

MM2G: Malá sbírka příkladů

Verze ze dne 23. května 2025

JAN CHLEBOUN

Obsah

Úvod	2
1 Komplexní čísla	2
2 Lokální extrémy funkcí	3
3 Taylorův polynom	7
4 Funkce definovaná implicitně	8
5 Ortogonalizace a aproximace funkcí	9
6 Vrstevnice a spádnice	12
7 Lineární obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu	16
7.1 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty	16
7.2 Metoda redukce řádu	17
7.3 Rovnice se speciálními nekonstantními koeficienty	17
Literatura	18

Úvod

Původně byly z několika příkladů sestaveny dva soubory. V jednom byly příklady s podrobným řešením, v druhém příklady jen se stručně zachycenými hlavními kroky řešení nebo jen s výsledkem. Toto uspořádání se mi však postupem času začalo jevit jako nepraktické, proto jsem příklady sloučil do jednoho souboru — sbírky — a ještě několik málo příkladů přidal.

Těž přibyla krátká stať o komplexních číslech, protože jen část posluchačů se s nimi setkala na střední škole. Je pravda, že v tématech matematiky pro geodety na komplexní čísla nenarazíme, snad jen s výjimkou kořenů charakteristického polynomu, nicméně mít aspoň základní ponětí o komplexních číslech patří k intelektuální výbavě posluchačů a posluchaček vysoké školy technického zaměření.

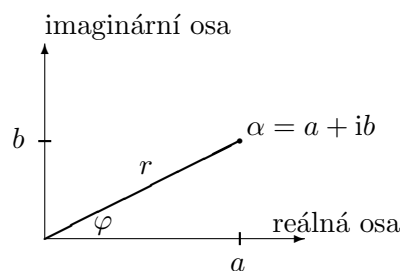
Uvítám, když mě čtenáři upozorní na chyby, a tím napomohou vylepšení sbírky. Za upozornění na závažný překlep děkuji M. Boříkovi.

1 Komplexní čísla

Komplexní číslo má tvar $\alpha = a + ib$, kde a a b jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka, pro níž platí

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Reálné číslo a se nazývá reálná část čísla α , reálné číslo b se nazývá imaginární část čísla α . Je-li $a = 0$, nazýváme α ryze imaginárním číslem.



Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$, množinu reálných čísel značíme $\mathbb{R}$.

Sčítání a násobení komplexních čísel — dle pravidel pro úpravu algebraických výrazů:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$
$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Například¹

$$-2 + 4i + 7 - 5i = 5 - i,$$
$$(-2 + 4i)(7 - 5i) = -14 + 28i + 10i - 20i^2 = 6 + 38i.$$

Číslo $a - ib$ říkáme číslo komplexně sdružené k číslu $\alpha = a + ib$, komplexní sdruženost označujeme $\bar{\alpha}$. Pro komplexní čísla α, β, γ platí

$$\overline{(\alpha + \beta)} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}},$$

kde $\gamma \neq 0$.

Absolutní hodnotou komplexního čísla $\alpha = a + ib$ nazýváme reálné číslo $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Například $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Převrácená hodnota komplexního čísla $a + ib$ je komplexní číslo $1/(a + ib)$. Tento tvar čísla nám však nedává dobrou představu o reálné a imaginární složce převrácené hodnoty, proto je žádoucí vhodná úprava. Je založena na vynásobení hodnotou 1 zapsanou ve tvaru zlomku $\frac{a - ib}{a - ib}$. Pak

$$\frac{1}{a + ib} \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Konkrétně například $\frac{1}{3 + 4i} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

¹Při zápisu komplexních čísel se často setkáváme s tím, že v nečíselném zápisu $a + ib$ imaginární jednotka i předchází proměnnou, tj. b , kdežto u číselného zápisu je tomu naopak, např. $5 - 7i$.

S podílem dvou komplexních čísel si poradíme stejným způsobem:

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{c + id}{a + ib} \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{a^2 + b^2}.$$

Konkrétně například

$$\frac{2 - 3i}{3 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{6 - 8i - 9i + 12i^2}{3^2 - (4i)^2} = -\frac{6}{25} - i\frac{17}{25}.$$

Úpravou tedy dostáváme komplexní číslo ve tvaru $p + iq$, kde p a q ovšem mohou být reálná čísla ve tvaru zlomků.

