

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Přibližný výpočet určitého integrálu (numerická kvadratura)

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, oddíl III,
kapitola 1, zejména však tato prezentace

Numerická kvadratura, tj. přibližný výpočet $\int_a^b f(x) dx$

Obdélníková metoda (názorná, ale málo přesná)

Síť ekvidistančních (stejně vzdálených bodů):

$x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$, kde $h \stackrel{\text{def}}{=} (b - a)/n = x_i - x_{i-1}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Varianta „zleva“

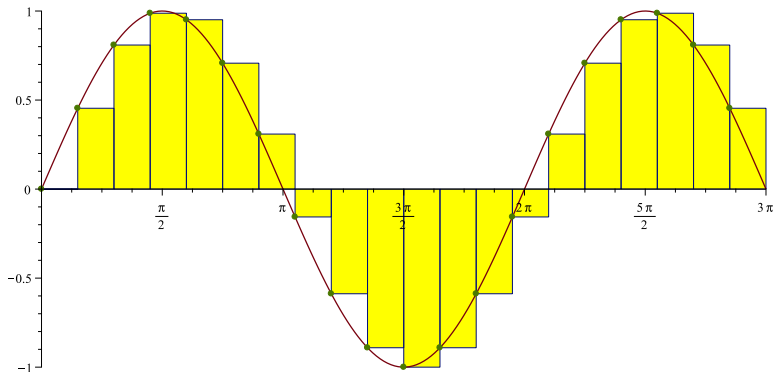
$$\int_a^b f(x) dx = h(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + R_n,$$

varianta „zprava“

$$\int_a^b f(x) dx = h(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) + R_h,$$

kde $|R_h| \leq \frac{1}{2}(b - a)h \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Varianta „zleva“



$\int_0^{3\pi} \sin x \, dx = 2$, numericky 1,962851274

$n = 20 \Rightarrow 20$ obdélníků, avšak první zleva má nulovou výšku

$|R_h| \leq 2,22$ velmi pesimistický odhad

Odvození odhadu $|R_h| \leq \frac{1}{2}(b-a)h \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Interval $[x_i, x_{i+1}]$ a $x \in (x_i, x_{i+1}]$. Věta o střední hodnotě

$f(x) - f(x_i) = (x - x_i)f'(\xi_x)$, kde $\xi_x \in [x_i, x]$ závisí na x .

Odtud integrováním obou rovností ($f(x_i)$ je konstanta)

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - (x_{i+1} - x_i)f(x_i) \right| &= \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)f'(\xi_x) dx \right| \\ &\leq \max_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} |f'(\xi)| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx = \max_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} |f'(\xi)| \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i)^2. \end{aligned}$$

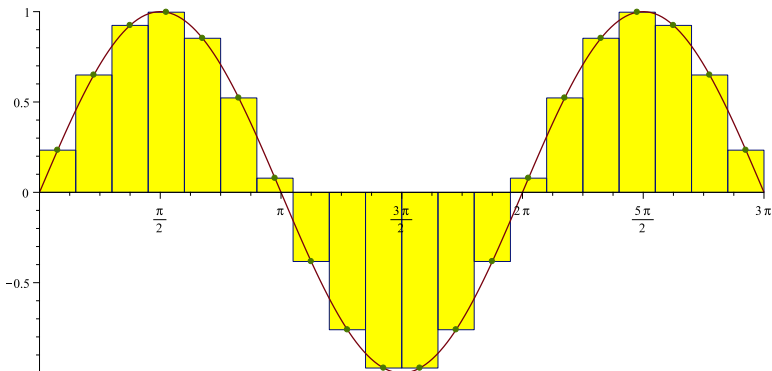
Rovnost $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 = h \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = h(b-a)$ dává

$$|R_h| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{b-a}{2} h \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)|$$

Varianta „střed“:

$$\int_a^b f(x) dx = h(f((x_0 + x_1)/2) + \cdots + f((x_{n-1} + x_n)/2)) + R_h,$$

$$|R_h| \leq \frac{1}{24}(b-a)h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

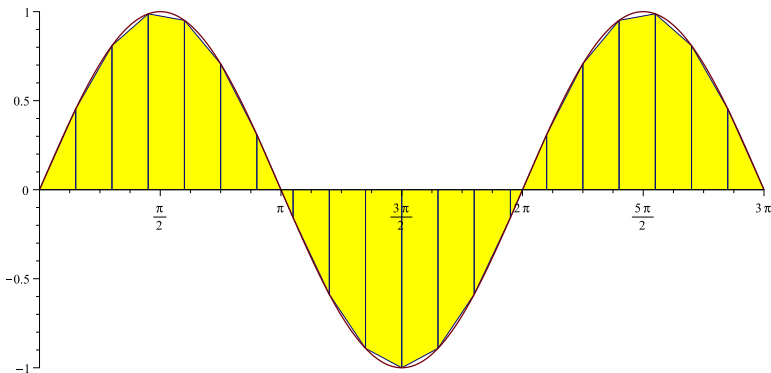


$$\int_0^{3\pi} \sin x dx = 2, \text{ numericky } 2,018626071, n = 20;$$
$$|R_h| \leq 0,087.$$

Lichoběžníková metoda

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n) \right) + \hat{R}_h,$$

kde $|\hat{R}_h| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$

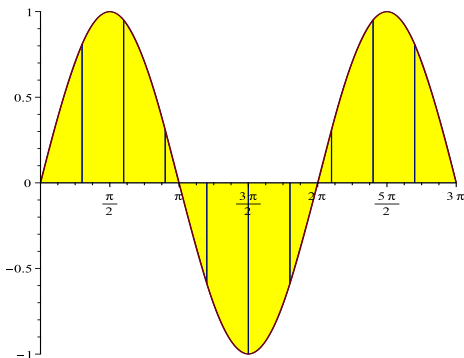


$\int_0^{3\pi} \sin x dx = 2$, numericky 1,962851274 (náhodou shoda s výsledkem „zleva“), $n = 20 \Rightarrow 20$ lichoběžníků; $|R_h| \leq 0,174$.

