

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Skalární součin funkcí
- ▶ Ortogonální a ortonormální systém funkcí
- ▶ Legendrovy polynomy

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, str. 22, 57, 71,
zejména však tato prezentace

Skalární součin

Znáte skalární součin uspořádaných n -tic reálných čísel. Tedy $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, kde $u, v \in \mathbb{R}^n$, a

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Na $(\cdot, \cdot)$ můžeme pohlížet jako na zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Podívejme se na skalární součin obecněji – přes jeho vlastnosti.

Zobrazení $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, které dvojicím prvků z V přiřazuje reálná čísla, nazveme **skalárním součinem** na V , pokud pro každé $x, y \in V$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(y, x) = (x, y), \quad (1)$$

$$(x + z, y) = (x, y) + (z, y), \quad (2)$$

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \quad (x, \alpha y) = \alpha(x, y), \quad (3)$$

$$(x, x) \geq 0, \quad (4)$$

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (5)$$

Navíc předpisem

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} \quad (6)$$

je definována norma na V .

Poznámka: V případě skalárního součinu vektorů z $\mathbb{R}^n$ je (6) euklidovská norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Skalární součin funkcí

Nechť V nyní značí všechny spojité funkce na intervalu $[a, b]$; funkce můžeme sčítat, odčítat, násobit reálnými čísly a výsledná funkce je opět spojitá.

Předpisem

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

kde $f, g \in V$, je definován skalární součin na $V \times V$.

Jsou totiž splněny požadavky (1)–(5). Prostřednictvím (6) je definována „velikost“ funkce $f \in V$, konkrétně

$$\|f\|_{L^2(a,b)} \text{ nebo stručněji } \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Přesně: „ L^2 -norma funkce f “. (L^2 vyslov „el dva“.)

$L^2(a, b)$ pak značí všechny funkce f takové, že $\int_a^b f^2(x) dx$ existuje a je konečný. V dalším $V = L^2(a, b)$.

Ortogonalní systém funkcí

Víme, že dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ jsou ortogonální (na sebe kolmé), pokud $(u, v) = 0$.

O dvou funkcích $f, g \in V$ řekneme, že jsou **ortogonální**, pokud $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$.

Nechť S je systém funkcí $\{f_i \in V : i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ (konečný) nebo $\{f_i \in V : i = 0, 1, 2, \dots\}$ (nekonečný). Řekneme, že tento systém je **ortogonální** ve V , pokud pro navzájem různé funkce f_i, f_j platí

$$(f_i, f_j) = 0, \text{ jestliže } i \neq j.$$

Pokud navíc pro každou funkci $f_i \in V$ platí $(f_i, f_i) = \|f_i\|_2^2 = 1$, řekneme, že systém S je **ortonormální**.

Příklad: $S_{\cos, \sin} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ je ortogonální v $L^2(-\pi, \pi)$, není ortonormální v $L^2(-\pi, \pi)$ a není ortogonální v $L^2(0, \pi/2)$ ani v $L^2(0, \pi)$. (Pozor, některé dvojice funkcí mohou být ortogonální, např. $\int_0^\pi \cos x \sin 3x dx = 0$, ale $\int_0^\pi \cos x \sin 2x dx = 4/3$.)

Aproximace funkcí aneb výhoda orto*** systému

Dána funkce $g \in V$ a množina LN funkcí $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subset V$, vše na intervalu $[a, b]$.

Úloha: Vyřešit $\min_{c_0, c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}} \|g - g_N\|_2^2$, kde

$$g_N(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_N \varphi_N(x), x \in [a, b].$$

Úloha je ekvivalentní s minimalizací $\|g - g_N\|_2$, s kvadrátem se však lépe počítá.

