

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Rovnice spádnice
- ▶ Obyčejné diferenciální rovnice (ODR) 1. řádu
- ▶ Metoda separace proměnných
- ▶ Příklady

Literatura:

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, část V, str.
210-212, 215-220

Rovnice spádnice

Mějme systém vrstevnic daných vztahem $z = f(x, y)$, kde z je parametr. Křivka, která je kolmá ke všem vrstevnicím, se nazývá **spádnice**. (To znamená, že v průsečíku vrstevnice se spádnicí jsou tečné vektory navzájem kolmé.) Bude nás zajímat její průmět do roviny xy . Jak jej najít?

Nechť je spádnice daná vztahem $y = y(x)$ (funkce proměnné x), tvoří křivku sestávající z bodů $[x, y(x)]$ s tečným vektorem $(1, y'(x))$, jenž je zároveň kolmý na vrstevnici, tj. je nějakým k -násobkem gradientu (f'_x, f'_y) v bodě $[x, y] = [x, y(x)]$. Tedy

$$1 = kf'_x(x, y) \text{ a } y'(x) = kf'_y(x, y) \Rightarrow \frac{y'(x)}{1} = \frac{kf'_y(x, y)}{kf'_x(x, y)} \\ \Rightarrow y'(x) = \frac{f'_y(x, y)}{f'_x(x, y)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow f'_x(x, y)y'(x) = f'_y(x, y) \quad (2)$$

a rovnost (1) nebo (2) je **diferenciální rovnicí** pro průmět spádnic.

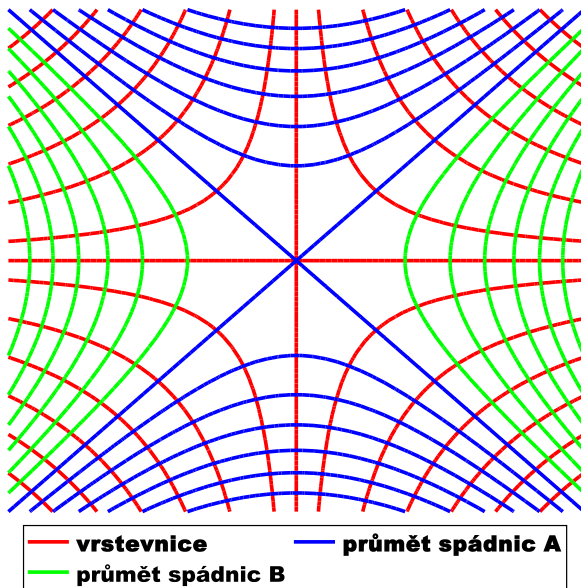
Příklad: Necht' $z = f(x, y) = xy$, vrstevnicemi jsou rovnosé hyperboly. Pak $f'_x(x, y) = y$ a $f'_y(x, y) = x$. Hledáme funkci $y = y(x)$ splňující rovnici (2)

$$y(x)y'(x) = x, \text{ tj. } \left(\frac{y^2(x)}{2}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'.$$

Z rovnosti derivací plyne rovnost primitivních funkcí

$$\frac{y^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2(x) - x^2 = c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Pro $c > 0$ dostaneme modré hyperboly (viz obr. dále), pro $c = 0$ modré osy kvadrantů, pro $c < 0$ hyperboly zelené, každá je sestavená ze dvou grafů $(x, y(x))$, jeden s $y(x) \geq 0$, druhý s $y(x) \leq 0$. Všechny průměty také získáme zobecněním vztahu (3) na body (x, y) splňující $y^2 - x^2 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$.



Obyčejná diferenciální rovnice (ODR) 1. řádu

Hledáme interval I a spojitě diferencovatelnou funkci $y = y(x)$, $x \in I$, aby platilo $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ pro $\forall x \in I$, kde F je zadaná spojitá funkce (**implicitní tvar dif. rovnice**).

$$\sin(x)(y'(x) + xy^2(x))^3 - 4 = 0, \quad (y' + y)^3 \ln(x + y^2) + 7x^4y = 0$$

Speciální případ (explicitní (též normální) tvar): rovnice je rozřešena vzhledem k y' : $y' = f(x, y)$, kde f je zadaná spojitá funkce.

$$y'(x) = x \cos(xy^2(x)), \quad y' = x \cos(xy^2), \quad y' = e^{2x}y + 4 \ln x.$$

Lze se setkat i se zápisem $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ (zvaným **obecný tvar** ODR 1. řádu), jenž odpovídá vztahu

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

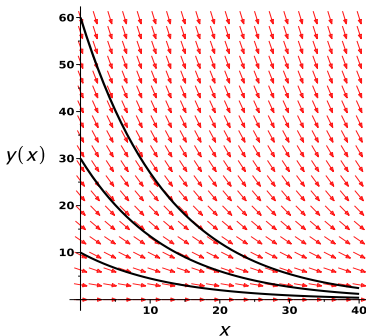
kde P a Q jsou dané (spojité) funkce.

