

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ funkce více proměnných
 - ▶ definiční obor
 - ▶ obor hodnot
 - ▶ spojitost
 - ▶ vrstevnice
 - ▶ parciální derivace

Literatura:

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, str. 167–170, 179–185

Elektronická skripta doc. A. Nekvindy, přednáška 7 (od strany 59), odkaz na webové stránce MM2G přednášejícího.

V prezentaci budou odkazy, např. [N60] odkazuje na stranu 60.

Pro porozumění matematickým zápisům:

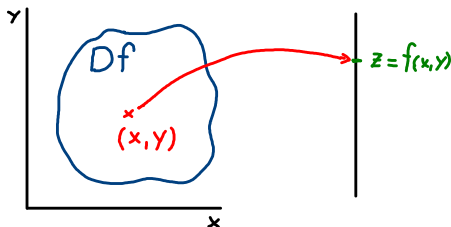
https://mat.fsv.cvut.cz/chleboun/JCh_vyuka/Vysv_pojmu.pdf

Funkce více proměnných

Funkce dvou proměnných $f : (x, y) \mapsto z \in \mathbb{R}$, kde $[x, y] \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$, přičemž $\mathcal{D}_f$ je **definiční obor funkce** f (často maximální množina, kde je f „rozumně“ definovaná).

Příklad: $f(x, y) = \ln(xy)$

$$\mathcal{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (-\infty, 0) \times (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \times (0, \infty)\}$$



Funkce tří proměnných $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$, kde $[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$
a $\omega \in \mathbb{R}$.

Obdobně pro funkce n proměnných.

Poznámka: Někdy se rozlišuje (ve skriptech):

$\mathbb{R}^2$ — uspořádané dvojice reálných čísel (bez definované vzdálenosti),

$\mathbb{E}_2$ — uspořádané dvojice reálných čísel se vzdáleností **dist** definovanou předpisem

$$\text{dist}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

obdobně pro $\mathbb{E}_3$.

My zjednodušíme: $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{E}_2$, $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{E}_3$ a $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{E}_n$.

Definice: **Oborem hodnot funkce** f n proměnných je množina

$$H_f = \{z \in \mathbb{R} : w = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathcal{D}_f, z = f(w)\}.$$

Příklad: $f(x, y) = \ln(xy)$, $H_f = \mathbb{R}$

Definice: **Grafem funkce** f dvou proměnných je množina

$$G_f = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \mathcal{D}_f, z = f(x, y) \right\},$$

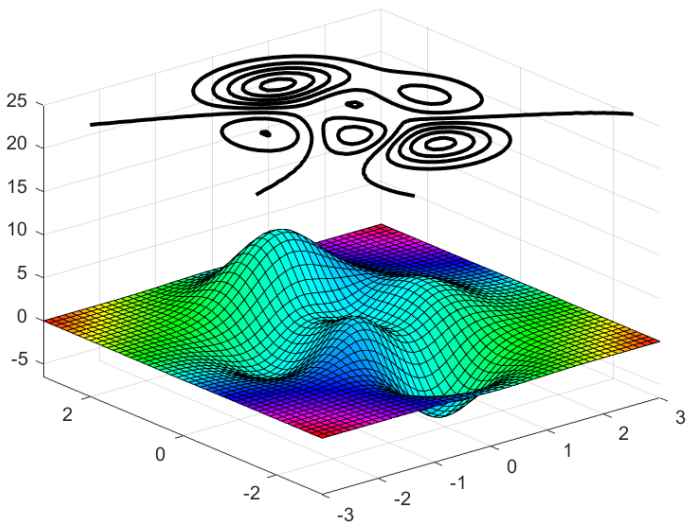
(obecně viz [N59]).

Definice: **Vrstevnice** o výšce (kótě) $h \in \mathbb{R}$ je množina

$$V_h = \{[x, y] \in \mathcal{D}_f : f(x, y) = h\},$$

kde f je funkce dvou proměnných.

Ilustrace ke grafu funkce dvou proměnných s definičním oborem $\mathcal{D}_f = [-3, 3] \times [-3, 3]$ a s oborem hodnot $H_f = [-5, 6, 7, 6]$.



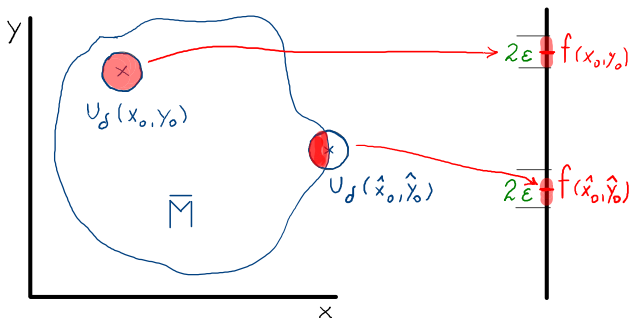
Spojitosť funkce více proměnných

Definice: Řekneme, že funkce $f = f(x, y)$ je spojitá v bodě $[x_0, y_0] \in M$ vzhledem k množině M (M je obvykle $\mathcal{D}_f$), jestliže

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall [x, y] \in U_\delta(x_0, y_0) \cap M \text{ platí } |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

kde $U_\delta(x_0, y_0) = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\}$.

Poznámka: Obdobně pro více proměnných. Definice v [N63] je formulována jinak, ale ekvivalentně, viz prezentace str. 18.



