

Dnešní látka

- ▶ Funkce více proměnných II
 - ▶ totální diferenciál
 - ▶ Taylorův polynom
 - ▶ derivace v orientovaném směru
 - ▶ derivace implicitně definované funkce

Literatura:

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, str. 167–170, 179–185

Text doc. A. Nekvindy

<http://mat.fsv.cvut.cz/nales/prednasky2/kniha.pdf>

přednáška 7, téma 11 a další (od strany 64

V prezentaci budou odkazy, např. [N67] odkazuje na stranu 67

Pro porozumění matematickým zápisům:

https://mat.fsv.cvut.cz/chleboun/JCh_vyuka/Vysv_pojmu.pdf

Totální diferenciál

Definice (pro funkci dvou proměnných): Necht' $f = f(x, y)$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ a reálná čísla h, k jsou taková, že $(x_0 + h, y_0 + k) \in \mathcal{D}_f$. Jestliže platí

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \omega(h, k),$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ nezávisejí na h, k a funkce $\omega = \omega(h, k)$ splňuje

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

pak řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě (x_0, y_0)** a výraz $df(x_0, y_0)(h, k) = Ah + Bk$ nazýváme **totálním diferenciálem prvního řádu funkce f v bodě (x_0, y_0)** .
Funkce n proměnných viz [N65].

Připomeňme, co znamená dvojná limita $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$.

Matematickým zápisem

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, 0 < h^2 + k^2 < \delta,$$

$$\text{platí } -\varepsilon < \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} < \varepsilon.$$

Jinými slovy: Jestliže se vektor (h, k) blíží k vektoru $(0, 0)$ (a to jakýmkoli způsobem), pak se hodnoty $\frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ blíží k nule.

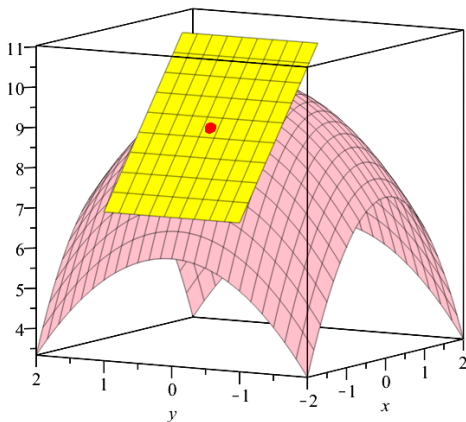
Důsledkem je, že se i hodnoty $\omega(h, k)$ blíží k nule, avšak „rychleji“ než $\sqrt{h^2 + k^2}$.

Co znamená $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \omega(h, k)$?

V (malém) okolí bodu (x_0, y_0) lze hodnoty funkce f dobře aproximovat jednoduchým vztahem $f(x_0, y_0) + Ah + Bk$, jde vlastně o tečnou rovinu. Tj.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + Ah + Bk,$$

dopustíme se (pro malá h, k) malé chyby $\omega(h, k)$.



Jiné zápisy totálního diferenciálu:

$$df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

$$df(x_0, y_0)(h, k) = Ah + Bk,$$

$$df(x_0, y_0)(dx, dy) = A dx + B dy$$

Věta: Je-li funkce f diferencovatelná (tj. má totální diferenciál)

v bodě (x_0, y_0) , pak existují $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ a platí

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Neboť $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = A + \frac{B \cdot 0}{h} + \frac{\omega(h, 0)}{|h|}$. Máme $\frac{B \cdot 0}{h} = 0$.

Jestliže $h \rightarrow 0$, pak $\frac{\omega(h, 0)}{|h|} \rightarrow 0$, tudíž

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A.$$

Tedy stručně – z diferencovatelnosti (tj. existence tot. dif.) plyne existence prvních parciálních derivací. Co platí obráceně?

Věta: Nechť funkce $f(x, y)$ je definovaná pro všechny dvojice $(x, y) \in G$, kde G je otevřená množina (tj. každý její bod má okolí, které celé leží v G). Nechť dále parc. derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ existují a jsou spojité v G . Pak f má totální diferenciál v každém bodě G . (Koeficienty A, B jsou tudíž rovny parc. derivacím.)

