

Předmět: MM2G

Témata

- ▶ Laplaceova rovnice ve 2D a 3D
- ▶ Harmonické (kruhové a kružnicové) funkce ...
- ▶ ... a jejich nalezení pomocí ODR

Literatura:

Tato prezentace

Laplaceova rovnice (Pierre-Simon Laplace, 1749–1827)

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

kde funkce $V(x, y)$ (nebo $V(x, y, z)$) je spojitá se spojitými prvními a druhými parciálními derivacemi. **Aplikace:** např. gravitační potenciál.

Funkce, které řeší L. rovnici, se nazývají **harmonické funkce**. V geodézii se říká **kruhové funkce** harmonickým funkcím na kruhu, které jsou polynomem v x a y , jehož všechny členy jsou stupně n . (**Kružnicové funkce** ... na jednotkové kružnici ...)

Příklad: $V_2(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $\Delta V_2 = 2a + 2c$. Funkce V_2 řeší $\Delta V_2 = 0 \Leftrightarrow a + c = 0$.

Řešení není jednoznačné (kupř. $V_2 + C$, $C \in \mathbb{R}$).

Jednoznačnost až po přidání další podmínky – např. okrajová úloha.

Hledáme řešení na kruhu – přejdeme k polárním souřadnicím

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Pak $V_2(x, y) \rightarrow W_2(r, \varphi) = r^2(a \cos 2\varphi + b \sin 2\varphi)$.

Obecně: Polynom v x a y se transformuje na výraz složený z mocnin proměnné r a z mocnin funkcí $\cos \varphi$ a $\sin \varphi$, exponenty v mocninách jsou přirozená čísla.

Lze ukázat, že $V = V(x, y)$ řeší (1) (ve 2D) $\iff$
 $W(r, \varphi) = V(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ řeší Laplaceovu rovnici
v polárních souřadnicích

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

Důkaz:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial V(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial r} = V'_x \cos \varphi + V'_y \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \dots = V''_{xx} \cos^2 \varphi + 2V''_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + V''_{yy} \sin^2 \varphi,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = -V'_x r \sin \varphi + V'_y r \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \dots = V''_{xx} r^2 \sin^2 \varphi - 2V''_{xy} r^2 \sin \varphi \cos \varphi + V''_{yy} r^2 \cos^2 \varphi \\ - V'_x r \cos \varphi - V'_y r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Dosadíme do (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \\ = V''_{xx} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 0 + V''_{yy} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 0 + 0 \\ = V''_{xx} + V''_{yy}. \end{aligned}$$

Takže pokud platí (2), pak platí i (1), a pokud platí (1), pak platí i (2).

Hledejme řešení rovnice (2) ve tvaru $W = z(r)y(\varphi)$. Po dosazení do (2) dostaneme $\left(z'' + \frac{1}{r}z'\right)y = -\frac{1}{r^2}zy''$. Za předpokladu $z(r)y(\varphi) \neq 0$

$$\frac{r^2}{z(r)} \left(z''(r) + \frac{1}{r}z'(r) \right) = -\frac{1}{y(\varphi)}y''(\varphi).$$

Předpoklad, že r a φ jsou nezávislé proměnné vede ke dvěma rovnicím (pro pevné φ a proměnné r a pro pevné r a proměnné φ)

$$\frac{r^2}{z(r)} \left(z''(r) + \frac{1}{r}z'(r) \right) = \mu = \text{konst.}, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{y(\varphi)}y''(\varphi) = \mu. \quad (4)$$

Místo (3) pišme $r^2z''(r) + rz'(r) - \mu z(r) = 0$ a vyšetřeme, pro jaké hodnoty μ je $z(r) = r^n$ řešení této rovnice.

Po dosazení $z(r) = r^n$ do rovnice a zderivování dostaneme

$$r^2 n(n-1)r^{n-2} + rnr^{n-1} - \mu r^n = 0$$
$$\Leftrightarrow r^n [n(n-1) + n - \mu] = 0 \Leftrightarrow \mu = n^2.$$

Pak (4) přejde v $y''(\varphi) + n^2 y(\varphi) = 0$ s obecným řešením (viz lineární obyč. dif. rov. 2. řádu s konst. koef.)

$$y(\varphi) = c_1 \cos n\varphi + c_2 \sin n\varphi, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nakonec tedy řešení rovnice (2) (kruhová funkce stupně n)

$$W_n(r, \varphi) = r^n (c_1 \cos n\varphi + c_2 \sin n\varphi), \text{ kde } n = 1, 2, \dots$$

Rovnice $r^2 z''(r) + rz'(r) - n^2 z(r) = 0$ je lineární a známe jedno její řešení $z_1(r) = r^n$. Redukcí řádu získáme i druhé lineárně nezávislé řešení.

