

Předmět: MM2G

Vyučující: Jan Chleboun

Kde ho najdete: B-305

Kontakty: 22435 **4379**, jan.chleboun@cvut.cz

Rozcestník katedry: <http://mat.fsv.cvut.cz/>

Stránka přednášejícího k MM2G:

<https://mat.fsv.cvut.cz/>

[chleboun/JCh_vyuka/101MM2G/101MM2G.htm](https://mat.fsv.cvut.cz/chleboun/JCh_vyuka/101MM2G/101MM2G.htm)

Konzultační hodiny (prozatím, mohou se změnit):

pondělí $18^{00} - 18^{50}$, úterý $18^{00} - 18^{50}$

jindy po předchozí dohodě

Dnešní látka

- ▶ Primitivní funkce
- ▶ Neurčitý integrál
 - ▶ Integrace po částech (per partes)
 - ▶ Substituční metoda I
 - ▶ Substituční metoda II

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, oddíl III,
kapitola 3
skripta postupují od určitého integrálu k neurčitému, my obráceně

Odkazy na stránky vyučujícího k MM2G

Primitivní funkce

Definice: Necht' (a, b) je interval s krajními body a, b přičemž $a < b$ (může být $a = -\infty, b = +\infty$). Funkci F nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f v/na intervalu (a, b) , jestliže pro $\forall x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$, zkráceně $F' = f$.

Příklad: $f(x) = 5x^2, F(x) = \frac{5}{3}x^3 - 7$ na $(-\infty, +\infty)$.

Věta (o existenci primitivní funkce): Je-li funkce f **spojitá** v intervalu (a, b) , pak k funkci f existuje v intervalu (a, b) primitivní funkce.

Poznámka: Derivování je deterministický proces, integrování nikoliv. Prim. fce může existovat, ale nemusí být vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí: $f(x) = e^{-x^2}, f'(x) = -2xe^{-x^2}$ v $(-\infty, +\infty)$. Ze spojitosti f plyne existence prim. fce F , není vyjádřitelná elem. fcemi. Trik: $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}(x)$.

Vlastnosti

- ▶ $F' = f$ v (a, b) , pak $\forall C \in \mathbb{R}$ platí $(F + C)' = f$ v (a, b)
- ▶ $F' = f$ a $G' = f$ v (a, b) , pak $F = G + C$ v (a, b) pro nějakou konstantu $C \in \mathbb{R}$
(neboť $(F - G)' = F' - G' = 0 \Rightarrow F - G = C$)
- ▶ $F' = f$ v (a, b) a $G' = g$ v $(a, b) \Rightarrow (F + G)' = f + g$ v (a, b)
- ▶ $F' = f$ v (a, b) a $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha F$ je primitivní funkcí k αf v (a, b)

Neurčitý integrál

Definice: Neurčitým integrálem funkce f v intervalu (a, b) nazýváme množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu (a, b) (pokud je neprázdná).

Značíme $\int f(x) dx$, $\int f dx$, někdy i $\int f$, pokud je jasné, podle které proměnné se integruje.

Poznámka: Je-li $F' = f$ v (a, b) , pak $\int f(x) dx = F(x) + C$, kde F je pevně zvolená primitivní funkce k f a C probíhá množinu všech reálných čísel.

Základní neurčité integrály: viz skripta, internet (např. Seznam základních integrálů na <https://cs.wikipedia.org>) a další zdroje. Nebo odvození ze znalosti derivace elementárních funkcí.

