

Předmět: MM2G

Témata

- ▶ Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu
- ▶ Homogenní lineární ODR 2. řádu
- ▶ Homogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty
- ▶ Redukce řádu

Literatura:

Tato prezentace

Obyčejná diferenciální rovnice (ODR) 2. řádu

Hledáme interval I a spojitě diferencovatelnou funkci $y = y(x)$, $x \in I$, aby platilo $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$ pro $\forall x \in I$, kde F je zadaná spojitá funkce (**implicitní tvar dif. rovnice**).

Speciální případ (explicitní (též normální) tvar): rovnice je rozřešena vzhledem k y'' : $y'' = f(x, y, y')$, kde f je zadaná spojitá funkce.

Speciálnější případ: lineární homogenní rovnice 2. ř.

$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$ nebo

$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, kde a, b, c, p, q jsou spojitě funkce. **Dvě lineárně nezávislá řešení!**

Proč lineární? Protože, **pokud y_1 a y_2 jsou řešení**, pak **$\alpha y_1 + \beta y_2$** , kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, **je také řešení.**

Jednoznačnost řešení zajištěna až **počátečními podmínkami** $y(x_0) = \eta_1$, $y'(x_0) = \eta_2$, kde $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

Ještě speciálnější případ: lineární homogenní rovnice 2. ř.
s konstantními koeficienty

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

Charakteristický pol.: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

Kořeny (charakteristická čísla) λ_1 a $\lambda_2 \Rightarrow$ fundamentální systém (FS):

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$
 $\Rightarrow$ FS: $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2$
 $\Rightarrow$ FS: $e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}$
- komplexně sdružená dvojice kořenů $\alpha \pm i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ FS: $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Příklad: $y'' + 4y = 0$, poč. podm. $y(\pi/2) = 3$, $y'(\pi/2) = -8$

Charakter. rovnice: $\lambda^2 + 4 = 0$ s řešením $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$.

FS: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$.

Obecné řešení:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$, kde
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Zbývá vyřešit počáteční úlohu; k tomu

$$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x.$$

Využijeme $y(\pi/2) = 3$, $y'(\pi/2) = -8$, tj.

$$y(\pi/2) = c_1 \cos(2\pi/2) + c_2 \sin(2\pi/2) = -c_1 \Rightarrow c_1 = -3,$$

$$y'(\pi/2) = -2c_1 \sin(2\pi/2) + 2c_2 \cos(2\pi/2) = -2c_2 \Rightarrow c_2 = 4.$$

Řešení počáteční úlohy: $y(x) = -3 \cos 2x + 4 \sin 2x$,
 $x \in (-\infty, +\infty)$.

Redukce řádu

Pokud pro rovnici $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

známe jedno řešení, tj. y_1 , potřebujeme pro FS najít druhé LN řešení y_2 .

Hledá se ve tvaru $y_2(x) = z(x)y_1(x)$, po dosazení do ODR se odvodí standardně řešitelná nová ODR pro funkci z , řešením nové ODR se nalezne z a vynásobí řešením y_1 .

Postup vede k výslednému jednoduchému algoritmu:

- ▶ $v(x) = \int p(x) dx$
- ▶ $u(x) = e^{-v(x)}$
- ▶ $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{u(x)}{y_1^2(x)} dx$
- ▶ Fundamentální systém výchozí ODR: y_1, y_2

Pro pohodlí zopakujme

- ▶ $v(x) = \int p(x) dx$
- ▶ $u(x) = e^{-v(x)}$
- ▶ $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{u(x)}{y_1^2(x)} dx$

Příklad: $y'' - \frac{x}{x^2 - x} y' + \frac{1}{x^2 - x} y = 0$ na $(1, +\infty)$.

Lze uhodnout $y_1(x) = x$. Pak

$$v(x) = \int \frac{-x}{x^2 - x} dx = - \int \frac{1}{x - 1} dx = -\ln(x - 1)$$

$$u(x) = e^{\ln(x-1)} = x - 1$$

$$y_2(x) = x \int \frac{x-1}{x^2} dx = x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) = x \ln x + 1$$

FS: $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x + 1$, $x \in (1, +\infty)$.

Obecné řešení: $y(x) = c_1 x + c_2 (x \ln x + 1)$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
a $x \in (1, +\infty)$.