Graf řešení ODR se nazývá **integrální křivka**.

Příklad: Diferenciální rovnice $y'(x) = -0,08y(x)$

Její řešení $y(x) = Ce^{-0,08x}$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo.

Nekonečně mnoho řešení, vybereme jen tři, a to taková, že $y(0) = 10$, $y(0) = 30$ a $y(0) = 60$.



Rovnice $y' = -0,08y$. Směrnice v bodě (x, y) má hodnotu $-0,08y$.

Vektory v obrázku nezávisí na souřadnici x .

Vektor $(1, f(x, y))$ je v bodě (x, y) tečný k integrální křivce dané rovnicí $y' = f(x, y)$ a procházející bodem (x, y) .

Cauchyova úloha

Obecné řešení: Množina funkcí y , které vyhovují rovnici $F(x, y, y') = 0$ a jsou závislé na jedné konstantě.

Například $y = y' \Rightarrow y = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$.

Počáteční podmínka: Požadujeme, aby integrální křivka procházela daným bodem (x_0, y_0) , tj. aby platilo $y(x_0) = y_0$.

Úloha najít řešení splňující danou počáteční podmínku se nazývá **Cauchyova úloha**.

Jestliže bodem (x_0, y_0) prochází více než jedna integrální křivka, nazývá se tento bod **singulárním bodem** diferenciální rovnice. Je-li každý bod integrální křivky singulárním bodem, nazývá se příslušné řešení **singulárním řešením**.

Příklad: Rovnice $y' = 3y^{2/3}$ má obecné řešení $y = 0$ a též $y = (x - C)^3$, $C \in \mathbb{R}$. Řešení $y = 0$ je singulární, protože každý bod $(x_0, 0)$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$, je singulárním bodem. Vskutku, každým bodem $(x_0, 0)$ kromě řešení $y = 0$ prochází i řešení $y = (x - x_0)^3$.

Existence a jednoznačnost max. řešení Cauchyovy úlohy

Nechť funkce $f(x, y)$ a její parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ jsou definovány a spojité v nějaké oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Nechť jsou dána reálná čísla x_0 a y_0 taková, že $(x_0, y_0) \in G$. Pak existuje otevřený interval J , pro nějž $x_0 \in J$, a funkce $\psi(x)$, která je **maximálním řešením** Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ na intervalu J . (Maximální řešení – nelze prodloužit; J je maximální.) Řešení $\psi(x)$ a interval J jsou určeny jednoznačně danou diferenciální rovnicí, počáteční podmínkou (x_0, y_0) a oblastí G .

Příklad: Pro rovnici $y' = 3y^{2/3}$ je funkce $f(x, y) = 3y^{2/3}$ definována a spojitá v $\mathbb{R}^2$, ale $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y^{-1/3}$ je definována a spojitá jen v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Pro (x_0, y_0) v horní (dolní) polorovině má C. úloha právě jedno maximální řešení $y(x) = (x - x_0 + \sqrt[3]{y_0})^3$.

Metoda separace proměnných je vhodná k řešení rovnic se separovanými proměnnými, tj. rovnic typu $y' = g(x)h(y)$, kde g a h jsou funkce jedné proměnné.

Pokud $h(c) = 0$, pak $y(x) = c$ řeší ODR.

Myšlenka: Mějme takovou funkci $H(y)$, že $H'(y) = 1/h(y)$ na intervalu, kde $h(y) \neq 0$, tj. h **nemění znaménko**. Uvažujme složenou funkci $H(y(x))$ a derivujme ji dle x :

$$\frac{dH(y(x))}{dx} = \frac{1}{h(y(x))} \frac{dy(x)}{dx} = \frac{y'}{h(y(x))} \stackrel{y'=g(x)h(y)}{=} g(x).$$

Jestliže tedy najdeme funkci $G(x)$ takovou, že $G'(x) = g(x)$, bude platit, že

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

pro nějakou konstantu C . Pak $y(x) = H^{-1}(G(x) + C)$, kde H^{-1} je funkce inverzní k funkci H , ta existuje, neboť H' nemění znaménko, tj. H je monotónní na daném intervalu.