Připomeňme **redukcí řádu** pro rovnici $z'' + p(r)z' + q(r)z = 0$:

► $v(r) = \int p(r) \, dr$

► $u(r) = e^{-v(r)}$

► $z_2(r) = z_1(r) \int \frac{u(r)}{z_1^2(r)} \, dr$

Naše (upravená) rovnice $z'' + \frac{1}{r}z' - \frac{n^2}{r^2}z = 0$ vede k (jest $r > 0$)

$$v(r) = \int \frac{dr}{r} = \ln r, \quad u(r) = e^{-\ln r} = \frac{1}{r},$$

$$z_2(r) = r^n \int \frac{dr}{r^{2n+1}} = r^n \frac{1}{-2n} r^{-2n} = \frac{1}{-2nr^n}.$$

Do fundamentálního systému použijeme řešení bez konstaty, tj. r^{-n} . Pak $W_{-n}(r, \varphi) = r^{-n}(c_1 \cos n\varphi + c_2 \sin n\varphi)$, $n = 1, 2, \dots$, je harmonická, ale není to transformovaný polynom a není definována pro $r = 0$.

Speciální případ $n = 0 \xrightarrow{\text{viz str. 6}} \mu = 0$ a dvojice rovnic

$$z'' + \frac{1}{r}z' = 0 \text{ a } y'' = 0.$$

Okamžitě $y(\varphi) = c_3\varphi + c_4$, kde $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Hledaná harmonická funkce musí být periodická (tedy $z(r)y(\varphi) = z(r)y(\varphi + 2\pi)$, jsme na kruhu), odtud $c_3 = 0$ a $y(\varphi) = c_4$.

Z upravené první rovnice $rz''(r) + z'(r) = (rz'(r))' = 0$ dostáváme $rz'(r) = c_5$. Pak $z(r) = c_5 \ln r + c_6$, kde $c_5, c_6 \in \mathbb{R}$.

Harmonická funkce $W = zy = \hat{c}_5 \ln r + \hat{c}_6$, kde $\hat{c}_5, \hat{c}_6 \in \mathbb{R}$, je kruhová jen při $c_5 = 0$, jinak není transformovaným polynomem a není definována v počátku. Na rozdíl od předchozích případů je přechod k harmonické funkci V v proměnných x a y snadný:

$$V(x, y) = \hat{c}_5 \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \hat{c}_6.$$

Řešení rovnice $x^2 y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = 0$, kde $p, q \in \mathbb{R}$
a $(p - 1)^2 - 4q > 0$ (podmínka kladnosti diskriminantu
kvadratické rovnice, kterou odvodíme o tři řádky níže).

Inspirováni předchozím výkladem zkusme hledat řešení ve
tvaru $y(x) = x^s$, kde $s \in \mathbb{R}$. Po dosazení do rovnice dostaneme

$$s(s - 1)x^s + psx^s + qx^s = 0 \Rightarrow s^2 + (p - 1)s + q = 0.$$

Kvadratická rovnice pro neznámou s má řešení

$$s_1 = \frac{1 - p + \sqrt{(p - 1)^2 - 4q}}{2}, \quad s_2 = \frac{1 - p - \sqrt{(p - 1)^2 - 4q}}{2}.$$

Obecné řešení tedy je

$$y(x) = c_1 x^{s_1} + c_2 x^{s_2}, \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Najděte řešení rovnice $x^2y''(x) + 7xy'(x) + 2y(x) = 0$ s počáteční podmínkou $y(1) = 1, y'(1) = -3$.

Řešení: Je zbytečné pamatovat si vztahy pro s_1 a s_2 . Stačí hledat řešení ve tvaru $y(x) = x^s$. Po dosazení do rovnice dostaneme

$$s(s-1)x^s + 7sx^s + 2x^s = 0 \Rightarrow s^2 + 6s + 2 = 0.$$

Kvadratická rovnice má kořeny

$$s_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2}}{2} = -3 + \sqrt{7}, \quad s_2 = -3 - \sqrt{7}$$

a obecné řešení

$$y(x) = c_1x^{-3+\sqrt{7}} + c_2x^{-3-\sqrt{7}}, \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

je definováno na maximálním intervalu $(-\infty, 0)$ nebo $(0, +\infty)$.

