

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Určitý integrál
 - ▶ Newtonův-Leibnizův vzorec
 - ▶ metoda integrace po částech (per partes)
 - ▶ substituce

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, oddíl III,
kapitoly 1 a 2

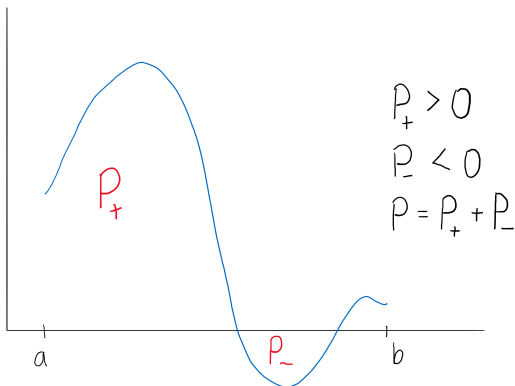
Text doc. A. Nekvindy

<http://mat.fsv.cvut.cz/nales/prednasky2/kniha.pdf>
od strany 35 (příklady od strany 39)

Souvislost s minulou látkou

K dané funkci f umíme (ne vždy) najít takovou **funkci** F , že $F'(x) = f(x)$ pro všechna x z nějakého intervalu I .

Dnes se ukáže, že znalost funkce F nám pomůže vyřešit i jinou úlohu, totiž **určit velikost plochy vymezené grafem funkce f na intervalu $[a, b]$ a souřadnou osou, na níž interval $[a, b]$ leží.**



Určitý integrál

Definice: Necht' funkce F je nějaká primitivní funkce k funkci f na intervalu $[a, b]$. Pak **číslo**

$$\int_a^b f(x) \, dx \stackrel{\text{def}}{=} F(b) - F(a) \quad (1)$$

se nazývá **určitý (Newtonův) integrál** z funkce f od a (**dolní mez**) do b (**horní mez**) nebo na intervalu $[a, b]$.

- ▶ Někdy zdůrazněno (N) $\int_a^b f(x) \, dx$
- ▶ Zavádí se symbol $[F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a)$
- ▶ Vztahu (1) se též říká **Newtonova-Leibnizova formule** (N.-L. vzorec)
- ▶ Souvislost s plochou prozatím nejasná

Isaac Newton, 1643–1727; Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716

Newtonův integrál – existence

Symbolem $C(I)$ budeme značit množinu všech spojitých funkcí na intervalu I se zavedeným sčítáním funkcí a násobením funkcí reálnými čísly (je to dokonce vektorový prostor).

Věta o existenci N. integrálu: Jestliže je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, tj. $f \in C([a, b])$, pak existuje

Newtonův integrál $\int_a^b f(x) dx$.

Je to jen postačující podmínka. Např. funkce $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ není prvkem $C([0, 1])$, ale přesto

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x}]_0^1 = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1.$$

Newtonův integrál – vlastnosti I

1) $\int_a^b f(x) dx$ nezávisí na výběru primitivní funkce.

Důkaz: Nechť F a G jsou na intervalu $[a, b]$ dvě primitivní funkce k funkci f . Pak $G(x) = F(x) + C \forall x \in [a, b]$, kde $C \in \mathbb{R}$. Platí

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

2) *Linearita.* Nechť $f, g \in C([a, b])$, pak platí

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Poznámka: Obecně $\int_a^b f(x)g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$!

Newtonův integrál – vlastnosti II

3) Monotonie. Jestliže pro $f, g \in C([a, b])$ platí $f(x) \leq g(x)$

$\forall x \in [a, b]$, pak $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Jestliže navíc existuje bod $x_0 \in [a, b]$, v němž je $f(x_0) < g(x_0)$,

pak $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$.

Důsledek: $f \in C([a, b])$,

$f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Obdobně $f(x) > 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$

4) $f \in C([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \int_a^a f(x) dx = 0$

Newtonův integrál – vlastnosti III

5) Necht' $f \in C([a, b])$ a $c \in [a, b]$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(neboť $F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a)$).

6) $f \in C([a, b]) \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Důkaz: Z nerovností $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ a z monotonie 3) plyne

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx. \text{ Odtud už dostáváme}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

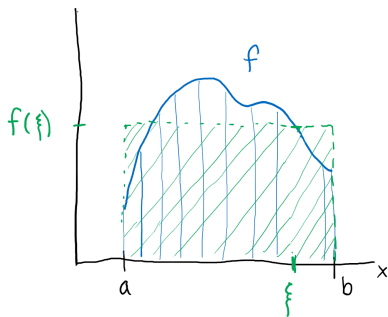
7) Je-li $f \in C([-a, a])$ sudá, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;

je-li lichá, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$. (Bude zřejmé později.)