Nenulová komplexní čísla lze psát v goniometrickém tvaru

$$\alpha = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

kde $r = |\alpha|$ a úhel φ (viz² obrázek) je dán (až na celé násobky 2π) vztahy

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Výhodou goniometrického vyjádření je snadné násobení komplexních čísel, neboť pro $\alpha_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ a $\alpha_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ platí, že

$$\alpha_1 \alpha_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Další informace například v [1, Kapitola 1.6]).

2 Lokální extrémy funkcí

Příklad: Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x - 1)^2 e^{2x} + (y - 3)^2 + 5$.

Řešení: Funkce je definována v celé rovině xy . Nejprve najdeme stacionární body, tj. body, v nichž je $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Derivováním odvodíme

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2(x - 1)e^{2x} + 2(x - 1)^2 e^{2x} = 2e^{2x}x(x - 1), \\ f'_y(x, y) &= 2y - 6. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{aligned} 2e^{2x}x(x - 1) &= 0, \\ 2y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

má dvě řešení, a to $x_A = 0$, $y_A = 3$ a $x_B = 1$, $y_B = 3$. Stacionární body tedy jsou $A = [0, 3]$ a $B = [1, 3]$.

Nyní spočteme druhé derivace

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= 2e^{2x} + 8(x - 1)e^{2x} + 4(x - 1)^2 e^{2x} = (4x^2 - 2)e^{2x}, \\ f''_{yy}(x, y) &= 2, \\ f''_{xy}(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

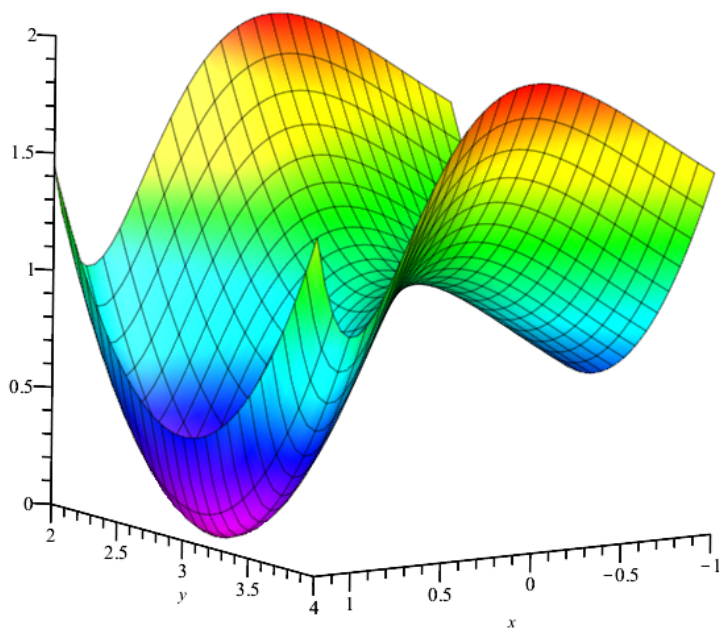
vystupující v matici $M(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$. V bodech A a B vyhodnotíme determinanty D_1 a D_2 matice M , viz přednášku.³

²Toto místo je mi příležitostí k výzvě čtenářům, aby nepodléhali hromadnému bludu a nepsali za viz tečku. V angličtině se píše viz., ale význam je zcela odlišný. Kdo v českém textu píše viz., nedělá si dobrou reklamu.

³Prezentace https://mat.fsv.cvut.cz/chleboun/JCh_vyuka/101MM2G/MM2G_10predn-lokal-extr.pdf
Pozor, při kopírování odkazu se mohou změnit některé speciální znaky, adresa je pak nesprávná a objeví se chybové hlášení o neexistující stránce.

$M(0, 3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, odtud $D_1(A) = -2$ a $D_2(A) = -4$, z čehož plyne, že v bodě A funkce f nemá extrém, bod A je sedlový bod.