Definujme funkci

$$\begin{aligned}\Gamma(c_0, c_1, \dots, c_N) &= \|g - g_N\|_2^2 \\ &= (g - g_N, g - g_N) = (g, g) - 2(g, g_N) + (g_N, g_N) \\ &= (g, g) - 2 \left(g, \sum_{i=0}^N c_i \varphi_i \right) + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j).\end{aligned}$$

Podmínka minima (parciální derivace, pozdější látka tohoto semestru)

$$\Gamma'_i(c_0, c_1, \dots, c_N) \equiv \frac{\partial \Gamma}{\partial c_i}(c_0, c_1, \dots, c_N) = 0, \text{ kde } i = 0, 1, \dots, N.$$

Konkrétně

$$\Gamma'_i(c_0, c_1, \dots, c_N) = 0 - 2(g, \varphi_i) + 2 \sum_{j=0}^N c_j (\varphi_i, \varphi_j) = 0,$$

odtud **soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $c_0, c_1, \dots, c_N$**

$$(\varphi_0, \varphi_0)c_0 + (\varphi_0, \varphi_1)c_1 + \dots + (\varphi_0, \varphi_N)c_N = (g, \varphi_0),$$

$$(\varphi_1, \varphi_0)c_0 + (\varphi_1, \varphi_1)c_1 + \dots + (\varphi_1, \varphi_N)c_N = (g, \varphi_1),$$

$$\vdots$$

$$(\varphi_N, \varphi_0)c_0 + (\varphi_N, \varphi_1)c_1 + \dots + (\varphi_N, \varphi_N)c_N = (g, \varphi_N).$$

Vyřešením soustavy získáme hledané koeficienty $c_0, c_1, \dots, c_N$

Jsou-li funkce $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ ortogonální, pak
 $i \neq j \Rightarrow (\varphi_i, \varphi_j) = 0$ a soustava se zjednoduší

$$(\varphi_0, \varphi_0)c_0 = (g, \varphi_0),$$

$$(\varphi_1, \varphi_1)c_1 = (g, \varphi_1),$$

$$\vdots$$

$$(\varphi_N, \varphi_N)c_N = (g, \varphi_N).$$

Jsou-li funkce $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ ortonormální, dostáváme přímo

$$c_i = (g, \varphi_i) = \int_a^b g(x)\varphi_i(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Jiný pohled: Požadujeme, aby funkce g_N byla ortogonální projekce funkce g na lineární obal (tj. všemožné lin. kombinace) funkcí $\varphi_0, \dots, \varphi_N$, tedy $(g - g_N, \varphi_i) = 0$ pro $i = 0, 1, \dots, N$, tj.

$$\begin{aligned}(g - g_N, \varphi_i) &= (g - c_0\varphi_0 - c_1\varphi_1 - \dots - c_N\varphi_N, \varphi_i) \\ &= (g, \varphi_i) - (\varphi_i, \varphi_0)c_0 \\ &\quad - (\varphi_i, \varphi_1)c_1 - \dots - (\varphi_i, \varphi_N)c_N = 0\end{aligned}$$

pro $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, což vede k systému lineárních algebraických rovnic odvozenému na straně 7.

Přesnost aproximace závisí na vlastnostech systému S a velikosti N . V praxi je $N < \infty$, avšak v teorii se uvažují i limity pro $N \rightarrow \infty$.

Legendrovy polynomy: ortonormalní systém na $[-1, 1]$
(Adrien-Marie Legendre, 1752 - 1833, Francie)

Mnoho různých ekvivalentních definic. Zvolme Rodrigueovu:

Legendrovým polynomem stupně n rozumíme polynom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Několik prvních Legendrových polynomů:

$$n = 0 \Rightarrow P_0 = 1$$

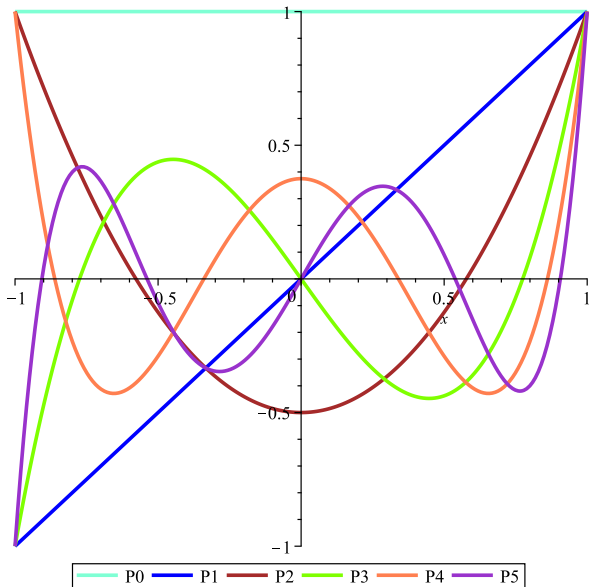
$$n = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x$$