Věta platí obecně. Například pro funkci f tří proměnných se spojitými prvními parciálními derivacemi je totální diferenciál prvního řádu dán rovností

$$df(x_0, y_0, z_0)(dx, dy, dz) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)dz.$$

Příklad užití tot. dif.: dopad malých změn vstupních hodnot

Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $\frac{\sqrt[4]{0,97}}{1,02^3 \sqrt[3]{0,99}}$.

Řešení: Zaved'me funkci $f(x, y, z) = \frac{x^{1/4}}{y^3 z^{1/3}}$ a body (veličiny)

$$\begin{aligned}x_0 &= 1, & y_0 &= 1, & z_0 &= 1, \\x_1 &= 0,97, & y_1 &= 1,02, & z_1 &= 0,99, \\dx &= -0,03, & dy &= 0,02, & dz &= -0,01.\end{aligned}$$

Dle předchozího

$$\begin{aligned}f(x_1, y_1, z_1) &\approx f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0)(dx, dy, dz) \\&= f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)dx \\&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)dz.\end{aligned}$$

Jest $f(x_0, y_0, z_0) = f(1, 1, 1) = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$,
pokračujeme výpočtem a vyčíslením parciálních derivací

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{x_0^{-3/4}}{4y_0^3 z_0^{1/3}} = \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = -3 \frac{x_0^{1/4}}{y_0^4 z_0^{1/3}} = -3 \frac{1}{1 \cdot 1} = -3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \frac{x_0^{1/4}}{-3y_0^3 z_0^{4/3}} = \frac{1}{-3 \cdot 1 \cdot 1} = -\frac{1}{3}.$$

Dosazením zjistíme

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1) &= \frac{\sqrt[4]{0,97}}{1,02^3 \sqrt[3]{0,99}} \approx 1 + \frac{1}{4}(-0,03) - 3 \cdot 0,02 - \frac{1}{3}(-0,01) \\ &= 0,93583333, \end{aligned}$$

přímý výpočet kalkulačkou $f(x_1, y_1, z_1) = 0,9383121791$.

Tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných

Z geometrického významu totálního diferenciálu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a z rovností $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ plyne, že **rovnice tečné roviny** ϱ ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Odtud **normálový vektor grafu funkce f** v bodě T :

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right),$$

neboť ϱ tvoří všechny body $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ takové, že $(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \perp \vec{n}$.

Příklad: Určíme tečnou rovinu ϱ grafu funkce

$f(x, y) = -3 + x^2 y^3 + x + y$ v bodě $T = [2, 1, f(2, 1)]$
a normálový vektor roviny ϱ .

Řešení: $x_0 = 2, y_0 = 1, f(x_0, y_0) = f(2, 1) = -3 + 4 + 2 + 1 = 4$,
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 y_0^3 + 1 = 5, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3x_0^2 y_0^2 + 1 = 13$.

Tečná rovina ϱ : $5(x - 2) + 13(y - 1) - (z - 4) = 0$, po úpravě
 $5x + 13y - z - 19 = 0$.

Normálový vektor $\vec{n}_\varrho = (5, 13, -1)$ (a samozřejmě jeho
libovolný nenulový násobek).

Totální diferenciál druhého řádu

Definice: Necht' $z = f(x, y)$ má v okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ totální diferenciál a necht' parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ mají totální diferenciál v bodě A . Pak říkáme, že $f(x, y)$ má v bodě A **totální diferenciál druhého řádu** (druhý diferenciál), tím rozumíme výraz

$$d^2z = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

místo h, k často dx, dy , místo d^2z též např. $d^2f_A(h, k)$.

(In)definitnost druhého diferenciálu

Přepišme druhý diferenciál (bez uvádění (x_0, y_0) a se symboly f_{xx} , f_{xy} a f_{yy} pro parciální derivace) takto

$$d^2 f_A(h, k) = f_{xx} \left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k \right)^2 + \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}} k^2.$$

1. $\forall (h, k) \neq \vec{0} \quad d^2 f_A(h, k) > 0 \iff f_{xx} > 0 \text{ a } f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
2. $\forall (h, k) \neq \vec{0} \quad d^2 f_A(h, k) < 0 \iff f_{xx} < 0 \text{ a } f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
3. $\exists$ dvojice (h, k) taková, že $d^2 f_A(h, k) > 0$, a $\exists$ dvojice $(\hat{h}, \hat{k})$ taková, že $d^2 f_A(\hat{h}, \hat{k}) < 0 \iff f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

Tyto tři případy (po řadě): $d^2 f_A(h, k)$ je **pozitivně definitní**, **negativně definitní** a **indefinitní**.