$M(1, 3) = \begin{pmatrix} 2e^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, odtud $D_1(B) = 2e^2$ a $D_2(B) = 4e^2$, z čehož plyne, že v bodě B funkce f má ostré lokální minimum; $f(1, 3) = 5$.



Příklad: Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = -\frac{1}{x} + \frac{x}{y} + y$.

Řešení: Funkce je definována v rovině xy kromě os x a y . Nejprve najdeme stacionární body, tj. body, v nichž je $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Derivováním odvodíme

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = \frac{x^2 + y}{x^2 y},$$

$$f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} + 1 = \frac{y^2 - x}{y^2}.$$

Rovnice $\frac{x^2 + y}{x^2 y} = 0$ a $\frac{y^2 - x}{y^2} = 0$ upravíme na $x^2 + y = 0$ a $y^2 - x = 0$. Z druhé rovnice vyjádříme $x = y^2$ a dosadíme do první rovnice. Nenulové řešení rovnice $y^4 + y = y(y^3 + 1) = 0$ je $y = -1$. Z druhé rovnice $x = 1$ (z první rovnice se zdá, že by mohlo být i $x = -1$, ale pak by druhá rovnice neměla reálné řešení; komplexní řešení této úloze nevyhovují). Stacionární bod tedy je $A = [1, -1]$.

Nyní spočteme druhé derivace

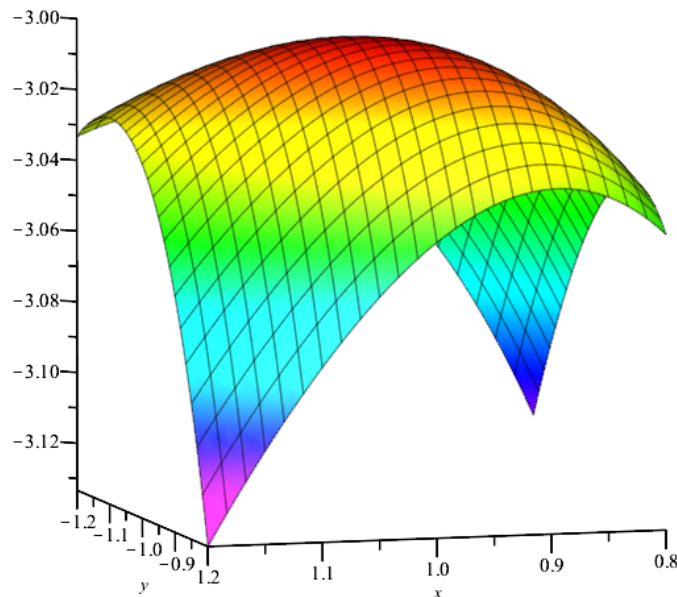
$$f''_{xx}(x, y) = -\frac{2}{x^3},$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{2x}{y^3},$$

$$f''_{xy}(x, y) = -\frac{1}{y^2}$$

vystupující v matici $M(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ \frac{1}{x^3} & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$. V bodě A vyhodnotíme determinanty D_1 a D_2 matice M , viz přednášku.

$M(1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, odtud $D_1(A) = -2$ a $D_2(A) = 4 - 1 = 3$, z čehož plyne, že v bodě A funkce f má ostré lokální maximum a $f(1, -1) = -3$.



Příklad: Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = (2y^2 - x + 1)^2$.

Řešení: Funkce je definována v celé rovině xy . Nejprve najdeme stacionární body, tj. body, v nichž je $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Derivováním odvodíme

$$f'_x(x, y) = 2(x - 2y^2 - 1),$$

$$f'_y(x, y) = -8(x - 2y^2 - 1)y.$$

Soustava rovnic $2(x - 2y^2 - 1) = 0$ a $-8(x - 2y^2 - 1)y = 0$ má nekonečně mnoho řešení, totiž všechny body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňující $x = 2y^2 + 1$. Tyto body vytvářejí parabolu p v rovině xy , tj. graf kvadratické funkce ($y \in \mathbb{R}$ je nezávislá proměnná, x je závislá proměnná).

Už to, že $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ na celé křivce p , dává tušit, že pokud má funkce lokální extrém, nebude ostrý. Též vidíme, že p je vlastně vrstevnice o kótě 0.