Newtonův integrál – vlastnosti IV

Věta o střední hodnotě: Je-li $f \in C([a, b])$, pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$



$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

obdélník

Základní metody výpočtu $\int_a^b f(x) dx$

Integrace po částech (per partes)

Nechť funkce $u' = u'(x)$ a $v' = v'(x)$ jsou spojité na intervalu $[a, b]$ (tedy i funkce u a v jsou spojité na $[a, b]$). Pak platí

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx,$$

kde $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Příklad: viz externí zdroj

Substituční metoda: Předpoklady

- ▶ Funkce $f = f(x)$ je spojitá na intervalu $[a, b]$
- ▶ Funkce $\varphi = \varphi(t)$ má v intervalu $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci $\varphi' = \varphi'(t)$ a φ zobrazuje interval $[\alpha, \beta]$ na interval $[a, b]$

Potom platí (substituce $x = \varphi(t)$)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

kde $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. **Transformace mezí!**

Poznámka: Není zapotřebí monotonie funkce φ (není zapotřebí použít inverzní funkci).

Substituce $h(x) = z$: Nechť $f(x) = g(h(x))h'(x)$, kde $h'(x)$ a $g(h(x))$ jsou spojitě v $[a, b]$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(h(x))h'(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g(z) dz.$$

Jak (ne)počítat

Správný postup

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} s = \cos x \\ ds = -\sin x \, dx \\ x = 0 \Rightarrow s = 1 \\ x = \pi/2 \Rightarrow s = 0 \end{array} \right| \\ &= - \int_1^0 (1 - s^2) \, ds = \int_0^1 (1 - s^2) \, ds = 1 - \left[\frac{1}{3} s^3 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Správný, ale těžkopádnější postup s pomocným výpočtem primitivní funkce použitým na místě $\stackrel{*}{=}$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx \stackrel{*}{=} \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\pi/2} = 0 - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

Pomocný výpočet

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} s = \cos x \\ ds = -\sin x \, dx \end{array} \right| \\ &= - \int (1 - s^2) \, ds = -s + \frac{1}{3} s^3 = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x. \end{aligned}$$

Nesprávný postup, který sice vede ke správnému výsledku, ale u zkoušky nebude akceptován:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} s = \cos x \\ ds = -\sin x \, dx \end{array} \right| \\ &\stackrel{*}{=} - \int_0^{\pi/2} (1 - s^2) \, ds = - \left[s - \frac{1}{3} s^3 \right]_0^{\pi/2} \\ &\stackrel{*}{=} - \left[\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\pi/2} = -(0 - 0 - (1 - 1/3)) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

V místech označených $\stackrel{*}{=}$ rovnosti neplatí, protože sice došlo ke změně proměnné, ale nedošlo k transformaci intervalu, na němž se integruje. Návratem k původní proměnné x se vyrušily účinky dvou chyb, jsme vlastně v situaci z předchozí stránky.

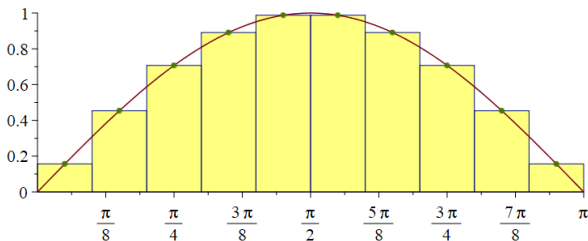
Modifikace předchozího nesprávného postupu, při níž řešitel naznačuje, že se vrátí k výchozí proměnné, ani tento způsob nebude akceptován:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} s = \cos x \\ ds = -\sin x \, dx \end{array} \right| \\&= - \int_{\dots}^{\dots} (1 - s^2) \, ds = - \left[s - \frac{1}{3} s^3 \right]_{\dots}^{\dots} \\&= - \left[\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\pi/2} = -(0 - 0 - (1 - 1/3)) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Riemannův integrál

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), německý matematik

Jeho definice určitého integrálu je přímo založena na pojetí určitého integrálu $\int_a^b f(x) dx$ jako obsahu plochy vymezené grafem integrované funkce a intervalem $[a, b]$.