Totální diferenciály vyšších řádů

Definice: Necht' funkce $z = f(x, y)$ a všechny její parciální derivace do $(n - 2)$ -ho řádu mají v okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ totální diferenciál a necht' parciální derivace $(n - 1)$ -ho řádu mají totální diferenciál v bodě A . Pak říkáme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě A **totální diferenciál n -tého řádu** (n -tý diferenciál), tím rozumíme výraz

$$d^n z = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y)|_{(x_0, y_0)},$$

místo h, k často dx, dy .

Taylorův polynom 2. stupně

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má v každém bodě úsečky q spojující body $[x_0, y_0]$ a $[x_0 + h, y_0 + k]$ totální diferenciály do 3. řádu včetně. Pak

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y)|_{(x_0, y_0)} \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y)|_{(x_0, y_0)} + R_3, \\ \text{kde } R_3 &= \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(x, y)|_{(\hat{x}, \hat{y})} \end{aligned}$$

a bod $[\hat{x}, \hat{y}] \in q$.

Modře označený kvadratický polynom v proměnných h a k se nazývá Taylorův polynom 2. stupně a značíme ho $T_2(h, k)$, výrazu R_3 říkáme Lagrangeův tvar zbytku.

Příklad: Taylorův polynom 2. stupně funkce

$$f(x, y) = \sin(x^2 + 2y^2) + 1 + \ln(10 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2)$$

v bodě $A = [x_0, y_0] = [0, 0]$.

$$f(0, 0) = 1 + \ln 12,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \left(2x \cos(x^2 + 2y^2) + \frac{2x - 2}{10 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2} \right) \Big|_{(0,0)} \\ &= -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \left(4y \cos(x^2 + 2y^2) + \frac{2y - 2}{10 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2} \right) \Big|_{(0,0)} \\ &= -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \dots = \frac{77}{36}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \dots = \frac{149}{36},$$

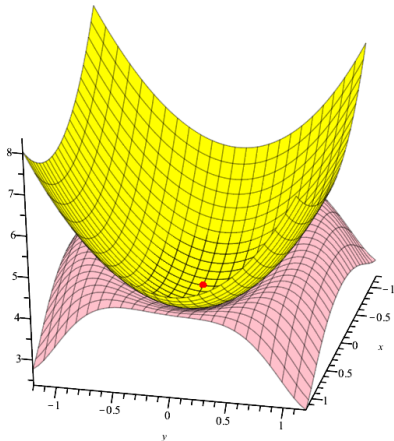
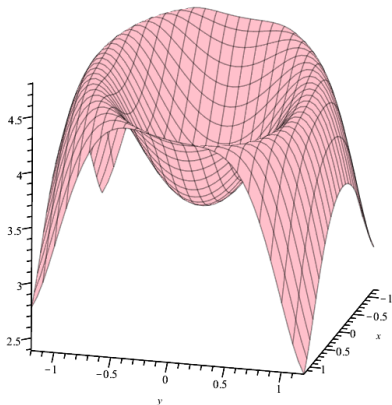
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \dots = -\frac{1}{36}$$

Pro funkci

$f(x, y) = \sin(x^2 + 2y^2) + 1 + \ln(10 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2)$ v bodě $A = [x_0, y_0] = [0, 0]$ získáme Taylorův polynom 2. stupně (žlutě):

$$T_2(x_0 + h, y_0 + k) = 1 + \ln 12 - \frac{h}{6} - \frac{k}{6} + \frac{77}{72}h^2 - \frac{hk}{36} + \frac{149}{72}k^2,$$

kde $h = x - x_0$ a $k = y - y_0$.



Souvislost mezi spojitostí a diferencovatelností funkce více proměnných

Věta 1: Je-li funkce $f = f(x, y)$ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) , pak f je spojitá v bodě (x_0, y_0) .

