

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Funkce více proměnných III
 - ▶ rovnice tečny a normály rovinné křivky
 - ▶ rovnice tečné roviny a normály (prostorové) plochy

Literatura:

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, str. 184–192,
206–208

Rovnice tečny a normály rovinné křivky

Jde o aplikaci implicitně definované funkce a její derivace.

Tečna v bodě $[a_1, \varphi(a_1)]$:

$$y = kx + b = k(x - a_1) + b + ka_1 = \varphi'(a_1)(x - a_1) + \varphi(a_1),$$

$$\text{tedy } y - a_2 - \varphi'(a_1)(x - a_1) = 0,$$

$$\text{kde } a_2 = \varphi(a_1) \text{ a } \varphi'(a_1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2)}.$$

Po dosazení zlomku za $\varphi'(a_1)$ a úpravě dostaneme

rovnici tečny ke grafu implicitní funkce v bodě $A = (a_1, a_2)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2) = 0. \quad (1)$$

Výpočet by ukázal, že tento vztah nezávisí na tom, zda lokálně jde o tečnu ke grafu implicitní funkce proměnné x nebo y .

Rovnost (1) říká: *tečnu tvoří všechny body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, pro něž platí, že vektor $\mathbf{v} = [x, y] - [a_1, a_2]$ je kolmý na vektor $\nabla F(a_1, a_2)$. Vektor $\mathbf{v}$ je směrový vektor tečny, vektor $\nabla F(a_1, a_2)$ je směrový vektor normály.*

Normála v bodě $A = [a_1, \varphi(a_1)]$ je kolmá k tečně sestrojené v bodě A . Normálu tvoří všechny body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ takové, že vektor $\mathbf{w} = [x, y] - [a_1, a_2]$ je kolmý ke směrovému vektoru tečny η . Dle (1) musí být $\eta \cdot \nabla F(a_1, a_2) = 0$, tedy vektor $\mathbf{w}$ je nějakým násobkem vektoru $\nabla F(a_1, a_2)$.

Zvolme např. $\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2), -\frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2) \right)$. Pak $\mathbf{w} \cdot \eta = 0$ a rovnice normály grafu implicit. funkce v bodě $A = (a_1, a_2)$ je

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2)(x - a_1) - \frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2)(y - a_2) = 0.$$

Shrnutí: Směrový vektor normály je $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2); \frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2) \right)$, tj. gradient;

směrový vektor tečny je $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2), -\frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2) \right)$ nebo $\left(-\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2), \frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2) \right)$.

Příklad: Tečna a normála ke grafu implicitní funkce definované rovnicí $\sin x + x^2 + y \cos x - y^2 + 2 = 0$ v bodě $A = [0, 2]$.

Řešení: Označme $F(x, y) = \sin x + x^2 + y \cos x - y^2 + 2$.
Spojitá v $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^2$. Spojité parc. derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \cos x + 2x - y \sin x; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \cos x - 2y;$$

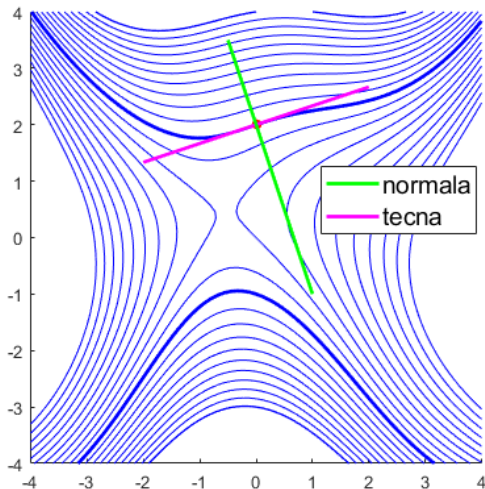
$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 2) = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 2) = -3.$$

Rovnice tečny v bodě A : $1(x - 0) - 3(y - 2) = 0$, tj.

$$x - 3y + 6 = 0 \text{ nebo } y = \frac{1}{3}x + 2.$$

Rovnice normály v bodě A : $-3(x - 0) - 1(y - 2) = 0$, tj.

$$3x + y - 2 = 0 \text{ nebo } y = -3x + 2.$$



Vrstevnici $F(x, y) = 0$ znázorňují dvě silněji vyznačené křivky, bod A leží jen na jedné z nich.

Rovnice tečné roviny a normály k ploše $z = f(x, y)$

Tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě

$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, viz totální diferenciál:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (2)$$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (3)$$

Vektor normály ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě

$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\pm \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Je kolmý na vektor $(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0))$, viz rovnost (3) přepsanou do tvaru

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)).$$

Rovnice tečné roviny a normály k implicitně zadané ploše

Nechť $\mathcal{D}_G$ je definiční obor funkce $G(x, y, z)$.

Množinu $\{[x, y, z] \in \mathcal{D}_G : G(x, y, z) = c\}$, kde $c \in \mathbb{R}$, nazýváme **hladina** (hladinová plocha) funkce G ; je to obdoba vrstevnice.