Příklad: V tabulkách integrálů bývají informace neúplné, často chybí interval, na němž rovnost platí. Např. rovnost

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

si ještě musíme doplnit o $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Vskutku, je-li $x \in (0, +\infty)$, pak $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$;

je-li $x \in (-\infty, 0)$, pak $(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Podrobně

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x \in (-\infty, 0), C_1 \in \mathbb{R}, \\ \ln x + C_2, & x \in (0, \infty), C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Metody integrace

Integrace rozkladem

Z vlastností prim. fcí plyne, že neurčitý integrál součtu funkcí je roven součtu neurčitých integrálů jednotlivých funkcí

Příklad:

$$\begin{aligned}\int \left(2x^2 - 3x^3 + \frac{1}{2x} \right) dx &= \int 2x^2 dx + \int (-3x^3) dx + \int \frac{1}{2x} dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \int 3x^3 dx + \frac{1}{2} \ln |x| + C \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \ln |x| + C\end{aligned}$$

ZKOUŠKA!

Integrace po částech (per partes)

Myšlenka: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int u'v \, dx = \int (uv)' \, dx - \int uv' \, dx$

Tedy $\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$.

Příklad:

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \\ u' = x & u = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2x} \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Substituční metoda

Myšlenka: Argument funkce f , tj. proměnnou x , nahradíme vhodnou funkcí g proměnné např. t , tj. $x = g(t)$ a integraci vzhledem k x nahradíme integrací vzhledem k t .

Přesněji: Necht' funkce f je spojitá v intervalu (a, b) a funkce $x = g(t)$ je spojitá a má spojitou derivaci v intervalu (c, d) a zobrazuje (c, d) do (a, b) . Pak

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt, \text{ kde } t \in (c, d). \quad (1)$$

Ověřme rovnost (1): Označme $F(x) + C_1$ primitivní funkci k f na intervalu (a, b) . Složenou funkci $f(g(t)) g'(t)$ pro jednoduchost označme $z(t)$, je spojitá, a tedy k ní existuje primitivní funkce $Z(t) + C_2$. Do $F(x) + C_1$ dosadíme $x = g(t)$ a derivujeme dle t (derivace složené funkce)

$$(F(g(t)) + C_1)' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) = (Z(t) + C_2)'.$$

Derivace obou primitivních funkcí se rovnají, z vlastností plyne, že tyto primitivní funkce se liší jen o konstantu, neurčité integrály (tj. množiny prim. fcí) jsou shodné.

Substituční metoda I: výraz s x nahradíme novou proměnnou

Myšlenka: Zadání má tvar pravé strany (1). Vyjdeme tedy z pravé strany a po aplikaci substituce dostaneme stranu levou, tj. funkci f , jejíž integrál již dokážeme najít.

Příklad:

$$\begin{aligned}\int \cos x \ln(\sin x) dx &= \left| \begin{array}{l} \sin x = y \\ \cos x dx = dy \end{array} \right| = \int \ln y dy \\ \text{per p. } \left| \begin{array}{ll} v = \ln y & v' = \frac{1}{y} \\ u' = 1 & u = y \end{array} \right| &= y \ln y - \int 1 dy = y \ln y - y + C \\ &= \sin x \ln(\sin x) - \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Substituční metoda II: proměnnou x nahradíme výrazem s novou proměnnou

Myšlenka: Zadání má tvar levé strany (1). Najdeme takovou vhodnou substituci $x = g(t)$, abychom pak uměli integrovat pravou stranu (1). Na rozdíl od metody I funkce g musí být na intervalu (c, d) ryze monotónní (tj. rostoucí nebo klesající), protože ve výpočtu potřebujeme i funkci inverzní ke g . Integrace metodou II bývá obtížnější než postup metodou I.

Příklad:
$$\int \sin \sqrt{x} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ (t \in (0, \infty)) \\ dx = 2t \, dt \end{array} \right| = 2 \int t \sin t \, dt$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{per p.}}{=} \left| \begin{array}{ll} v = t & v' = 1 \\ u' = \sin t & u = -\cos t \end{array} \right| = -2t \cos t + 2 \int \cos t \, dt \\ &= -2t \cos t + 2 \sin t + C \stackrel{\text{inverzní fce}}{=} -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

Lze integrovat i metodou I: $\sqrt{x} = t$, $dx/(2\sqrt{x}) = dt$.