Pokračujme vyšetřením stacionárních bodů. Nyní vypočítáme druhé derivace

$$f''_{xx}(x, y) = 2,$$

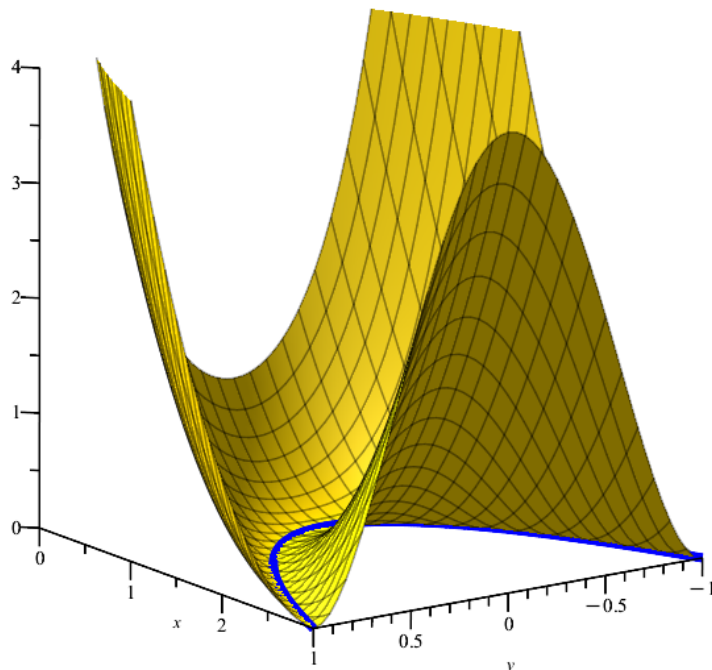
$$f''_{yy}(x, y) = 32y^2 - 8(x - 2y^2 - 1) = 48y^2 - 8x + 8,$$

$$f''_{xy}(x, y) = -8y$$

vystupující v matici $M(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8y \\ -8y & 48y^2 - 8x + 8 \end{pmatrix}$. Zajímá nás matice M ve stacionárních bodech, tj. x nahradíme výrazem $2y^2 + 1$:

$M(2y^2 + 1, y) = \begin{pmatrix} 2 & -8y \\ -8y & 48y^2 - 8(2y^2 + 1) + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8y \\ -8y & 32y^2 \end{pmatrix}$. Vyhodnotíme determinanty D_1 a D_2 matice $M(2y^2 + 1, y)$. Dostaneme $D_1(y) = 2$ a $D_2(y) = 0$, z čehož plyne, že nám věta o postačujících podmínkách pro existenci ostrých lokálních extrémů nepomůže. Vystačíme však s jednoduchou úvahou.

Povšimneme si, že jestliže $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus p$, pak $f(x, y) > 0$. Odtud plyne, že každý bod paraboly p je bodem lokálního neostrého minima a funkce f v něm nabývá hodnoty nula, viz obrázek.



Příklad: Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = (2y^2 - x + 1)^3$.

Řešení: Funkce je definována v celé rovině xy . Nejprve najdeme stacionární body, tj. body, v nichž je $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Derivováním odvodíme

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 3(x - 2y^2 - 1)^2, \\ f'_y(x, y) &= -12(x - 2y^2 - 1)^2 y. \end{aligned}$$

Soustava rovnic $3(x - 2y^2 - 1)^2 = 0$ a $-12(x - 2y^2 - 1)^2 y = 0$ má nekonečně mnoho řešení, totiž všechny body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňující $x = 2y^2 + 1$. Tyto body vytvářejí parabolu p v rovině xy , tj. graf kvadratické funkce ($y \in \mathbb{R}$ je nezávislá proměnná, x je závislá proměnná).

Už to, že $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ na celé křivce p , dává tušit, že pokud má funkce lokální extrém, nebude ostrý. Též vidíme, že p je vlastně vrstevnice o kótě 0.

Mohli bychom pokračovat vyšetřením stacionárních bodů. Zjistili bychom, že $f''_{xx}(x, y) = 0$, $f''_{yy}(x, y) = 0$, a $f''_{xy}(x, y) = 0$ pro všechny body $[x, y] \in p$ a že nám věta o postačujících podmínkách pro existenci ostrých lokálních extrémů opět nepomůže.

