

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Neurčitý integrál
 - ▶ Speciální substituce

M. Kočandrllová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, oddíl III,
kapitola 4

Text doc. A. Nekvindy

<http://mat.fsv.cvut.cz/nales/prednasky2/kniha.pdf>
od strany 17 (hodně řešených příkladů)

Připomenutí minulé látky

Zabývali jsme se výpočtem neurčitého integrálu funkcí tvaru

$g = \frac{f'}{f}$ a $R = \frac{P}{Q}$, kde P a Q jsou polynomy (R je racionální lomená funkce).

Dnes budeme pokračovat — pro skupiny speciálně definovaných funkcí zavedeme odpovídající speciální substituce. Výchozí integrál se po substituci stane integrálem racionální lomené funkce.

Značení: $R(x, z) =$ podíl polynomů proměnných x a z .

Příklad: Necht' $R(x, z) = \frac{x^2 + 3xz - z^3}{2x + z + 8}$. Pak

$$R(x, \sqrt[n]{ax + b}) = \frac{x^2 + 3x\sqrt[n]{ax + b} - (\sqrt[n]{ax + b})^3}{2x + \sqrt[n]{ax + b} + 8}.$$

Integrand tvaru $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

hodnoty $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ musejí mít dobrý smysl.

Doporučená substituce:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \quad \text{tj. } x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}.$$

Příklad: viz externí zdroj

Integrand tvaru $R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Zobecnění předchozího, kde $R(x, y, z)$ je podíl dvou polynomů proměnných x, y, z , přičemž dosazujeme

$$y = \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{a} \quad z = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Doporučená substituce:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^r,$$

kde r je **nejmenší společný násobek čísel p a q** .
Např. $p = 12$, $q = 8$, pak $r = 24$.

Příklad: viz externí zdroj

Integrand tvaru $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$

Substitute

$$\sin x = t \Rightarrow x = \arcsin t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$$

Příklad: viz externí zdroj

Integrand tvaru $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$

Substituce

$$\cos x = t \Rightarrow x = \arccos t \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$$

Příklad: viz externí zdroj

Integrand tvaru $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$

Často je funkce R tvořena sudými mocninami $\cos x$ a $\sin x$.

Substitute (na intervalu vhodném pro x , viz (1))

$$t = \operatorname{tg} x, \quad \text{kde } x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi) \text{ pro } k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Z (1) odvodíme

$$1 + t^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (2)$$

Pomocí (2) vyjádříme (pro $\cos x$ a $\sin x$ odmocníme)

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Nakonec z $x = \operatorname{arctg} t$ dostaneme $dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$.

Příklad: viz externí zdroj

Integrand tvaru $R(\cos x, \sin x)$

Substituce

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \text{kde } t \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \text{ pro } k \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

je univerzální pro tento typ funkcí, ale často vede ke složitější integraci než speciální substituce uvedené výše.

Z (3) odvodíme

$$1 + t^2 = 1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}. \quad (4)$$

Pomocí (4) vyjádříme

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad (5)$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}. \quad (6)$$

Využijeme vztahy pro dvojnásobný úhel:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad (7)$$

$$\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}. \quad (8)$$

Poznámka: Je sice $\sqrt{t^2} = |t|$, avšak bližší rozbor (stačí např. dosadit do pravé strany (8) za t) by ukázal, že (8) skutečně platí bez absolutní hodnoty.

Jest $x = 2 \operatorname{arctg} t$, odtud pak vztahy (7) a (8) doplníme o

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Příklad: viz externí zdroj

Integrand tvaru $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$, $a > 0$ konst.

Substituce

$$x = a \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{nebo} \quad x = a \cos t, \quad t \in (0, \pi)$$

a její smysl

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a \cos t.$$

Příklad: viz externí zdroj

Integrand tvaru $R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$, $a > 0$ konst.

Substituce

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{nebo} \quad x = a \operatorname{cotg} t, \quad t \in (0, \pi)$$

a její smysl

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = a \sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}.$$

Příklad: viz externí zdroj