

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Funkce více proměnných IV – extrémy
 - ▶ lokální extrémy

Literatura:

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, str. 200–205

Text doc. A. Nekvindy

<http://mat.fsv.cvut.cz/nales/prednasky2/kniha.pdf>

strany 79 – 82

Extrémy funkce více reálných proměnných

Rozlišujeme

- ▶ **lokální extrém** (lokální maximum nebo minimum) funkce f , tj. v nějakém bodě A je extrém vzhledem k hodnotám $f(x)$, kde x leží v nějakém (i libovolně malém) okolí $U(A)$ bodu A ;
- ▶ **globální (též zvaný absolutní) extrém** (globální maximum nebo minimum) funkce f , tj. na nějaké předem dané množině („větší“ než $U(A)$).

Zaved'me pojem **prstencové okolí bodu A** : $P(A) \stackrel{\text{def}}{=} U(A) \setminus \{A\}$
(Můžeme si představit jako (malý) kroužek, z něhož je vyjmut střed.)

Definice: Necht' f je funkce n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ s definičním oborem $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ a necht' $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ je vnitřní bod množiny $\mathcal{D}_f$. Jestliže¹

$$\exists P(A) \subset \mathcal{D}_f \quad \forall X \in P(A) \quad f(A) \geq f(X),$$

pak řekneme, že funkce f má v bodě A **lokální maximum**.
Další varianty:

$f(A) > f(X)$ v bodě A **ostré lokální maximum**,

$f(A) \leq f(X)$ v bodě A **lokální minimum**,

$f(A) < f(X)$ v bodě A **ostré lokální minimum**.

Lokální minima a maxima se souhrnně nazývají **lokální extrémy**.

¹Čteme: Jestliže existuje takové prstencové okolí $P(A)$ bodu A , že celé leží v definičním oboru $\mathcal{D}_f$ a že pro každý bod X z $P(A)$ platí $f(A) \geq f(X)$, pak řekneme ...

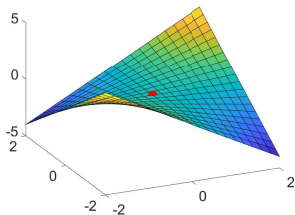
Jak lokální extrémy najít?

Věta (nutná podmínka existence lokálních extrémů diferencovatelné funkce): Jestliže je funkce f diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{R}^n$ a jestliže má lokální extrém v bodě A , pak $\text{grad } f(A) = \vec{0}$.

Pozor: Nulový gradient nemusí znamenat extrém!

Nechť $f(x, y) = xy$. Pak f je diferencovatelná v $\mathbb{R}^2$, $f(0, 0) = 0$ a $\nabla f(0, 0) = (y, x)|_{[0, 0]} = (0, 0)$, avšak v bodě $(0, 0)$ není extrém, neboť $f(t, t) = t^2$ a $f(-t, t) = -t^2$, tj. není splněna žádná z definic lokálního extrému.

Hledání extrémů: Najdeme body, v nichž je gradient nulový nebo parc. der. neexistuje, a pak zkoumáme, zda v nich je extrém.



Definice: Vnitřní bod $A \in G \subset \mathcal{D}_f$, v němž $\text{grad } f(A) = \vec{0}$ nebo v němž **neexistuje** nejméně jedna parciální derivace, se nazývá **kritický² bod** funkce f na množině G .

Pokud $G = \mathcal{D}_f$, hovoříme o kritickém bodu funkce f .

Tedy kritické body funkce jsou „podezřelé“ z extrému a musíme je podrobněji vyšetřit.

²**Stacionárním bodem** diferencovatelné funkce f nazýváme bod A , v němž $\text{grad } f(A) = \vec{0}$.

Věta (postačitelná podmínka existence lok. extrému,
Sylvestrovo kritérium; obecná věta, možno přeskočit na str. 8):

Nechť f je funkce n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ diferencovatelná v bodě A a nechť $\text{grad } f(A) = \vec{0}$. Dále předpokládejme, že v nějakém okolí $U(A)$ existují všechny parciální derivace druhého řádu a jsou spojité v A . Definujme determinant

$$D_k(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(A) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(A) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(A) \end{vmatrix},$$

kde $k = 1, 2, \dots, n$.

(Pokračování na další stránce.)

Pokud $D_n(A) \neq 0$, pak nastane jeden ze tří případů:

a) Jestliže pro $k = 1, 2, \dots, n$ platí $D_k(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální minimum.

b) Jestliže platí $(-1)^k D_k(A) > 0$, kde $k = 1, 2, \dots, n$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální maximum.

c) Nenastane-li a) ani b), pak funkce f v bodě A nemá lokální extrém (pozor, stále je $D_n(A) \neq 0$).

Poznámka: Jestliže $D_n(A) = 0$, pak nelze uplatnit a), b), c).
V bodě A extrém může být, nemusí být.

Pozorování: U funkcí dvou proměnných a) odpovídá pozitivně definitnímu 2. diferenciálu, b) odpovídá negativně definitnímu 2. diferenciálu, c) sedlový bod, odpovídá indefinitnímu 2. diferenciálu.

Podrobněji na na další stránce.

