

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Neurčitý integrál
 - ▶ Integrace racionálních (lomených) funkcí

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, oddíl III,
kapitola 4

Odkazy na stránky vyučujícího k MM2G

Připomenutí minulé látky Je dána funkce f a hledáme takovou funkci F (**primitivní funkci**), aby platilo $F'(x) = f(x)$ na nějakém intervalu (a, b) . Případně nás zajímá množina všech primitivních funkcí k f (tj. **neurčitý integrál** $\int f(x) dx$), víme, že prvky této množiny se liší jen o konstantu.

Již známe dvě **obecné** metody pro $\int f(x) dx$:

integraci po částech (per partes)

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

substituční metodu

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

Nyní se budeme věnovat metodám pro integraci **speciálních** typů funkcí.

$$\text{Typ } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \dots = \ln |f(x)| + C$$

Jde o speciální případ substituční metody I:

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C \\ &= \ln |f(x)| + C \end{aligned}$$

Příklad:

$$\begin{aligned} \int \cotg x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| \\ &= \int \frac{1}{t} \, dt = \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C, \\ &\quad x \in (k\pi, (k+1)\pi), \, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Racionální (lomené) funkce

Definice: Racionální (lomenou) funkcí nazýváme funkci ve tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P = P(x)$ a $Q = Q(x)$ jsou polynomy libovolných stupňů. O racionální funkci $R = R(x)$ řekneme, že je **ryze lomená**, jestliže $\text{st } P < \text{st } Q$, kde st značí stupeň polynomu.

Poznámky: $\text{st}(5x^2) = 2$, $\text{st}(-x^4 + 7x - 3) = 4$.

Pro označení stupně polynomu se též používá $\deg$.

Myšlenka: Racionální funkci R upravíme na tvar

$$R = \text{polynom} + \text{ryze lomená funkce}$$

a každý člen integrujeme zvlášť. U polynomu je integrace snadná. U ryze lomené funkce uplatníme **metodu rozkladu na parciální zlomky**.

Dělení polynomu polynomem

Příklad: pro výpočet viz externí zdroj

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2x^5 + 5x^3 + x^2 + 2x - 5}{x^2 - 3x + 2} \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 19x + 46 + \frac{102x - 97}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

Jak si poradíme s $\int \frac{102x - 97}{x^2 - 3x + 2} dx$?

Myšlenka: Pokud to jde, rozložit rac. lom. fci $\frac{102x - 97}{x^2 - 3x + 2}$ na součet zlomků s polynomy prvního stupně ve jmenovateli.

Příklad:
$$\frac{102x - 97}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-5}{x - 1} + \frac{107}{x - 2}$$

pro výpočet rozkladu a $\int R(x) dx$ viz externí zdroj

Rozklad racionální (lomené) funkce

Omezení: Budeme se zabývat jen takovými funkcemi $R = P/Q$, kde polynom Q je rozložitelný takto

$$Q(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_m)^{r_m}(x^2 + px + q)^{r_0}, \quad (1)$$

přičemž $a_0, p, q, \alpha_i \in \mathbb{R}$, kde $i = 1, \dots, m$, a každý z exponentů $r_j, j = 1, \dots, m$, je roven buď nule, nebo nějakému přirozenému číslu, a konečně exponent r_0 je roven buď 0 nebo 1, kdy v druhém případě má polynom $x^2 + px + q$ dva komplexní kořeny s nenulovou imaginární částí.

Poznámka: Výraz (1) tedy může nabývat speciálních tvarů, např. $Q(x) = x - 3$, $Q(x) = (x - 3)^4$, $Q(x) = -8(x - 3)(x + 7)^3$, $Q(x) = 5x^2 - 10x + 20 = 5(x^2 - 2x + 4)$.

Věta: Racionální (lomenou) funkci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $\text{st } P < \text{st } Q$ a $r_0 = 0$ nebo $r_0 = 1$ (viz Omezení na předchozí straně)

$$Q(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_m)^{r_m}(x^2 + px + q)^{r_0},$$

Ize jednoznačně rozložit na součet zlomků (nazývaných
parciální zlomky

$$R(x) = \frac{A_{1,1}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,r_1}}{(x - \alpha_1)^{r_1}} + \dots \quad (2)$$
$$+ \frac{A_{m,1}}{x - \alpha_m} + \frac{A_{m,2}}{(x - \alpha_m)^2} + \dots + \frac{A_{m,r_m}}{(x - \alpha_m)^{r_m}} + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q},$$

kde $A_{i,j}, B, C \in \mathbb{R}$.

Označme R_{rozklad} pravou stranu (2).

Důsledek věty: Výpočet $\int R(x) dx$ se převede na lineární kombinaci členů

$$\int \frac{1}{x - \alpha} dx = \ln |x - \alpha| + \widehat{C},$$
$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^k} dx = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x - \alpha)^{k-1}} + \widehat{C},$$
$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx = \text{složitější: výrazy s } \ln \text{ a } \arctg.$$

Myšlenka: Z rozkladu (1) polynomu Q dostaneme přesný tvar rozkladu (2) funkce R . Neznáme koeficienty $A_{i,j}$, B , C získáme vyřešením soustavy lin. algebr. rovnic odvozených

- ▶ ze srovnání koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnosti $P(x) = R(x)Q(x) = R_{\text{rozklad}}Q(x)$
- ▶ nebo vyčíslením $P(x) = R_{\text{rozklad}}Q(x)$ ve zvolených hodnotách x (výhodné je volit např. kořeny polynomu Q).

Příklady: viz externí zdroj