$$n = 2 \Rightarrow$$

$$P_2 = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dx^2} (x^4 - 2x^2 + 1) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3 = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 = \frac{1}{2^3 3!} (3(x^2 - 1)^2 2x)'' = \dots = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

Legendrovy polynomy P_0 až P_5



Vlastnosti

- ▶ Systém $P_0, P_1, P_2, \dots$ je ortogonální v $L^2(-1, 1)$
- ▶ Systém $\varphi_k(x) = \sqrt{k + \frac{1}{2}} P_k(x)$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$, je ortonormální v $L^2(-1, 1)$
- ▶ $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$
- ▶ $P_k(1) = 1$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$
- ▶ Řešení rovnice $P_k(x) = 0$ leží v intervalu $(-1, 1)$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$
- ▶
$$P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x),$$
 kde $k = 2, 3, 4, \dots$ (Bonnetova rekurentní formule)

Odvodit vlastnosti L. polynomů není úplně snadné, ukažme však aspoň, že systém $S_{\cos, \sin}$ je ortogonální na intervalu $[-\pi, \pi]$. V dalším $k, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx \\
 & \stackrel{\text{p.p.}}{=} \left[\frac{1}{k} \cos(nx) \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) \, dx \\
 & \stackrel{\text{p.p.}}{=} \frac{n}{k} \left[-\frac{1}{k} \sin(nx) \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{n}{k} \cos(nx) \cos(kx) \right) \, dx \\
 & = \frac{n^2}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx,
 \end{aligned}$$

jestliže $k \neq n$, pak musí být $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx = 0$.

Důsledek (viz 2. řádek výpočtu): $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) \, dx = 0$.

Obdobně (p.p.) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) \, dx = 0$, je-li $k \neq n$.

Zbývá

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2kx)) \, dx = \pi + \left[\frac{1}{2k} \sin(2kx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2kx)) \, dx = \pi - \left[\frac{1}{2k} \sin(2kx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Ortonormální systém $S_{\cos, \sin}^{\text{ortonorm}}$ na $[-\pi, \pi]$:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},$$

$$\varphi_5(x) = \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}},$$

atd.

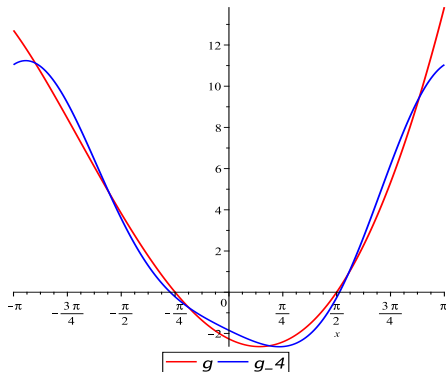
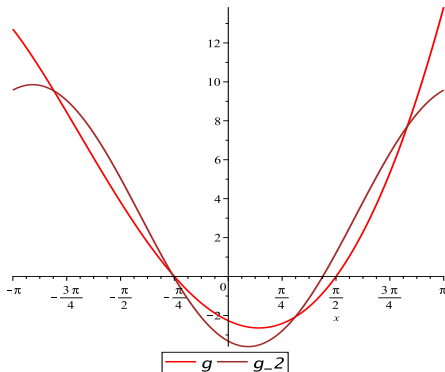
Příklad: Interval $[-\pi, \pi]$, aproximace funkce
 $g(x) = (x - \pi/2)(x + \pi/4) \ln(x + 2\pi)$ funkcí
 $g_N = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_N\varphi_N$.

Dle str. 8: $c_i = (g, \varphi_i) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\varphi_i(x) dx$, kde $i = 0, 1, \dots, N$.