Zaměříme se na hodnoty funkce f v okolí paraboly p . Parabola p je definována předpisem $g(x, y) = 0$, kde $g(x, y) = x - 2y^2 - 1$. V bodě $[x, y]$ je vektor normály $\mathbf{n}(x, y)$ k parabole p dán takto $\mathbf{n}(x, y) = (1, -4y)$.

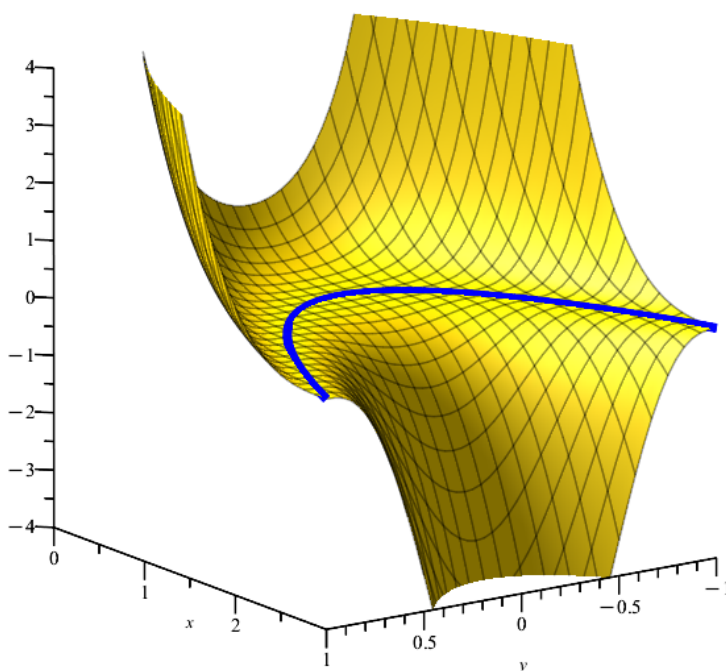
Ukažme si myšlenku postupu nejprve v jednom bodě, např. $A = [1, 0] \in p$. Pak je $\mathbf{n}(1, 0) = (1, 0)$. Zvolme body B a C ležící zároveň na normále paraboly p procházející bodem A a zároveň ve vzdálenosti $\delta > 0$ od bodu A . Konkrétně $B = A + (1, 0)\delta = [1 + \delta, 0]$ a $C = A - (1, 0)\delta = [1 - \delta, 0]$. Pak $f(A) = 0$,

$f(B) = (-\delta)^3 < 0$ a $f(C) = \delta^3 > 0$. Vidíme, že v jakkoli malém okolí bodu A leží bod s hodnotou větší než $f(A) = 0$ a bod s hodnotou menší než $f(A) = 0$. V bodě A tedy není lokální extrém.

Nyní stejnou myšlenku aplikujme na obecný bod $[x, y] \in p$ a definujme bod $D = [x, y] + \delta \mathbf{n}(x, y) = [x + \delta, y - 4y\delta]$ a připuštěme $\delta \in \mathbb{R}$ (v okamžiku, kdy δ mění znaménko, přechází bod D parabolou p). Pak (při úpravě využijeme toho, že $2y^2 - x + 1 = 0$, neboť $[x, y] \in p$)

$$f(D) = (2(y - 4y\delta)^2 - x - \delta + 1)^3 = (\delta(32\delta y^2 - 16y^2 - 1))^3.$$

Nechť nyní $A = [x, y] \in p$ je libovolný bod na parabole p . Pro hodnoty (ať kladné nebo záporné) δ dostatečně blízké k nule je hodnota výrazu ve vnitřní závorce záporná, protože $-16y^2 - 1 \leq -1$ pro každé $y \in \mathbb{R}$. Odtud vidíme, že pro *kladná* δ blízká k nule je $f(D) < 0 = f(A)$, kdežto pro *záporná* δ blízká k nule je $f(D) > 0 = f(A)$. V obecném bodě $A \in p$ tedy není lokální extrém, viz obrázek.



