_{\text{apr}}\|_{L^2(-\pi, \pi)} = 0,8711671995.$$

Příklad 2: Výpočet vrstevnic a spádnic byl lehký, jen bylo nutné mít stále na paměti, že definiční obor funkce $f(x, y) = \ln(xy)$ je $\mathcal{D}_f = ((-\infty, 0) \times (-\infty, 0)) \cup ((0, \infty) \times (0, \infty))$, takže vrstevnice i průměty spádnic byly omezeny jen na první a třetí kvadrant roviny xy .

K odvození tečné roviny grafu funkce f v bodě $G = [2, 4, f(2, 4)] = [2, 4, \ln 8]$ stačilo nahlédnout do oficiálního taháku k MM2G a vyčíslit příslušné derivace, pak $z = \ln 8 + \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{4}(y - 4) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \ln 8 - 2$.

Podobné to bylo s Taylorovým polynomem v bodě $A = [2, 4]$, tj.

$$T_2(x, y) = \ln 8 + \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{4}(y - 4) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 - \frac{1}{32}(y - 4)^2,$$

případně po úpravě

$$T_2(x, y) = \ln 8 - 2 + \frac{1}{2}x + \frac{y}{4} - \frac{1}{8}(x - 2)^2 - \frac{1}{32}(y - 4)^2.$$

Kupodivu nesprávná byla argumentace při hledání lokálních extrémů funkce f . Správné bylo si uvědomit, že gradient funkce f existuje v každém bodě definičního oboru $\mathcal{D}_f$, ale v žádném bodě $\mathcal{D}_f$ se nerovná nulovému vektoru. Funkce f nemá lokální extrémy.

Jiná situace nastala u funkce $g(x, y) = f(x, y) - x^2 - 2y^2$, pro niž

$$\nabla g(x, y) = \left(\frac{1}{x} - 2x, \frac{1}{y} - 4y \right) = (0, 0)$$

má čtyři řešení v rovině xy , ale jen dvě řešení (stacionární body) v definičním oboru $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f$.

V bodech $\left[\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right]$ funkce g nabývá ostré lokální maximum s hodnotou $\ln \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 = -(\ln(2\sqrt{2}) + 1)$.

Příklad 3: Také řešení diferenciální rovnice $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$ patřilo k úkolům, v nichž k úspěchu stačilo nahlédnout do oficiálního taháku.

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = x^\eta$, kde $\eta \in \mathbb{R}$. Dosazením do rovnice získáme

$$\eta(\eta - 1)x^\eta + 2\eta x^\eta - 12x^\eta = 0 \Rightarrow \eta(\eta - 1) + 2\eta - 12 = 0 \Rightarrow \eta^2 + \eta - 12 = 0.$$

Rovnice má dvě řešení, a to $\eta_1 = 3$ a $\eta_2 = -4$. Fundamentální systém tedy je $\{x^{-4}, x^3\}$. Obecné řešení

$$y(x) = \frac{c_1}{x^4} + c_2 x^3,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$.

Dále $y(1) = c_1 + c_2 = 1$

a $y'(1) = \left(-4c_1 \frac{1}{x^5} + 3c_2 x^2 \right) \Big|_1 = -4c_1 + 3c_2 = 17$.

Řešení soustavy: $c_1 = -2, c_2 = 3$.

Řešení počáteční úlohy $y(x) = \frac{-2}{x^4} + 3x^3$, kde $x \in (0, +\infty)$.