Funkce g_N tedy minimalizuje „velikost“ rozdílu $g - g_N$ ve
smyslu velikostí měřených prostřednictvím $\|\cdot\|_{L^2(-\pi, \pi)}$.

Funkci g_N se říká **trigonometrický polynom stupně N** . Je-li
 $N = \infty$, pak **(Fourierova) trigonometrická řada**.

Výsledky pro $N = 2$ a $N = 4$:



$$g_2 = 3,128 - 6,447 \cos x - 1,920 \sin x,$$

$$g_4 =$$

$$3,128 - 6,447 \cos x - 1,920 \sin x + 1,468 \cos 2x + 0,148 \sin 2x.$$

$$\|g - g_2\|_{L^2(-\pi, \pi)} = 2,990, \quad \|g - g_4\|_{L^2(-\pi, \pi)} = 1,448.$$

Poznámka: Na str. 22 je ukázáno, jak se elegantně spočítá

$$\|g - g_N\|_{L^2}.$$

Gramova–Schmidtova ortonormalizace

Postup si ukážeme na příkladě:

Nechť $\mathcal{V}$ je lineární obal množiny funkcí $\{1, x, x^2, x^3\}$ na intervalu $[-1, 1]$, tj.

$$\mathcal{V} = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid \text{kde } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

(všechny polynomy na $[-1, 1]$ do třetího stupně včetně). Funkce $1, x, x^2, x^3$ jsou lin. nezávislé (LN), ale netvoří ortogonální systém. Úkol: nahradit $1, x, x^2, x^3$ funkcemi Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , které budou LN a navzájem ortonormální.

Myšlenka algoritmu pro ortonormalizaci množiny LN funkcí $\hat{Q}_0, \hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_N$.

- ▶ Položíme $n = 0$ a funkci $\hat{Q}_0$ vynásobíme takovým číslem, aby její $L^2(-1, 1)$ -norma byla rovna 1. Tím získáme Q_0 .
- ▶ (*) Za n dosadíme $n + 1$. Pokud $n > N$, máme ortonormální systém $Q_0, Q_1, \dots, Q_N$ hotov. Pokud nové $n \leq N$, pokračujeme dalším krokem.
- ▶ Zjistíme, do jaké „míry“ jsou funkce $Q_0, \dots, Q_{n-1}$ obsaženy ve funkci $\hat{Q}_n$. Ta „míra“ je reprezentována čísly $c_i = (Q_i, \hat{Q}_n)$, kde $i = 0, \dots, n - 1$.
- ▶ Funkci $\hat{Q}_n$ „očistíme od příměsí“ $Q_i, i = 0, \dots, n - 1$, získáme funkci $\tilde{Q}_n = \hat{Q}_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i Q_i$, která je ortogonální ke všem již ortonormálním funkcím $Q_0, \dots, Q_{n-1}$.
- ▶ Definujeme $Q_n = \tilde{Q}_n / \|\tilde{Q}_n\|_2$ a vrátíme se do bodu (*).

Postup

1. zvolit $Q_0 = 1/\|1\|_2$
2. zvolit $\hat{Q}_1 = x$, spočítat $c_{0,1} = (Q_0, \hat{Q}_1)$, definovat $\tilde{Q}_1 = \hat{Q}_1 - c_{0,1}Q_0$ a $Q_1 = \tilde{Q}_1/\|\tilde{Q}_1\|_2$
3. zvolit $\hat{Q}_2 = x^2$, spočítat $c_{0,2} = (Q_0, \hat{Q}_2)$, $c_{1,2} = (Q_1, \hat{Q}_2)$, definovat $\tilde{Q}_2 = \hat{Q}_2 - c_{0,2}Q_0 - c_{1,2}Q_1$ a $Q_2 = \tilde{Q}_2/\|\tilde{Q}_2\|_2$
4. zvolit $\hat{Q}_3 = x^3$, spočítat $c_{0,3} = (Q_0, \hat{Q}_3)$, $c_{1,3} = (Q_1, \hat{Q}_3)$, $c_{2,3} = (Q_2, \hat{Q}_3)$, definovat $\tilde{Q}_3 = \hat{Q}_3 - c_{0,3}Q_0 - c_{1,3}Q_1 - c_{2,3}Q_2$ a $Q_3 = \tilde{Q}_3/\|\tilde{Q}_3\|_2$

Provedení na další straně; u integrace se využívá toho, že integrály lichých funkcí na intervalu $[-1, 1]$ jsou rovny nule.