Stejně jako u funkce jedné proměnné řekneme, že funkce f více proměnných je **spojitá v (na) množině M** , jestliže je spojitá v každém bodě množiny M .

Také platí, že máme-li funkce f a g spojitě v bodě $[x_0, y_0]$, pak **$f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g (má-li podíl smysl) jsou funkce spojitě v bodě $[x_0, y_0]$, a že **složení spojitých funkcí je spojitá funkce**. Podrobněji [N63].**

Limita funkce dvou proměnných

Prstencové okolí bodu $[x_0, y_0]$:

$$U'_\delta(x_0, y_0) = U_\delta(x_0, y_0) \setminus \{[x_0, y_0]\}.$$

Připomenutí: Bod $A \in \mathbb{R}^2$ se nazývá **hromadný bod** množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, jestliže $\forall \delta > 0 \ U_\delta(A) \cap M \neq \emptyset$.

Definice: Řekneme, že **funkce f má v bodě $A = [x_0, y_0]$** , jenž je hromadným bodem def. oboru $\mathcal{D}_f$, **limitu $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$** , jestliže ke každému okolí $U_\varepsilon(\alpha)$ existuje prstencové okolí $U'_\delta(A)$ takové, že pro každý bod $X \in U'_\delta(A) \cap \mathcal{D}_f$ je $f(X) \in U_\varepsilon(\alpha)$.

Píšeme $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \alpha$.

Jinými slovy: pro každou posloupnost $[x_m, y_m] \rightarrow A$, kde $m \rightarrow \infty$, je $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m, y_m) = \alpha$.

Důsledek: Jiná definice spojitosti — o funkci f řekneme, že je **spojitá v bodě $A \in \mathcal{D}_f$** , jestliže $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$.

Příklady: Pro $[x, y] \rightarrow [0, 0]$ funkce $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ a $\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ nemají

limitu, viz [N62]. Zkuste posloupnosti $[h_n, 0]$, $[0, h_n]$ a $[h_n, h_n]$, $[h_n, h_n^2]$, kde $h_n \rightarrow 0$. Konvergují k $[0, 0]$, ale limity funkcí jsou 1 a -1 (první f.) a 0 a $1/2$ (druhá f.).

Parciální derivace funkcí dvou proměnných

Definice: Buď dána funkce f a její definiční obor $\mathcal{D}_f$. Necht' v bodě $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}_f$ existuje okolí $U_\delta(x_0, y_0) \subset \mathcal{D}_f$. Jestliže existuje **vlastní limita**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

pak ji nazveme **parciální derivací prvního řádu funkce**
 $z = f(x, y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ a označíme $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Poznámka: Jiná značení $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$,
 $f'_x(x_0, y_0)$, $z_x(x_0, y_0)$, $z'_x(x_0, y_0)$.

Zcela obdobně pro y : ... Jestliže existuje **vlastní limita**

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \kappa) - f(x_0, y_0)}{\kappa},$$

pak ... podle y ... a označíme $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Derivace vyšších řádů získáme opakovaným derivováním funkcí $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$. Derivujme např. $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$, dostaneme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. Nebo dle y , dostaneme smíšenou derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Derivace funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ dává smíšenou derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Poznámka: Pořadí symbolů u smíšených derivací není v literatuře jednotné. Někteří autoři značí derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ dle y takto $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ a derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$ dle x takto $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$. Na pořadí však obvykle nezáleží – viz záměnnost derivací (později).

Vyšší derivace: Např. třetího řádu $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)$ (nejdříve podle x , pak dvakrát podle y).

Zcela analogicky jsou definovány parciální derivace funkcí tří a více proměnných.

$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^\ell \partial z^m}$ je parciální derivace n -tého řádu vzniklá derivováním k -krát podle x , ℓ -krát podle y a m -krát podle z , kde k, ℓ, m a n jsou přirozená čísla a $n = k + \ell + m$.

Při derivování funkcí více proměnných postupujeme stejně jako u funkcí jedné proměnné, neboť ty proměnné, podle nichž se momentálně nederivuje, považujeme za konstanty.

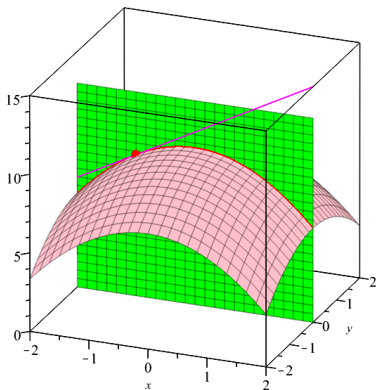
Příklad: viz externí zdroj

Záměnnost smíšených parciálních derivací

Věta: Jestliže jsou parciální derivace funkce $f = f(x, y)$ spojité do n -tého řádu včetně na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^2$, pak smíšené derivace až do řádu n jsou na množině M záměnné. (Obdobně pro $f = f(x, y, z)$ atd.)

Například tedy
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Význam parciální derivace: Derivace funkce jedné proměnné, která vznikne tak, že hodnoty proměnných, podle nichž se nederivuje, jsou pevné, zbude tedy jediná volná proměnná.



Příklad:

Funkci $f(x, y) = 10 - x^2 - \frac{2}{3}y^2$ derivujeme v bodě $[-1, 0]$ podle x .

Dostaneme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x$, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 0) = 2.$$

Totéž jako $g(x) = f(x, 0) = 10 - x^2$
a derivace

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(10 - x^2) = -2x.$$