Konkrétní postup. Máme $y'(x) = g(x)h(y(x))$. Existuje konstantní řešení, tj. $y(x) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$? Pokud ano, platí $y'(x) = 0 = g(x)h(c)$ a jelikož $g(x)$ není konstantní funkce rovná nule (jinak by $y'(x) = g(x)h(y) = 0$ byla triviální dif. rovnice s konstantním řešením), muselo by být $h(c) = 0$. Zkoumáme tedy, zda $h(c) = 0$ má nějaké řešení $c \in \mathbb{R}$.

Pak se věnujeme hledání jiných řešení než $y(x) = c$, tj. předpokládáme $h(c) \neq 0$. Z $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ dostaneme

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx, \quad (4)$$

kde se také uplatní $h(c) \neq 0$. Integrací (4) dostaneme vztah mezi proměnnými y a x , z něž odvodíme řešení $y(x)$.

Příklad: Rovnice $y' = 3y^{2/3}$, počáteční podmínka (PP) $y(1) = -8$.

Řešení: $g(x) = 1$, $h(y) = 3y^{2/3}$. Pro jakou konstantu c je $h(c) = 0$? Pro $c = 0$, tj. $y(x) = 0$ řeší rovnici, ale neřeší Cauch. úlohu (nesplňuje PP).

Z rovnice $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$ formálním trikem dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{dy}{3y^{2/3}} &= dx, \\ \int \frac{1}{3y^{2/3}} dy &= \int dx, \\ y^{1/3} &= x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y &= (x + C)^3 \quad \text{obecné řešení.}\end{aligned}$$

$$y(1) = -8 = (1 + C)^3 \Rightarrow -2 = 1 + C \Rightarrow C = -3$$

Na intervalu $(-\infty, 3)$ dostaneme jednoznačné řešení $y(x) = (x - 3)^3$ poč. úlohy. Je možné prodloužit, ale ne jednoznačně (např. nulovým, pak nenulovým řešením).

Vrstevnice a spádnice – příklady

Vraťme se ke spádnicím. Příklad s $f(x, y) = xy$ jsme řešili úpravou, zkusme separací proměnných.

Dle (1) je $y' = f'_y/f'_x = x/y$, tj. $y \neq 0$. Při $h(y) = 1/y$ by $h(c) = 0$ znamenalo, že $1/c = 0$, což není možné. Rovnice tudíž nemá konstantní řešení. Pro $y \neq 0$ tedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \int y \, dy = \int x \, dx,$$

odtud $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$. A dostáváme vztah (3).

Vyšli-li bychom z rovnice (2), tj. $y \frac{dy}{dx} = x$, v její levé straně můžeme uvažovat $y(x) = 0$, ale tato funkce neřeší ODR

$y \frac{dy}{dx} = x$, protože po dosazení by levá strana ODR byla rovna nule, kdežto pravá strana je nenulová.

Obrázek vrstevnic a spádnic je na straně 4.

Nechť nyní $f(x, y) = x^2 - y^2$. Vrstevnice $x^2 - y^2 = K$, kde $K \in \mathbb{R}$; jsou to hyperboly a osy kvadrantů.

Rovnice pro průmět spádnice ve tvaru (2): $2x \frac{dy}{dx} = -2y$.

a) Po zkrácení 2 je $h(y) = -y$ a $h(c) = 0$ dává řešení $y = 0$.

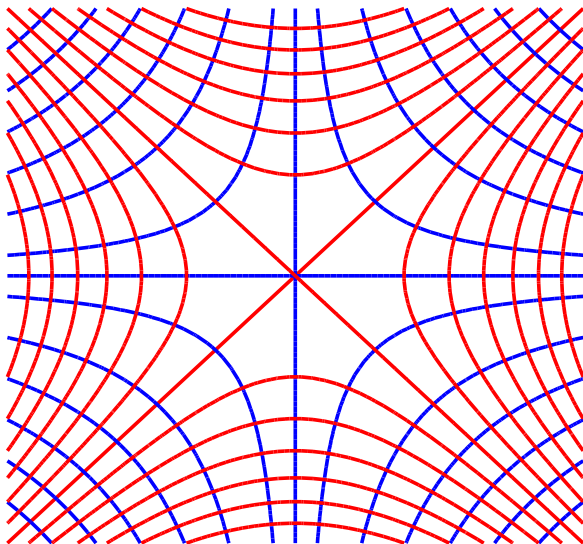
b) Pro $y \neq 0$ dostaneme $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$, tj.

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \hat{C}, \hat{C} \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C, C > 0 \Rightarrow \ln|y| = \ln \frac{C}{|x|} \\ &\Rightarrow |y| = \frac{C}{|x|}. \end{aligned} \quad (5)$$

Z úvah o abs. hodnotách vyplynou řešení (hyperboly)

$y(x) = k/x$, kde $k \in \mathbb{R}$, pro $k > 0$ v I. a III. kvadrantu, pro $k < 0$ v II. a IV. kvadrantu, pro $k = 0$ dostaneme i řešení $y = 0$.