Věta (o implicitní funkci): Předpokládejme, že

- 1) funkce $F(x, y, z)$ má spojitě parciální derivace prvního řádu v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$;
- 2) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ (tj. např. $F(x, y, z) = G(x, y, z) - c$);
- 3) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0]$ a jednoznačně určená funkce **$z = \varphi(x, y)$** (implicitní funkce) taková, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ a v okolí $U(x_0, y_0)$ platí $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$. Funkce $\varphi(x, y)$ je v $U(x_0, y_0)$ spojitá a má v $U(x_0, y_0)$ spojitě parciální derivace

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}.$$

Obměna bodu 3): $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak existuje $U(y_0, z_0)$ bodu $[y_0, z_0]$ a ... $x = \psi(y, z)$...

$F(\psi(y, z), y, z) = 0$ atd. Pak

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y, z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\psi(y, z), y, z)}{\frac{\partial F}{\partial x}(\psi(y, z), y, z)}, \quad \frac{\partial x}{\partial z}(y, z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(\psi(y, z), y, z)}{\frac{\partial F}{\partial x}(\psi(y, z), y, z)}.$$

Obdobně pro situaci $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ dostaneme funkci

$y = \eta(x, z)$ takovou, že v okolí bodu $[x_0, z_0]$ platí

$F(x, \eta(x, z), z) = 0$. Derivace analogicky.

Vektor normály k ploše $\varrho : F(x, y, z) = 0$ v bodě

$$A = (x_0, y_0, z_0) \in \varrho$$

Z věty o impl. funkci ve variantě $\frac{\partial F}{\partial z}(A) \neq 0$ plyne (aspoň lokální) existence implicitně definované funkce $z = \varphi(x, y)$. Jsme tak v situaci ze strany 6, kde $f \equiv \varphi$. Do vztahu (2) pro tečnou rovinu k $z = \varphi(x, y)$ v bodě A dosadíme parc. der. $\partial z / \partial x$ a $\partial z / \partial y$ dané rovnostmi na straně 7 a upravme:

$$\begin{aligned} z - z_0 = & - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} (x - x_0) \\ & - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} (y - y_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))(z - z_0) = & - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))(x - x_0) \\ & - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))(y - y_0). \end{aligned}$$

Využitím $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ dostaneme rovnici tečné roviny k ploše $\varrho : F(x, y, z) = 0$ v bodě $A = (x_0, y_0, z_0) \in \varrho$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(A) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (4)$$

Vektor $\nabla F(A)$ je kolmý k tečné rovině v bodě A , je to tedy normálový vektor k ploše $\varrho : F(x, y, z) = 0$ v bodě A .

Poznámka: Výpočet pro zbývající varianty, tj. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, by ukázal, že rovnice (4) platí obecně, není tedy závislá na konkrétní variantě věty o implicitní funkci.

Příklad: Tečná rovina σ v bodě $A = [2, 3, 1]$ elipsoidu η daného vztahem $\underbrace{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{27} + \frac{z^2}{3}}_{F(x,y,z)} - 1 = 0$.

Řešení: Ověříme $F(2, 3, 1) = 0$, tj. bod A leží na ploše η .
Spočteme

$$\nabla F(2, 3, 1) = (x/6, 2y/27, 2z/3)|_{(2,3,1)} = (1/3, 2/9, 2/3).$$

Rovnice tečné roviny σ v bodě A :

$$\frac{1}{3}(x - 2) + \frac{2}{9}(y - 3) + \frac{2}{3}(z - 1) = 0,$$

tj. $\sigma : 3x + 2y + 6z - 18 = 0$. Normálový vektor $(3, 2, 6)$, je to násobek $\nabla F(2, 3, 1)$.

Geodetické aplikace v GEO-MATEMATIKA I, kapitola 7.

Trojice ortogonálních vektorů na grafu funkce

Mějme funkci $z = f(x, y)$ diferencovatelnou v bodě A .
Již známe normálový vektor ke grafu funkce, tj.

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1 \right).$$

Vektor tečny vrstevnice (kolmý na osu z a $\nabla f(A)$)

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial x}(A), 0 \right).$$

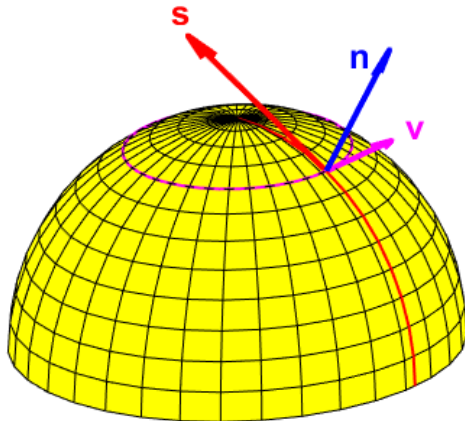
Doplňme třetí vektor takový, aby byl kolmý na $\mathbf{n}$ i $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), \|\nabla f(A)\|^2 \right).$$

Lze ukázat, že $\mathbf{s}$ je vektor vektor tečny spádnice.

Vektory $\mathbf{n}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{s}$ tvoří ortogonální trojici vektorů; můžeme je uvažovat i s opačnou orientací (s opačnými znaménky).

Obr. na další straně.



Matěj Klimeš, J. Ch.