3 Taylorův polynom

Příklad: Určete Taylorův polynom 2. stupně

- funkce $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{xy}$ v bodě $A = [2, -1]$;
- funkce $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x - y}$ v bodě $A = [-3, 2]$;
- funkce $f(x, y) = \arctg(xy)$ v bodě $A = [-1, 3]$;
- funkce $f(x, y) = \frac{1 + \sin(x)}{\cos(y)}$ v bodě $A = [-\pi/4, \pi/4]$.

Výsledky:

- a) $T_2(x, y) = -1 - \frac{5x}{4} - 2y + \frac{(x-2)^2}{8} - (x-2)(y+1) - 2(y+1)^2;$
- b) $T_2(x, y) = -\frac{2}{5} + \frac{19x}{25} + \frac{6y}{25} - \frac{6(x+3)^2}{125} - \frac{13(x+3)(y-2)}{125} - \frac{6(y-2)^2}{125};$
- c) $T_2(x, y) = -\operatorname{arctg} 3 - \frac{y}{10} + \frac{3}{5} + \frac{3x}{10} + \frac{27(x+1)^2}{100} - \frac{2(x+1)(y-3)}{25} + \frac{3(y-3)^2}{100};$
- d) $T_2(x, y) = -\frac{(-2+\sqrt{2})\sqrt{2}}{2} + x + \frac{\pi}{4} - \frac{(-2+\sqrt{2})(y-\frac{\pi}{4})\sqrt{2}}{2} + \frac{(x+\frac{\pi}{4})^2}{2}$
 $+ \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3(-2+\sqrt{2})\sqrt{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2}{4}.$

4 Funkce definovaná implicitně

Příklad: Ukažte, že rovnicí $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 2$ a podmínkou $\varphi(e^2) = 0$ je implicitně definovaná funkce $y = \varphi(x)$ proměnné x , a vypočítejte derivaci $\varphi'(e^2)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = \varphi(x)$ v bodě $[e^2, 0]$. Dále odvoďte výraz pro $\varphi''(x)$, spočítejte $\varphi''(e^2)$ a v bodě $x_0 = e^2$ odvoďte z funkce φ Taylorův polynom druhého stupně.

Řešení: Vodítkem nám bude prezentace⁴.

Definujme funkci $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 2 = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x}\right) - 2$, pak je zadaná rovnice ekvivalentní se vztahem $f(x, y) = 0$. Bod $A = [x_0, y_0] = [e^2, 0]$ splňuje $f(A) = \ln e^2 - 0 - 2 = 0$. Derivujme

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)} = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)} = \frac{-x + y}{x^2 + y^2},$$

obě parciální derivace jsou spojité v nějakém okolí bodu A (jmenovatel je kladný v malém okolí bodu A). Dosazením zjistíme, že $f'_y(e^2, 0) = -e^{-2} \neq 0$, tím je ověřen i třetí předpoklad pro existenci implicitně definované funkce $y = \varphi(x)$ v nějakém okolí bodu e^2 a s vlastností $f(x, \varphi(x)) = 0$ pro x z tohoto okolí.

Určíme derivaci

$$\varphi'(e^2) = -\frac{f'_x(A)}{f'_y(A)} = -\frac{e^{-2}}{-e^{-2}} = 1$$

a tečnu

$$y = \varphi'(e^2)(x - e^2) + \varphi(e^2) = x - e^2.$$

Z předchozího víme, že

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{x + y}{x - y}. \quad (1)$$

Pak $\varphi''(x)$ získáme opětovným derivováním výrazu (1) s tím, že y je funkcí x a $y' = y'(x) = \varphi'(x)$

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \left(\frac{x + y}{x - y}\right)' = \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} = \frac{\left(1 + \frac{x+y}{x-y}\right)(x - y) - (x + y)\left(1 - \frac{x+y}{x-y}\right)}{(x - y)^2} \\ &= \frac{2x - x - y + \frac{(x+y)^2}{x-y}}{(x - y)^2} = \frac{x - y + \frac{(x+y)^2}{x-y}}{(x - y)^2} = \frac{(x - y)^2 + (x + y)^2}{(x - y)^3} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}. \end{aligned}$$

⁴https://mat.fsv.cvut.cz/chleoun/JCh_vyuka/101MM2G/MM2G-8spredn-derivace.pdf

Pozor, při kopírování odkazu se mohou změnit některé speciální znaky, adresa je pak nesprávná a objeví se chybové hlášení o neexistující stránce.