Řešením ODR však nezískáme přímku $x = 0$, která je také průmětem spádnice. Vyhovuje však zobecnění vztahu (5), a to $|x| |y| = C, C \geq 0$.



— vrstevnice — průmět spádnic

Srovnejte s obr. na str. 4 a povšimněte si, že křivky si vyměnily role.

Vezměme $f(x, y) = x^2 + y^2$. Vrstevnice $x^2 + y^2 = K$, kde $K \geq 0$; jsou to kružnice.

Rovnice pro průmět spádnice ve tvaru (2): $2x \frac{dy}{dx} = 2y$.

a) Po zkrácení 2 je $h(y) = y$ a $h(c) = 0$ dává řešení $y = 0$.

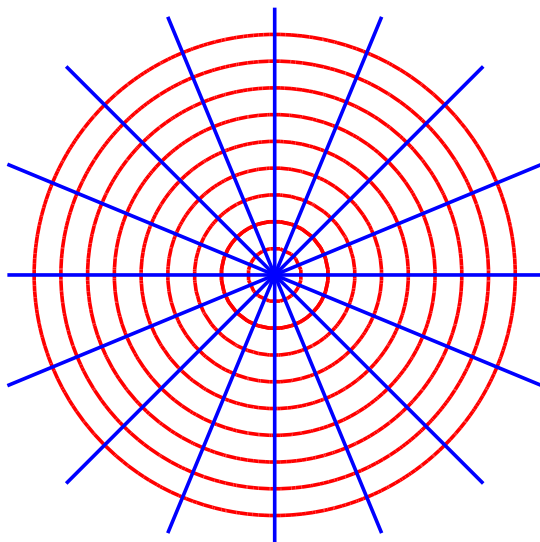
b) Pro $y \neq 0$ dostaneme $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, tj. $x \neq 0$ a

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + \hat{C}, \hat{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + \ln C, C > 0 \Rightarrow \ln |y| = \ln(C|x|)$$

$$\Rightarrow |y| = C|x|.$$

Z úvah o abs. hodnotách vyplynou řešení (přímky) $y(x) = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$ a $x \neq 0$, pro $k = 0$ dostaneme dokonce i řešení $y = 0$. Řešením ODR však nezískáme přímku $x = 0$, která je také průmětem spádnice. Museli bychom sestavit a vyřešit ODR pro funkci $x(y)$.



— vrstevnice — průmět spádnic

Na závěr necht' $f(x, y) = y/x$, kde $x \neq 0$. Vrstevnice $y = Kx$.

Rovnice ve tvaru (1): $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right) / \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{x}{y}$.

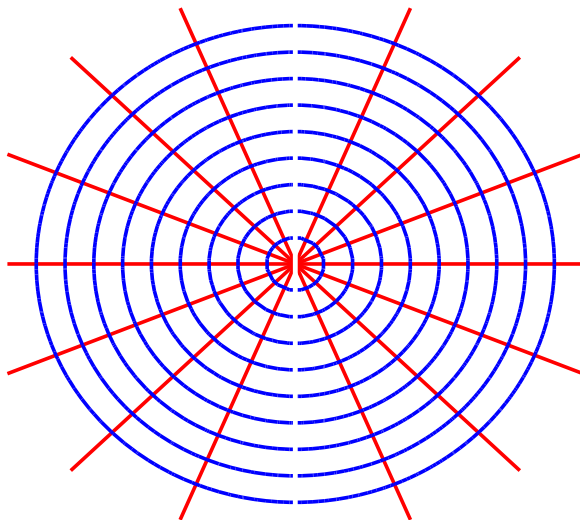
a) Jelikož $h(y) = 1/y$, musí být $y \neq 0$; je vyloučen případ $h(c) = 0$.

b) Po integraci $\int y \, dy = - \int x \, dx$ obdržíme (C je obecná konstanta, je zbytečné rozlišovat $\hat{C}$ a C jako výše)

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = C, \quad C > 0, \quad (6)$$

získáváme kružnice, avšak bez některých bodů, viz $x \neq 0$ a $y \neq 0$ výše.

V rovnici ve tvaru (2): $-\frac{y}{x^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ funkce $y = 0$ je přípustná, ale není řešením. Dojdeme však opět k výrazu (6), jenž nyní odpovídá kružnicím bez bodů, pro něž $x = 0$.



— vrstevnice — průmět spádnic