Věta 2: Jestliže existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ v nějakém okolí bodu (x_0, y_0) a jsou-li spojitě v bodě (x_0, y_0) , pak funkce $f = f(x, y)$ **je diferencovatelná** v bodě (x_0, y_0) .

Poznámka: Důsledkem věty 2 např. je, že z existence spojitých parciálních derivací funkce f v bodě plyne spojitost funkce f v témže bodě.

K důkazu diferencovatelnosti nám často poslouží věta 2.

Příklad: Necht' $f = f(x, y) = x^2 \sin y$. Pak $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin y$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \cos y$ jsou spojitě funkce v celé rovině $\mathbb{R}^2$, a tudíž funkce f je diferencovatelná v $\mathbb{R}^2$.

Derivace složené funkce dvou proměnných (předpoklad: f, x, y diferencovatelné). Čtěte poznámku na str. 19.

$f(x, y)$, kde $x = x(u, v)$ a $y = y(u, v)$. $\frac{\partial f}{\partial u}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) = ?$

Označme $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $\delta x = x - x_0$, $\delta y = y - y_0$, $[u_0, v_0]$, $[u_0 + \delta u, v_0]$. Pak

$$\begin{aligned} & \frac{f(x(u_0 + \delta u, v_0), y(u_0 + \delta u, v_0)) - f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))}{\delta u} \\ &= \frac{f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) + A(x(u_0 + \delta u, v_0) - x(u_0, v_0))}{\delta u} \\ &+ \frac{B(y(u_0 + \delta u, v_0) - y(u_0, v_0)) + \omega(\delta x, \delta y) - f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))}{\delta u} \\ &= A \frac{x(u_0 + \delta u, v_0) - x(u_0, v_0)}{\delta u} + B \frac{y(u_0 + \delta u, v_0) - y(u_0, v_0)}{\delta u} \\ &+ \frac{\omega(\delta x, \delta y)}{\delta u} \xrightarrow{\delta u \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \end{aligned}$$

využito tot. dif.: $f(x, y) - f(x_0, y_0) = A\delta x + B\delta y + \omega(\delta x, \delta y)$.

Zbývá ukázat, že $\lim_{\delta u \rightarrow 0} \frac{\omega(\delta x, \delta y)}{\delta u} = 0$.

$$\text{Pišme } \frac{\omega(\delta x, \delta y)}{\delta u} = \frac{\omega(\delta x, \delta y)}{\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}} \frac{\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}}{\delta u}.$$

Protože $\delta u \rightarrow 0 \Rightarrow \delta x \rightarrow 0$ a $\delta y \rightarrow 0$, první zlomek vpravo konverguje k nule (viz str. 2). Druhý je omezený, neboť

$$\left| \frac{\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}}{\delta u} \right| = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta u} \right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta u} \right)^2} \\ \xrightarrow{\delta u \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 (u_0, v_0) + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 (u_0, v_0)}.$$

Obdobně bychom odvodili jak

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0),$$

tak analogie pro složené funkce tří a více proměnných.

Poznámka: S výrazy pro $\frac{\partial f}{\partial u}$ a $\frac{\partial f}{\partial v}$ se setkáváme především při derivování blíže neurčené funkce f . Jsou-li vztahy pro f , x a y konkrétně definovány, je obvyklé, že dosazením odvodíme funkci $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ a počítáme $\frac{\partial g}{\partial u}$ a $\frac{\partial g}{\partial v}$.

Derivace dle vektoru $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

Parciální derivace je derivace ve směru souřadných os x , y , případně z .

Nechť funkce f je *diferencovatelná* v bodě (x, y, z) , pak

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu_x, y + tu_y, z + tu_z) - f(x, y, z)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)tu_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)tu_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)tu_z}{t} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\omega(tu_x, tu_y, tu_z)}{t} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)u_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)u_y \\ & \quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)u_z + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(tu_x, tu_y, tu_z)}{t} \\ & \stackrel{\text{viz další str.}}{=} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)}_{\text{grad } f(x, y, z)} \cdot \vec{u} \\ &= \text{grad } f(x, y, z) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Gradient funkce f značíme $\text{grad } f$, též ∇f .

Zbývá vysvětlit, proč $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(tu_x, tu_y, tu_z)}{t} = 0$.

