

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ Loxodroma
- ▶ Délka loxodromy
- ▶ Izometrická šířka

Literatura:

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, str. 216 (velmi stručně)

Loxodroma: křivka na sféře protínající poledníky pod stejným úhlem α .

Sféra o poloměru R : zem. šířka $U \in (-\pi/2, \pi/2)$, zem. délka λ (pro $U = \pm\pi/2$ by nebyl výsledný výraz (na další stránce) definován).

Sférický trojúhelník ACB , strana AC na poledníku, BC na rovnoběžce, bod C má zem. šířku U . Délka strany AC je $R dU$, délka strany BC je $R \cos U d\lambda$, kde dU je změna zem. šířky a $d\lambda$ je změna zem. délky, pro malé hodnoty dU a $d\lambda$ lze trojúhelník ACB považovat za pravoúhlý. Necht' α je úhel u vrcholu A , pak z

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R \cos U d\lambda}{R dU} \quad (1)$$

plyne diferenciální rovnice $\operatorname{tg} \alpha = \cos U \lambda'(U)$, kde $'$ značí derivaci dle U a funkce $\lambda(U)$ udává, jak se v závislosti na změně hodnoty U musí měnit hodnota λ , aby byla zachována konstantní hodnota $\operatorname{tg} \alpha$, tj. konstantní úhel α .

Loxodroma – řešení: Metoda separace proměnných vede k $h(\lambda) = 1$, tudíž $h(c) = 0$ nenastává a za podmínky $-\pi/2 \neq U \neq \pi/2$ dostáváme rovnost

$$\operatorname{tg} \alpha \int \frac{dU}{\cos U} = \int d\lambda$$

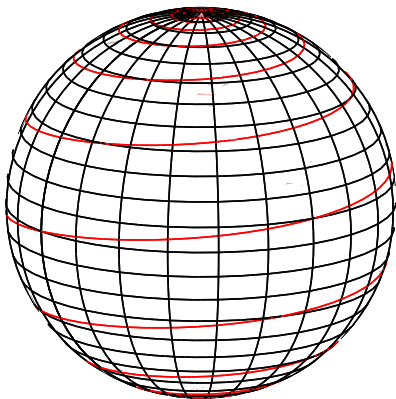
s řešením $\lambda(U) = \operatorname{tg} \alpha \ln(\operatorname{tg}(U/2 + \pi/4)) + C$ (jsou možné i jeho jiné zápisy), kde $C \in \mathbb{R}$.

Je-li zadána počáteční podmínka¹ $\lambda(U_0) = \lambda_0$, znamená to, že loxodroma s definičním oborem $(-\pi/2, \pi/2)$ prochází bodem na sféře s kartézskými souřadnicemi $[R \cos U_0 \cos \lambda_0, R \cos U_0 \sin \lambda_0, R \sin U_0]$.

Pak $C = \lambda_0 - \operatorname{tg} \alpha \ln(\operatorname{tg}(U_0/2 + \pi/4))$.

Funkce λ je definována na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, avšak její obor hodnot může (pro úhly α blízké k $\pi/2$) přesáhnout interval $[0, 2\pi)$, jenž je standardně používán pro zeměpisnou délku φ , tj. loxodroma může sféru obtočit více než jednou.

¹Pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\lambda_0 \in [0, 2\pi)$.



Loxodroma pro $\alpha = 9\pi/19$

Délka loxodromy: Vraťme se k infinitezimálnímu trojúhelníku ACB a předpokládejme $dU > 0$. Jeho přepona ds má délku

$$\begin{aligned} ds &= R \sqrt{(dU)^2 + (\cos U d\lambda)^2} \stackrel{(1)}{=} R \sqrt{(dU)^2 + (\operatorname{tg} \alpha dU)^2} \\ &= R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dU = R \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} dU. \end{aligned}$$

$$\text{Odtud } s'(U) = \frac{ds}{dU} = \frac{R}{|\cos \alpha|}.$$

Délka loxodromy mezi body P_1 a P_2 určenými dvojicemi $P_1 = [U_1, \lambda(U_1)]$ a $P_2 = [U_2, \lambda(U_2)]$, kde $U_2 > U_1$, tedy je

$$\int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{U_1}^{U_2} \frac{R}{|\cos \alpha|} dU = \frac{R}{|\cos \alpha|} (U_2 - U_1).$$

Poznámka: Pokud je úhel α pravý, nelze užít úvahy založené na infinitezimálním trojúhelníku. Nicméně v této situaci je jasné, že loxodromami jsou zeměpisné rovnoběžky.

Izometrická šířka

Opakování: Rotační elipsoid – délka hlavní poloosy a (poloměr rovníku), délka vedlejší poloosy b , první excentricita

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Zeměpisná délka λ je úhel mezi rovinou poledníku a rovinou nultého poledníku.

Zeměpisná šířka φ je úhel mezi rovinou rovníku rotačního elipsoidu a normálou k rotačnímu elipsoidu.

Meridiánový poloměr křivosti $M(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}},$

a příčný poloměr křivosti $N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$

kde $\varphi \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

Opět infinitezimální pravoúhlý trojúhelník se stranou délky $\rho = N \cos \varphi \, d\lambda$ na rovnoběžce a délky $\rho = M \, d\varphi$ na poledníku a s přeponou délky ds . Platí

$$(ds)^2 = \rho^2 + \rho^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} (d\varphi)^2 + (d\lambda)^2 \right).$$

Zavedeme-li nový infinitezimální délkový element dq vztahem

$$dq = \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi, \text{ obdržíme pro výpočty vhodný symetrický vztah } (ds)^2 = N^2 \cos^2 \varphi ((dq)^2 + (d\lambda)^2).$$

$$\text{Zároveň máme } q'(\varphi) = \frac{M}{N \cos \varphi}.$$

Funkci $q(\varphi)$ říkáme **izometrická šířka** a vypočteme ji integrací

$$q(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{M}{N \cos t} dt = \int_0^\varphi \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 t) \cos t} dt.$$

Využijme rovnost $e^2 = e^2(\sin^2 t + \cos^2 t)$:

$$\begin{aligned}
 q(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{1 - e^2 \sin^2 t - e^2 \cos^2 t}{(1 - e^2 \sin^2 t) \cos t} dt \\
 &= \int_0^\varphi \frac{dt}{\cos t} - e \int_0^\varphi \frac{e \cos t}{1 - e^2 \sin^2 t} dt
 \end{aligned}$$

(první integrál známe z loxodromy, v druhém $u = e \sin t$)

$$\begin{aligned}
 &= \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) - e \int_0^{e \sin \varphi} \frac{du}{1 - u^2} \\
 &= \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}.
 \end{aligned}$$

Poznámka: Pro sféru je $e = 0$, tj. $q(\varphi) = \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.