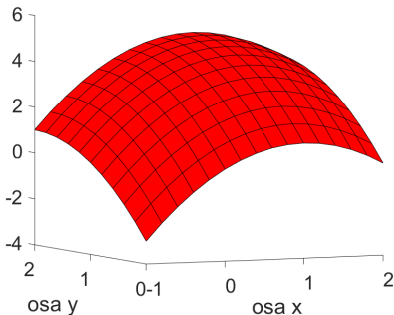
Lokální extrémy funkce f proměnných x, y

Druhé parc. der. označme f_{xx} , f_{yy} a f_{xy} ($=f_{yx}$ díky záměnnosti p. d.). Tedy $D_2(A) = f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}^2(A)$ a $D_1(A) = f_{xx}(A)$. Potom:

- a) Jestliže $f_{xx}(A) > 0$ a $f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}^2(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální minimum; $d^2f_A(h, k)$ pozitivně definitní.
- b) Jestliže $f_{xx}(A) < 0$ a $f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}^2(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální maximum; $d^2f_A(h, k)$ negativně definitní.
- c) Jestliže $f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}^2(A) < 0$, pak funkce f nemá v bodě A lokální extrém (sedlový bod); $d^2f_A(h, k)$ indefinitní.
- d) Jestliže $f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}^2(A) = 0$, pak v bodě A extrém může, ale nemusí být a (ne)existenci extrému je nutno ukázat jiným způsobem.

Poznámka: Plyne z aproximace funkce f v bodě A jejím Taylorovým polynomem 2. stupně, kde $\nabla f(A) = \vec{0}$. Tvrzení a) až d) plynou z výkladu o tot. dif. 2. řádu $d^2f_A(h, k)$, viz předminulou přednášku Funkce více proměnných II.

Příklad: Funkce $f(x, y) = 2x - x^2 + 4y - y^2$ má gradient $\nabla f(x, y) = (2 - 2x, 4 - 2y)$, ten je roven nulovému vektoru pouze tehdy, když $x = 1$ a $y = 2$. Kritický bod³ $A = [1, 2]$. Dále $f_{xx}(A) = -2$, $f_{yy}(A) = -2$, $f_{xy}(A) = 0$, tudíž $D_1(A) = -2$ a $D_2(A) = 4$. Funkce f má v bodě A ostré lokální maximum s hodnotou $f(1, 2) = 5$.

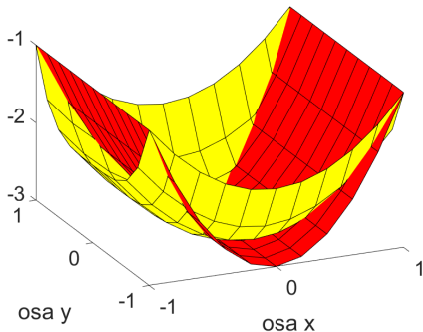


Graf T. polynomu (červený) splývá s grafem kvadratické funkce.

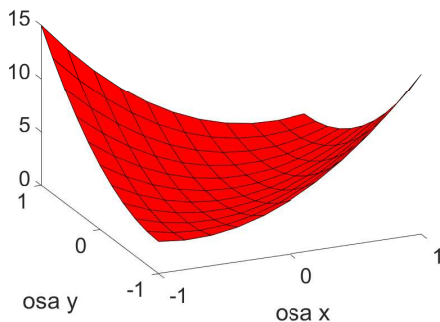
³Přesněji stacionární bod, neboť gradient existuje.

Příklad: Funkce $f(x, y) = x^2 + y^4 - 3$ má gradient $\nabla f(x, y) = (2x, 4y^3)$, ten je roven nulovému vektoru pouze tehdy, když $x = 0$ a $y = 0$. Stacionární bod $A = [0, 0]$. Dále $f_{xx}(A) = 2$, $f_{yy}(A) = 0$, $f_{xy}(A) = 0$, tudíž $D_1(A) = 2$, $D_2(A) = 0$ a věta nám nepomůže. Nicméně vidíme, že $f(x, y) > -3$ pro každou dvojici $(x, y) \neq (0, 0)$, takže funkce f má v bodě A ostré lokální minimum s hodnotou $f(0, 0) = -3$.

Graf T. polynomu (červený), graf funkce (žlutý).



Příklad: Funkce $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy + 2$ má gradient $\nabla f(x, y) = (8x - 6y, -6x + 6y)$, ten je roven nulovému vektoru právě tehdy, když $x = 0$ a $y = 0$. Stacionární bod $A = [0, 0]$. Dále $f_{xx}(A) = 8$, $f_{yy}(A) = 6$, $f_{xy}(A) = -6$, tudíž $D_1(A) = 8$, $D_2(A) = 12$ a dle věty je v bodě A ostré lokální minimum s hodnotou $f(0, 0) = 2$.



Příklad: Funkce $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 7xy + 2$ má gradient $\nabla f(x, y) = (8x - 7y, -7x + 6y)$, ten je roven nulovému vektoru právě tehdy, když $x = 0$ a $y = 0$. Stacionární bod $A = [0, 0]$. Dále $f_{xx}(A) = 8$, $f_{yy}(A) = 6$, $f_{xy}(A) = -7$, tudíž $D_1(A) = 8$, $D_2(A) = -1$ a dle věty je bod A sedlový bod a funkce f v bodě A nemá extrém.

To vidíme i z toho, že funkce f zúžená například na přímku $y = 2x$ dává funkci $g(x) = f(x, 2x) = 2x^2 + 2$ s ostrým lokálním (ba globálním) minimem v $x = 0$, kdežto pro $y = 1,1x$ dostáváme $\hat{g}(x) = f(x, 1,1x) = -0,07x^2 + 2$ s ostrým lokálním (ba globálním) maximem v $x = 0$.