Funkce f je diferencovatelná, tedy

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, \ell \rightarrow 0} \frac{\omega(\overbrace{h, k, \ell}^{tu_x, tu_y, tu_z})}{\sqrt{h^2 + k^2 + \ell^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(tu_x, tu_y, tu_z)}{|t| \underbrace{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}_{\|\vec{u}\|}}. \quad (1)$$

Odtud

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(tu_x, tu_y, tu_z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(tu_x, tu_y, tu_z)}{t \|\vec{u}\|} \|\vec{u}\| = 0 \|\vec{u}\| = 0,$$

protože

$$\frac{|\omega(tu_x, tu_y, tu_z)|}{-|t| \|\vec{u}\|} \leq \frac{\omega(tu_x, tu_y, tu_z)}{t \|\vec{u}\|} \leq \frac{|\omega(tu_x, tu_y, tu_z)|}{|t| \|\vec{u}\|}$$

a limita krajních výrazů je podle (1) rovna 0.

Definice: Necht' funkce f je diferencovatelná v bodě (x, y, z) .
Limitě

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu_x, y + tu_y, z + tu_z) - f(x, y, z)}{t},$$

říkáme **derivace funkce f v bodě (x, y, z) dle vektoru $\vec{u}$** a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y, z).$$

Přitom platí $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y, z) = \text{grad } f(x, y, z) \cdot \vec{u} = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u}$.

Poznámka: Symbol ∇ se jmenuje nabla.

Důležitá poznámka: Zavedli jsme derivaci, v níž vystupuje vektor ne nutně jednotkové délky. To v učebnicích nebývá časté, obvykle se ihned definuje derivace tak, že v ní je vektor upraven na jednotkovou délku, viz str. 23.

Povšimněme si, že když $\vec{w} = c\vec{u}$, kde $c \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x, y, z) &= \text{grad } f(x, y, z) \cdot \vec{w} \\ &= \text{grad } f(x, y, z) \cdot (c\vec{u}) = c \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y, z).\end{aligned}$$

Abychom získali srovnatelnou představu o růstu či klesání funkce v daném směru, bude vhodné uvažovat vektory stejné (jednotkové) délky.

Derivace v **orientovaném** směru vektoru $\vec{u}$, tj. ve směru **jednotkového** vektoru $\vec{s} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{s} = \nabla f(x, y, z) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Poznámka: V případě funkce dvou proměnných je $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$ a postupujeme analogicky.

Příklad: Určete derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ v bodě $[-1, 3]$ v orientovaném směru vektoru $\vec{u} = (3, -4)$.

Řešení: Gradient $\nabla f(x, y) = (2x, -4y)$, $\nabla f(-1, 3) = -(2, 12)$.

Jednotkový vektor $\vec{s} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_2} = \frac{(3, -4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}(3, -4)$.

Derivace v orientovaném směru vektoru $\vec{u}$, tj. derivace dle vektoru $\vec{s}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(-1, 3) = \frac{1}{5}(-2, -12) \cdot (3, -4) = \frac{1}{5}(-6 + 48) = \frac{42}{5}.$$

Maximum a minimum směrové derivace

V kterém (jednotkovém) směru je derivace největší?

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x, y, z) &= \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{s} = \|\nabla f(x, y, z)\| \cdot \|\vec{s}\| \cos \alpha \\ &= \|\nabla f(x, y, z)\| \cos \alpha,\end{aligned}$$

kde α je úhel mezi vektory $\nabla f(x, y, z)$ a $\vec{s}$. Derivace je maximální při $\alpha = 0$, tedy

$$\vec{s} = \frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|}.$$

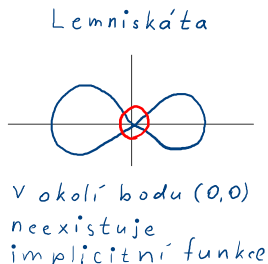
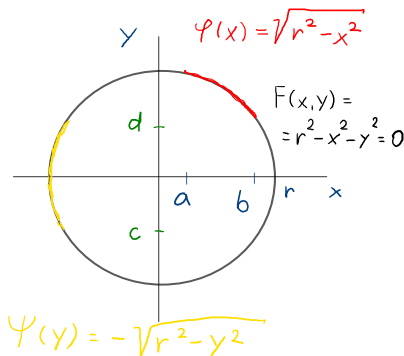
V bodě (x, y, z) vykazuje funkce f největší růst ve směru $\text{grad } f(x, y, z)$.