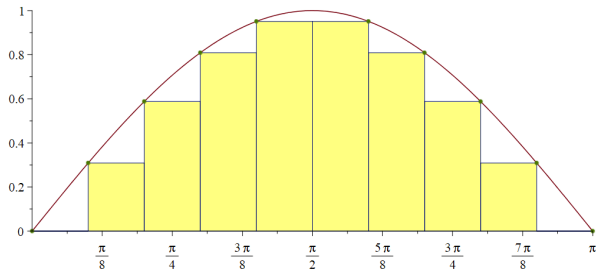


A midpoint Riemann sum approximation of $\int_0^{\pi} f(x) dx$,

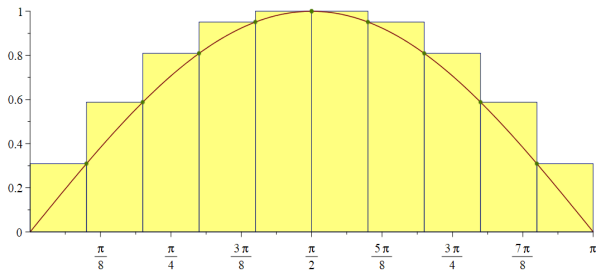
where $f(x) = \sin(x)$ and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 2.008248409.

Number of subintervals used: 10.

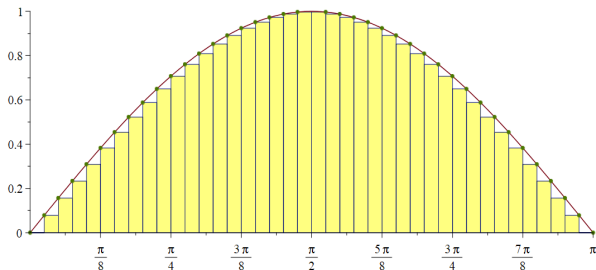
Přibližná
hodnota:
1.669364272



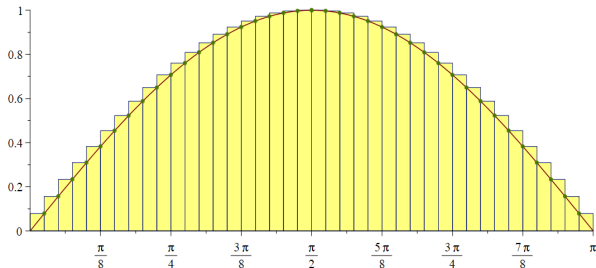
Přibližná
hodnota:
2.297682803



Přibližná
hodnota:
1.920431996



Přibližná
hodnota:
2.077511627



Riemannův integrál – nástin myšlenky

Funkce f omezená na intervalu $[a, b]$. Ten rozdělen na n dílů $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Body dělení označme $D_n = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.

V každém intervalu zvolme bod $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Označme $S(D_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Uvažujme posloupnost různých dělení $\{D_n\}_{n \rightarrow \infty}$ takovou, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{i=1,2,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) \right) = 0 \text{ (konvergující dělení).}$$

Jestliže posloupnost $\{S(D_n)\}_{n \rightarrow \infty}$ je konvergentní, její limitu označme R_{D_n} .

Jestliže pro všechna konvergující dělení a libovolně zvolené vybrané body ξ_i dostaneme stejnou limitu R_{D_n} , nazveme ji Riemannovým integrálem funkce f od a do b a označíme

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \text{případně} \quad (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Riemannův integrál – existence, vztah k Newt. int.

Věta: Necht' funkce f je na intervalu $[a, b]$ omezená a spojitá s výjimkou nejvýše konečně mnoha bodů. Pak existuje

$$(R) \int_a^b f(x) dx.$$

Věta: Jestliže pro funkci f existuje jak Newtonův, tak

$$\text{Riemannův integrál, pak } (R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz (pro f spojitou): Mějme dělení $\widehat{D}_n$ intervalu $[a, b]$. Z věty o střední hodnotě víme, že existují body $\widehat{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$(N) \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(\widehat{\xi}_i)(x_i - x_{i-1}) = S(\widehat{D}_n). \quad (2)$$

Necht' $\{\widehat{D}_n\}_{n \rightarrow \infty}$ je konvergující posloupnost dělení, pak pro každé dělení $\widehat{D}_n$ z této posloupnosti platí $S(\widehat{D}_n) = (N) \int_a^b f(x) dx$ (body $\widehat{\xi}_i$ dány větou o stř. h.).

Víme, že $(R) \int_a^b f(x) dx$ existuje, tj. pro libovolná konvergující dělení

$\{D_n\}_{n \rightarrow \infty}$ a libovolné výběry ξ_i je $\lim_{n \rightarrow \infty} \{S(D_n)\} = (R) \int_a^b f(x) dx$, tedy i pro $\{\widehat{D}_n\}_{n \rightarrow \infty}$. Tudíž $\lim_{n \rightarrow \infty} \{S(\widehat{D}_n)\} = (R) \int_a^b f(x) dx \stackrel{(2)}{=} (N) \int_a^b f(x) dx$.