Poznámka: Srovnajte s G-S ortogonalizací z oficiálního taháku k MM1G. Teď budujeme přímo ortonormální funkce, proto jmenovatel v definici projekce (viz ofic. tahák k MM1G) je nyní v našem algoritmu pro funkce roven jedné.

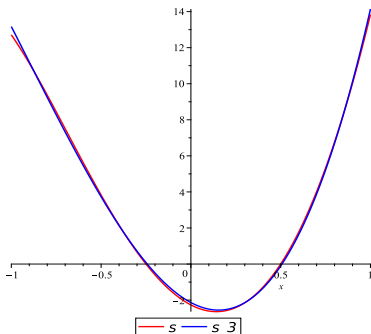
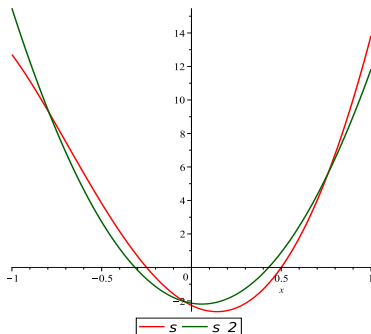
1. zvolit $Q_0 = 1/\sqrt{\int_{-1}^1 1^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. zvolit $\hat{Q}_1 = x$, spočítat $c_{0,1} = (Q_0, \hat{Q}_1) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{2} x dx = 0$,
definovat $\tilde{Q}_1 = \hat{Q}_1 - c_{0,1}Q_0 = x - 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x$ a
 $Q_1 = \tilde{Q}_1/\|\tilde{Q}_1\|_2 = x/\sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$
3. zvolit $\hat{Q}_2 = x^2$, spočítat $c_{0,2} = (Q_0, \hat{Q}_2) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$,
 $c_{1,2} = (Q_1, \hat{Q}_2) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{6}}{2} x x^2 dx = 0$, definovat
 $\tilde{Q}_2 = \hat{Q}_2 - c_{0,2}Q_0 - c_{1,2}Q_1 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = x^2 - \frac{1}{3}$ a
 $Q_2 = \tilde{Q}_2/\|\tilde{Q}_2\|_2 = (x^2 - \frac{1}{3})/\sqrt{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)$
4. zvolit $\hat{Q}_3 = x^3$, spočítat $c_{0,3} = (Q_0, \hat{Q}_3) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{2} x^3 dx = 0$,
 $c_{1,3} = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{6}}{2} x x^3 dx = \frac{\sqrt{6}}{5}$, $c_{2,3} = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{10}}{4} (3x^2 - 1) x^3 dx = 0$,
definovat $\tilde{Q}_3 = \hat{Q}_3 - c_{0,3}Q_0 - c_{1,3}Q_1 - c_{2,3}Q_2 = x^3 - \frac{3}{5}x$ a
 $Q_3 = \tilde{Q}_3/\|\tilde{Q}_3\|_2 = (x^3 - \frac{3}{5}x)/\|x^3 - \frac{3}{5}x\|_2 = \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x)$

Je vidět, že $Q_k = \sqrt{k + \frac{1}{2}} P_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, viz str. 10 a 12.

Na str. 15 a 16 jsme použili goniometrický systém. Nyní zkusme funkce Q_i , tj. Legendrovy polynomy.

Příklad: Funkce $s(x) = (\pi x - \pi/2)(\pi x + \pi/4) \ln(\pi x + 2\pi)$ je aproximována funkcí $s_N(x) = \sum_{i=0}^N c_i Q_i(x)$, kde $N = 2, 3$ a $c_i = \int_{-1}^1 s(x) Q_i(x) dx$.