Největší klesání v opačném směru, tj. $-\text{grad } f(x, y, z)$.

Implicitní funkce

Pokud lze z předpisu $F(x, y) = 0$ odvodit funkci $\varphi = \varphi(x)$ takovou, že na nějakém intervalu $[a, b]$ platí $F(x, \varphi(x)) = 0$, řekneme, že **funkce φ je definována implicitně pomocí $F(x, y) = 0$.**

Obdobně pro funkci $\psi = \psi(y)$, pro niž na intervalu $[c, d]$ platí $F(\psi(y), y) = 0$.



Věta (o implicitní funkci): Předpokládejme, že

1) funkce $F(x, y)$ má spojité obě parciální derivace v nějakém okolí bodu (x_0, y_0) ;

2) $F(x_0, y_0) = 0$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje $\delta > 0$ a jednoznačně určená funkce $y = \varphi(x)$ (implicitní funkce) taková, že $\varphi(x_0) = y_0$ a v intervalu $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $F(x, \varphi(x)) = 0$.

Funkce $y = \varphi(x)$ má v intervalu I_δ spojitou derivaci $y' = \varphi'(x)$ a platí

$$y' = \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \text{ tj. } \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Obměna bodu 3): $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje ... $x = \psi(y)$ a interval $I_{\hat{\delta}} = (y_0 - \hat{\delta}, y_0 + \hat{\delta})$... platí

$x_0 = \psi(y_0)$ a $x' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ a funkce $y = \varphi(x)$ a $x = \psi(y)$ jsou vzájemně inverzní.

Poznámka: Výraz

$$y' = \varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

sice dává matematický vztah pro $y' = \varphi'(x)$, ale mnohdy nejsme schopni vyjádřit $y' = \varphi'(x)$ pomocí elementárních funkcí. Můžeme však vyčíslit derivaci $\varphi'(x_0)$ v bodě x_0 , případně i vyšší derivace funkce φ v x_0 , což pak umožňuje aproximovat implicitně zadanou funkci φ v okolí bodu x_0 např. pomocí Taylorova polynomu.

Poznámka: Podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ nebo $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ je postačující k existenci implicitní funkce, nikoli nutná. Viz například funkci $F(x, y) = y - x^5 = 0$. Jest $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = -5 \cdot 0 = 0$, ale $x = \sqrt[5]{y}$.

Poznámka: Jsou-li navíc všechny parciální derivace funkce F spojité v okolí bodu (x_0, y_0) až do řádu k -tého, existují funkce $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(k)}$ a jsou spojité v okolí bodu x_0 .

Příklad: Funkce $F(x, y) = e^x + x - y - \cos y$ má max. def. obor $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^2$. Bod $A = [0, 0]$ splňuje $F(0, 0) = 0$.

Ověřme předpoklady: 1) F má spojité parc. der. v $\mathcal{D}_F$;

2) již víme, že $F(0, 0) = 0$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = (\sin y - 1)|_{x=0, y=0} = -1 \neq 0$.

Dle věty tedy existuje $\delta > 0$ a jednoznačně určená funkce $y = \varphi(x)$ (implicitní funkce) taková, že $\varphi(0) = 0$ a v intervalu $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $F(x, \varphi(x)) = 0$.

Dle věty je

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)} = \frac{e^x + 1}{1 - \sin y} \Big|_{x=0, y=0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Nyní spočtěme $\varphi''(0)$. Víme, že $y = \varphi(x)$ a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = \frac{e^x + 1}{1 - \sin y}.$$

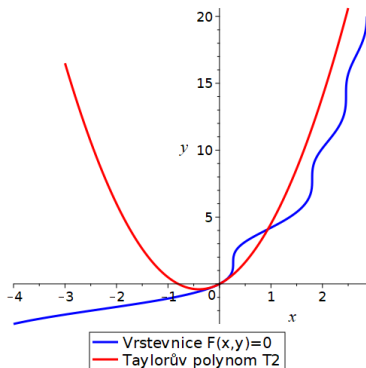
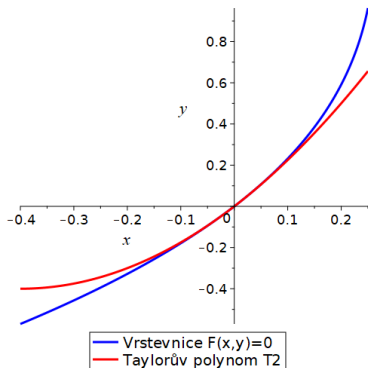
Počítejme (znak ' znamená derivaci dle x ; $y = \varphi(x)$ je funkcí x !!!)