V počáteční podmínce je $x = 1$, jde tedy o řešení na intervalu $(0, +\infty)$.

Z $y(1) = 1$ plyne $c_1 + c_2 = 1$.

Z derivace $y'(x) = c_1(-3 + \sqrt{7})x^{-4+\sqrt{7}} + c_2(-3 - \sqrt{7})x^{-4-\sqrt{7}}$
a z podmínky $y'(1) = -3$ vyplývá, že

$$c_1(-3 + \sqrt{7}) + c_2(-3 - \sqrt{7}) = -3$$

$$\stackrel{c_2=1-c_1}{\Rightarrow} c_1(-3 + \sqrt{7}) + (1 - c_1)(-3 - \sqrt{7}) = -3$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{7}c_1 - \sqrt{7} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}.$$

Řešení počáteční úlohy

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(x^{-3+\sqrt{7}} + x^{-3-\sqrt{7}} \right),$$

kde $x \in (0, +\infty)$.

Řešení rovnice $x^2 y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = 0$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ a $(p - 1)^2 - 4q = 0$, je speciálním případem s dvojnásobným kořenem $s_1 = s_2 = (1 - p)/2$ a jedno řešení (prvek fundamentálního systému) je $y_1(x) = x^{s_1} = x^{(1-p)/2}$. Druhé lineárně nezávislé řešení najdeme metodou redukce řádu pro rovnici upravenou do tvaru

$y''(x) + \frac{p}{x}y'(x) + \frac{q}{x^2}y(x) = 0$; pro jednoduchost řešme jen na intervalu $(0, \infty)$.

Je tedy $v(x) = \int \frac{p}{x} dx = p \ln |x|$, $u(x) = e^{-p \ln |x|} = x^{-p}$ a

$$y_2(x) = x^{\frac{1-p}{2}} \int \frac{x^{-p}}{x^{(1-p)}} dx = x^{\frac{1-p}{2}} \int \frac{1}{x} dx = x^{\frac{1-p}{2}} \ln x.$$

Obecné řešení $y(x) = x^{\frac{1-p}{2}} (c_1 + c_2 \ln x)$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Příklad: Obecné řešení rovnice $x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = 0$ je $y(x) = \frac{c_1 + c_2 \ln x}{x^2}$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \infty)$.

Poznámka: Pro řešení na intervalu $(-\infty, 0)$ je $u(x) = e^{-p \ln |x|} = (-x)^{-p}$. Nastávají však problémy s obecnou mocninou $x^{\frac{1-p}{2}}$ a s logaritmem vyžadující práci v komplexním oboru. Proto se řešení na $(-\infty, 0)$ nebudeme věnovat.

Poznámka: Řešení rovnice $x^2 y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = 0$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ a $D = (p-1)^2 - 4q < 0$ je komplikováno tím, že kořeny s_1 a s_2 jsou komplexní. K fundamentálnímu systému (tudíž i k obecnému řešení) se dostaneme prostřednictvím funkce x^{s_1} , je však nutné vědět, jak interpretovat mocninu s komplexním exponentem, viz např.

<https://mathworld.wolfram.com/ComplexExponentiation.html>

Na intervalu $(0, \infty)$ obecné řešení je

$$y(x) = x^{\frac{1-p}{2}} (c_1 \cos(\eta \ln x) + c_2 \sin(\eta \ln x)), \quad (5)$$

kde $\eta = \sqrt{|D|}/2$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Lze dokázat dosazením do dif. rov. a úpravami – vhodné pro CAS (Maple, Mathematica), ručně poněkud pracné.

Příklad: $x^2 y''(x) - xy'(x) + 5y(x) = 0$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 7$.

Řešení: Z obecného tvaru řešení (5) po dosazení $p = -1$, $q = 5$ máme $D = 4 - 20 = -16$, $\eta = 2$ a

$$y(x) = c_1 x \cos(2 \ln x) + c_2 x \sin(2 \ln x).$$

Z $y(1) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 3$ plyne jak $c_1 = 3$, tak

$$y'(x) = c_2(\sin(2 \ln x) + 2 \cos(2 \ln x)) + 3 \cos(2 \ln x) - 6 \sin(2 \ln x).$$

Tedy $y'(1) = 2c_2 + 3 = 7$ a $c_2 = 2$.

Řešení počáteční (Cauchyovy) úlohy:

$$y(x) = 3x \cos(2 \ln x) + 2x \sin(2 \ln x), \quad x \in (0, \infty).$$