Integrací zjistíme, že $c_0 = 4,424$, $c_1 = -1,487$, $c_2 = 6,658$, $c_3 = 1,233$. Po případné úpravě dostaneme $s_3 = -2,1356 - 5,2818x + 15,7915x^2 + 5,7681x^3$.



Velikost rozdílu $\|s - s_N\|_2$ spočítáme z hodnot c_i .

$$\begin{aligned}\|s - s_N\|_2^2 &= (s - s_N, s - s_N) = (s, s) - (s, s_N) - (s_N, s) + (s_N, s_N) \\ &= (s, s) - 2(s, s_N) + (s_N, s_N) = (s, s) - 2 \sum_{i=0}^N c_i^2 + \sum_{i=0}^N c_i^2 \\ &= (s, s) - \sum_{i=0}^N c_i^2, \text{ kde}\end{aligned}$$

$$(s, s) = \int_{-1}^1 (\pi^2(x - 1/2)(x + 1/4) \ln(\pi x + 2\pi))^2 dx = 67,667$$

a dále

$$(s, s) - \sum_{i=0}^2 c_i^2 = 67,667 - 66,112 = 1,555,$$

$$(s, s) - \sum_{i=0}^3 c_i^2 = 67,667 - 67,632 = 0,035.$$

$$\text{Pak } \|s - s_2\|_2 = \sqrt{1,555} = 1,247, \|s - s_3\|_2 = \sqrt{0,035} = 0,187.$$

Příklad (MNČ s neortogonalizovanými funkcemi): Funkce $s(x) = (\pi x - \pi/2)(\pi x + \pi/4) \ln(\pi x + 2\pi)$ je aproximována funkcí $s_3(x) = \sum_{i=0}^3 a_i f_i(x)$, kde $f_0 = 2 - x$, $f_1 = x + 1$, $f_2 = 3x^2 - x + 4$, $f_3 = x^3 + x^2$.

Musí platit $(s - s_3, f_i) = 0$ pro $i = 0, 1, 2, 3$, viz str. 9.

Po dosazení za s_3 a roznásobení dostaneme soustavu lin. alg. rovnic ze str. 7

$$(f_i, f_0)a_0 + (f_i, f_1)a_1 + (f_i, f_2)a_2 + (f_i, f_3)a_3 = (f_i, s), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

pro neznámé $a_j, j = 0, 1, 2, 3$. Maticově

$$\begin{pmatrix} \frac{26}{3} & \frac{10}{3} & \frac{62}{3} & \frac{14}{15} \\ \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & \frac{28}{3} & \frac{16}{15} \\ \frac{62}{3} & \frac{28}{3} & \frac{784}{15} & \frac{52}{15} \\ \frac{14}{15} & \frac{16}{15} & \frac{52}{15} & \frac{24}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{133\pi^2}{12} + \pi^2 \ln(\pi) + \frac{165\pi^2 \ln(3)}{16} \\ \frac{5\pi^2}{3} + \frac{\pi^2 \ln(\pi)}{4} - \frac{21\pi^2 \ln(3)}{16} \\ -\frac{36511\pi^2}{900} + \frac{167\pi^2 \ln(\pi)}{60} + \frac{189\pi^2 \ln(3)}{5} \\ \frac{13\pi^2 \ln(\pi)}{60} + \frac{1033\pi^2}{200} - \frac{723\pi^2 \ln(3)}{160} \end{pmatrix},$$

matice M soustavy $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$ je symetrická, $\mathbf{b}$ je pravá strana, tj. sloupcový vektor sestavený z hodnot (f_i, s) .

Číselně $\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{26}{3} & \frac{10}{3} & \frac{62}{3} & \frac{14}{15} \\ \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & \frac{28}{3} & \frac{16}{15} \\ \frac{62}{3} & \frac{28}{3} & \frac{784}{15} & \frac{52}{15} \\ \frac{14}{15} & \frac{16}{15} & \frac{52}{15} & \frac{24}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,72699912 \\ 5,04258330 \\ 40,9187049 \\ 4,42820060 \end{pmatrix},$$

s řešením $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -4,519828 \\ -6,4604524 \\ 3,3411358 \\ 5,768075 \end{pmatrix}$. Hledaný polynom

$$\begin{aligned} s_3(x) &= -4,519828(2-x) - 6,4604524(x+1) \\ &\quad + 3,3411358(3x^2-x+4) + 5,768075(x^3+x^2) \\ &\approx -2,1356 - 5,2818x + 15,7915x^2 + 5,7681x^3, \end{aligned}$$

tj. stejný výsledek jako při použití ortonormalizovaných Legendrových polynomů na straně 21.