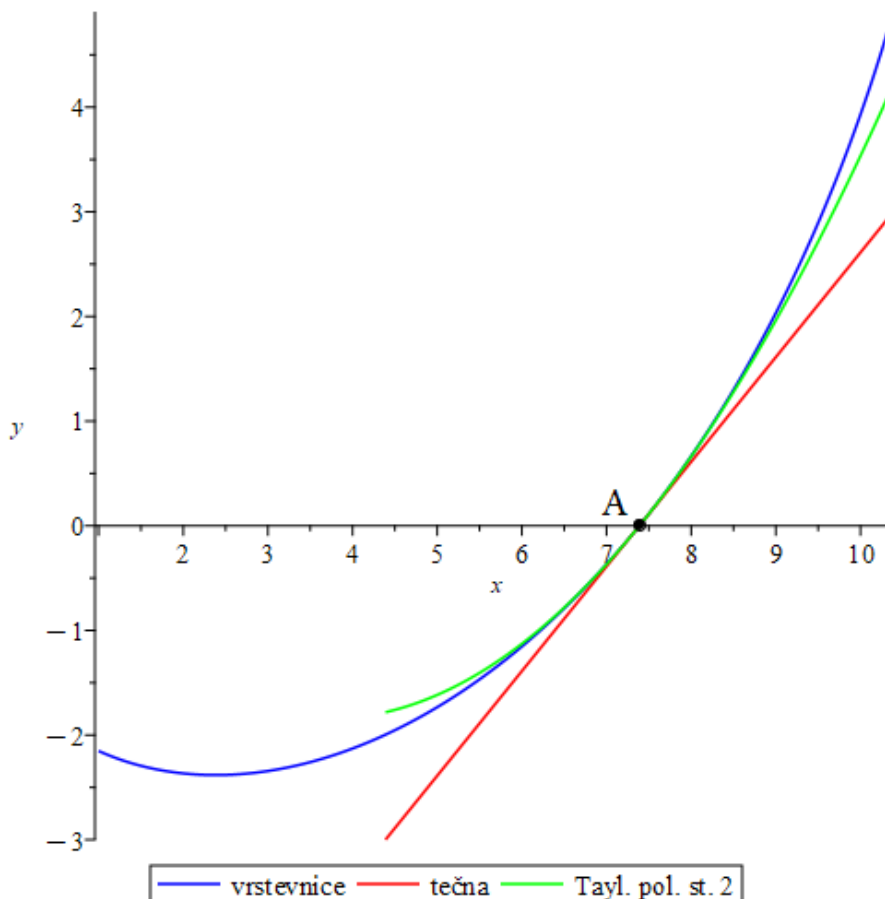
Dosazením $x = e^2$ a $y = 0$ obdržíme $\varphi''(e^2) = \frac{2}{e^2}$.

Pokud by cílem bylo jen spočítání $\varphi''(e^2)$, tak stačí dosadit hned do výrazu s y' , neboť $y' = y'(e^2) = \varphi'(e^2) = 1$, jak již víme. Vskutku

$$\varphi''(e^2) = \frac{(1+1)(e^2-0) - (e^2+0)(1-1)}{(e^2-0)^2} = \frac{2}{e^2}.$$

Získané derivace můžeme využít k sestrojení Taylorova polynomu T_2 , jenž v okolí bodu $x = e^2$ aproximuje funkci φ ;

$$T_2(x) = 0 + 1(x - e^2) + \frac{2}{2e^2}(x - e^2)^2 = x - e^2 + \frac{1}{e^2}(x - e^2)^2.$$