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= (\varphi'(x))' = \frac{(e^x + 1)'(1 - \sin y) - (e^x + 1)(1 - \sin y)'}{(1 - \sin y)^2} \\ &= \frac{e^x(1 - \sin y) - (e^x + 1)(-y' \cos y)}{(1 - \sin(y))^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení $x = 0$, $y = \varphi(0) = 0$ a $y' = \varphi'(0) = 2$ dostáváme

$$\varphi''(0) = \frac{1 \cdot 1 - 2(-2 \cdot 1)}{1^2} = 5.$$

V okolí 0 je $\varphi(x) \approx T_2(x) = 0 + 2(x - 0) + \frac{1}{2}5(x - 0)^2 = 2x + \frac{5}{2}x^2$
(Taylorův polynom získaný rozvojem funkce φ v bodě $x = 0$).



Vrstevníci $F(x, y) = 0$ je pro $x \in I$ definována implicitní funkce $\varphi(x)$, kde, jak z obrázku odečteme, je interval $I = (-4, 0, 2)$, případně i delší. Graf funkce φ pro $x \in I$ splývá s křivkou vrstevníce. Funkci φ aproximujeme Taylorovým polynomem T_2 . Aproximace je výstižná jen v nevelkém okolí bodu $x = 0$.

Dodatek: Věta o implicitní funkci dvou proměnných

Předpokládejme, že

1) v nějakém okolí bodu (x_0, y_0, z_0) je funkce $F(x, y, z)$ spojitá a má spojitě parciální derivace prvního řádu;

2) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$; 3) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak v určitém okolí U bodu $[x_0, y_0]$ existuje jednoznačně určená spojitá funkce $z = \varphi(x, y)$ (implicitní funkce) taková, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ a na okolí U platí $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$.

Funkce $z = \varphi(x, y)$ má v okolí U spojitě parciální derivace prvního řádu a platí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}.$$

Konkrétně můžeme spočítat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Obměna bodu 3): $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak existuje ... funkce $x = \psi(y, z)$...

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y_0, z_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Analogicky $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ implikuje existenci implicitní funkce $y = \eta(x, z)$ atd.

Ve jmenovateli zlomků je vždy parciální derivace z bodu 3).

Příklad: [J. Charvát, V. Kellar, Z. Šibrava: Matematika 2, sbírka příkladů, příklad 2.23]

Ukažme, že rovnicí $z^3 - xz + y = 0$ a podmínkou $g(3, -2) = 2$ je implicitně definovaná funkce $z = g(x, y)$ dvou proměnných, a vypočtěme $\frac{\partial g}{\partial x}(3, -2)$ a $\frac{\partial g}{\partial y}(3, -2)$.

Řešení: Označme $F(x, y, z) = z^3 - xz + y$.

Rovnice a podmínka znamenají, že $F(3, -2, 2) = 0$, což, jak lehce ověříme, skutečně platí.

Funkce F i její parciální derivace $F'_x(x, y, z) = -z$,

$F'_y(x, y, z) = 1$ a $F'_z(x, y, z) = 3z^2 - x$ jsou spojité v $\mathbb{R}^3$ a navíc $F'_z(3, -2, 2) = 9 \neq 0$. Předpoklady 1), 2) a 3) tedy jsou ověřeny a na nějakém okolí bodu $[3, -2]$ existuje implicitně definovaná funkce g se spojitými parc. derivacemi (dokonce všech řádů).

Pak

$$\frac{\partial g}{\partial x}(3, -2) = -\frac{F'_x(3, -2, 2)}{F'_z(3, -2, 2)} = \frac{2}{9}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(3, -2) = -\frac{1}{9}.$$