Simpsonova metoda (aproximace po částech kvadratickou funkcí, přesnější), ***n* musí být sudé**

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) + \tilde{R}_h,$$

kde $|\tilde{R}_h| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|.$



$$\begin{aligned} \int_0^{3\pi} \sin x \, dx &= 2, \\ \text{numericky} \\ 2,000562757, \\ n = 20 &\Rightarrow h = 3\pi/20, \\ 10 \text{ křivočarých li-} \\ \text{choběžníků;} \\ |\tilde{R}_h| &\leq 0,00258. \end{aligned}$$

Gaussova-Legendrova integrace na intervalu $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{-1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) + R_n,$$

kde $|R_n| \leq \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} \max_{\xi \in [-1,1]} |f^{(2n)}(\xi)|$

a body ξ_i (kořeny L. pol. st. $n+1$) a váhy w_i jsou

$n = 1$: $\xi_1 = 0$, $w_1 = 2$

$n = 2$: $\xi_1 = -1/\sqrt{3} = -0,57735$, $w_1 = 1$, $\xi_2 = 1/\sqrt{3}$, $w_2 = 1$

$n = 3$: $\xi_1 = -\sqrt{3/5} = -0,774597$, $w_1 = 5/9 = 0,555556$,
 $\xi_2 = 0$, $w_2 = 8/9 = 0,888889$,
 $\xi_3 = -\xi_1$, $w_3 = w_1$.

... na intervalu $[a, b]$: Integrál transformujeme substitucí

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2}$$

na interval $[-1, 1]$ a uplatníme vztahy ze strany 8. Konkrétně

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} d\xi \\ &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}\xi_i + \frac{a+b}{2}\right) + R_n, \text{ přičemž}\end{aligned}$$

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} \max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)|.$$

Přesná pro polynomy až do stupně $2n - 1$ včetně.

Příklad

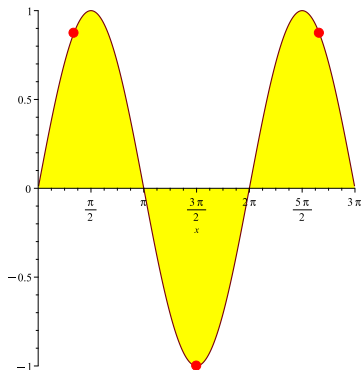
$$\int_0^{3\pi} \sin x \, dx \approx -\frac{5 \cos\left(-\frac{3\sqrt{15}\pi}{10}\right) \pi}{6} - \frac{4\pi}{3} - \frac{5 \cos\left(\frac{3\sqrt{15}\pi}{10}\right) \pi}{6}$$
$$= 0,384442607;$$

$$|R_3| \leq \frac{3^7 \pi^7 6^4}{7 \cdot 720^3} = \frac{243 \pi^7}{224000} = 3,276478819$$

Výsledek nepřesný, odhad chyby bezcenný.

Poznámka: Proč v aproximační formuli vystupuje cosinus? Protože $a = 0$, $b = 3\pi$ a

$$\begin{aligned} & \sin((b-a)\xi/2 + (b+a)/2) \\ &= \sin(3\pi\xi/2 + 3\pi/2) \\ &= \sin(3\pi\xi/2) \cos(3\pi/2) \\ &\quad + \cos(3\pi\xi/2) \sin(3\pi/2) \\ &= -\cos(3\pi\xi/2). \end{aligned}$$

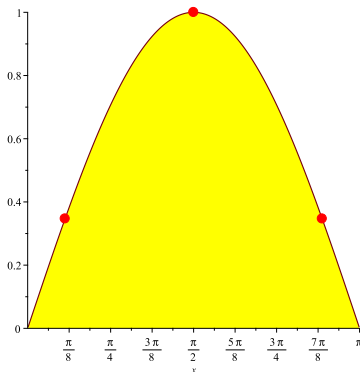


$$\int_0^{3\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$\approx \frac{5 \cos\left(-\frac{\sqrt{15}\pi}{10}\right) \pi}{18} + \frac{4\pi}{9} + \frac{5 \cos\left(\frac{\sqrt{15}\pi}{10}\right) \pi}{18} = 2,001389;$$

$$|R_3| \leq \frac{\pi^7 6^4}{7 \cdot 720^3} = \frac{\pi^7}{2016000} = 0,001498$$

Výsledek dostatečně přesný, užitečný odhad chyby.



Poučení: G-L integraci užíváme opakovaně – na podintervalech

Příklad: $f(x) = |x| \sin(x + 1)$, $I = \int_{-1}^2 f(x) dx = 1,438163031$.

Také $= I_1 + I_2$, kde $I_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx = 0,158529015$

a $I_2 = \int_0^2 f(x) dx = 1,279634016$.

Užijeme 2x tříbodové G-L schéma. Zjistíme, že

$$I_{1,GL} = 0,1585317186$$

$$I_1 - I_{1,GL} = -0,0000027034$$

$$\text{odhad } |R_{1,3}| = 0,000003472$$

$$I_{2,GL} = 1,279842191$$

$$I_2 - I_{2,GL} = -0,000208175$$

$$\text{odhad } |R_{2,3}| = 0,0004444$$

$$I - (I_{1,GL} + I_{2,GL}) = -0.000210878$$

K dosažení značné přesnosti
stačilo šest funkčních hod-
not.