Jak nyní spočítat $\|s - s_3\|_2 = \sqrt{(s - s_3, s - s_3)}$?

Opět s využitím vlastností skalárního součinu a již známých hodnot soustavy $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$:

$$(s - s_3, s - s_3) = (s, s) - 2(s, s_3) + (s_3, s_3), \text{ kde}$$

$$(s, s_3) = a_0(s, f_0) + \dots + a_3(s, f_3) = \mathbf{a}^T \mathbf{b},$$

$$(s_3, s_3) = \mathbf{a}^T M \mathbf{a} \stackrel{M\mathbf{a} = \mathbf{b}}{=} \mathbf{a}^T \mathbf{b}.$$

Tedy

$$\|s - s_3\|_2 = \sqrt{(s, s) - 2\mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \mathbf{b}} = \sqrt{(s, s) - \mathbf{a}^T \mathbf{b}}.$$

Poznámka: Pokud by funkce $f_0, \dots, f_3$ byly ortonormální, pak matice M bude maticí identity I , tudíž řešení $\mathbf{a}$ se bude rovnat pravé straně $\mathbf{b}$. V tom případě ovšem $a_i = (f_i, s)$, kde $i = 0, 1, 2, 3$. Pak

$\|s - s_3\|_2 = \sqrt{(s, s) - \mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{(s, s) - \sum_{i=0}^3 a_i^2}$, což je výsledek známý ze strany 22, kde $c_i \equiv a_i$.

Ještě k Legendrovým polynomům – vytvořující (generující) funkce

Legendre původně řešil tento problém: (aspoň přibližně) vyjádřit $\frac{1}{\|\vec{y} - \vec{z}\|_2}$ pomocí polynomů, kde $\vec{y}$ a $\vec{z}$ jsou dva vektory vycházející z počátku souřadnic.

Jsou-li r_y a r_z délky $\vec{y}$ a $\vec{z}$, pak z kosinové věty dostaneme

$$\|\vec{y} - \vec{z}\|_2^2 = r_y^2 + r_z^2 - 2r_y r_z \cos \phi = r_y^2 \left(\frac{r_z^2}{r_y^2} + 1 - 2\frac{r_z}{r_y} \cos \phi \right),$$

kde ϕ je úhel mezi vektory $\vec{y}$ a $\vec{z}$.

Předpokládejme $r_z \leq r_y$ a zaveďme $x = r_z/r_y$ a $t = \cos \phi$. Pak

$$\frac{1}{\|\vec{y} - \vec{z}\|_2} = \frac{1}{r_y} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + x^2}}, \quad |x| \leq 1, \quad |t| < 1.$$

Necht' ve funkci $f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ je x parametr a t proměnná.

Taylorovy polynomy (koeficienty odvozeny z derivací dle t a pro $t = 0$)

$$T_0(t) = f_x(0) = 1 = P_0(x),$$

$$T_1(t) = f_x(0) + f'_x(0)t = 1 + xt = P_0(x) + P_1(x)t,$$

$$\begin{aligned} T_2(t) &= f_x(0) + f'_x(0)t + \frac{1}{2}f''_x(0)t^2 \\ &= 1 + xt + \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)t^2 = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2, \end{aligned}$$

$$T_3(t) = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \left(\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}\right)t^3,$$

.....

Lze ukázat, že funkci f_x lze vyjádřit jako součet nekonečné řady:

$$f_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Funkce $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ se nazývá **vytvěřující funkce** pro Legendrovy polynomy – jsou to koeficienty (závislé na x) v Taylorových polynomech proměnné t .