5 Ortogonalizace a aproximace funkcí

Příklad:⁵ a) Nejprve k systému funkcí $\left\{\frac{1}{x}, x, x^2\right\}$ určete na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ systém funkcí ortogonálních vzhledem ke skalárnímu součinu $(f, g) = \int_1^2 f(x)g(x) dx$. Za první ortogonální funkci zvolte $1/x$, pak ortogonalizujte x , nakonec x^2 . Integrujte přesně a uveďte postup výpočtu. *Rada:* Zde i v b) a c) se některé dílčí výpočty (integrace) mohou opakovat, využijte již dříve vypočtené mezivýsledky.

b) Potom ze získané trojice ortogonálních funkcí vyberte jen dvě první funkce (tj. neobsahující kvadratický člen x^2). S užitím těchto dvou ortogonálních funkcí metodou nejmenších čtverců na daném intervalu aproximujte funkci $y(x) = \frac{\ln x}{x}$ funkcí y_{apr} . Počítejte přesně, kalkulačku použijte až v úplném závěru, kdy y_{apr} upravte na tvar $y_{\text{apr}} = \alpha \frac{1}{x} + \beta x$ s (kalkulačkovými) reálnými čísly α a β .

⁵Zadání ze zkoušky 14. 6. 2023.

c) S využitím $(y, y) = \int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{\ln^2 2}{2} - \ln 2 + 1$. Vypočítejte chybu aproximace $\|y - y_{\text{apr}}\|_{L^2(0,2)}$.

Chybu nemusíte vyjadřovat přesným výrazem, postačí jeho vyčíslení pomocí kalkulačky.

d) Vypočtete $I = \int_1^2 y(x) dx$ přesnou integrací. Potom I aproximujte hodnotou I_L získanou numerickou integrací lichoběžníkovou metodou s krokem $h = 1/4$. Odhadněte shora (viz oficiální tahák pro MM2G) hodnotu $|I - I_L|$ a srovnajte odhad se skutečnou hodnotou $|I - I_L|$. V odhadu je mj. nutné určit maximum absolutní hodnoty druhé derivace, vysvětlete, jak jste toto maximum našli. *Rada:* Zamyslete se nad třetí derivací.

Řešení: a) Označme zadané funkce po řadě u_1, u_2, u_3 . Za výchozí ortogonální funkci zvolme

$\hat{u}_1 = u_1 = 1/x$. Hledáme $\hat{u}_2 = u_2 + c_1 \hat{u}_1 = x + c_1 \frac{1}{x}$, aby platilo

$$\begin{aligned} 0 = (\hat{u}_1, \hat{u}_2) &= \int_1^2 \frac{1}{x} \left(x + c_1 \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(1 + c_1 \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= 1 + c_1 \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = 1 - c_1 \left[\frac{1}{2} - 1 \right] = 1 + c_1 \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = -2 \Rightarrow \hat{u}_2 = x - \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Nyní $\hat{u}_3 = u_3 + d_1 \hat{u}_1 + d_2 \hat{u}_2$ a vztahy

$$\begin{aligned} 0 = (\hat{u}_1, \hat{u}_3) &= (\hat{u}_1, u_3 + d_1 \hat{u}_1) = \int_1^2 \frac{1}{x} \left(x^2 + d_1 \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(x + d_1 \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 + d_1 \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + d_1 \frac{1}{2} \Rightarrow d_1 = -3, \\ 0 = (\hat{u}_2, \hat{u}_3) &= (\hat{u}_2, u_3) + d_2 (\hat{u}_2, \hat{u}_2) = \int_1^2 \left(x - \frac{2}{x} \right) x^2 dx + d_2 \int_1^2 \left(x - \frac{2}{x} \right)^2 dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - 2x) dx + d_2 \int_1^2 \left(x^2 - 4 + \frac{4}{x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 - 2 \frac{3}{2} + d_2 \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 - 4 + 4 \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} + d_2 \left(\frac{7}{3} - 2 \right) = \frac{3}{4} + d_2 \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow d_2 = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

vedou k $\hat{u}_3 = x^2 - 3\frac{1}{x} - \frac{9}{4} \left(x - \frac{2}{x} \right) = x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}\frac{1}{x}.$

b) MNČ: Soustava lineárních algebraických rovnic pro $y_{\text{apr}} = c_1 \tilde{u}_1 + c_2 \tilde{u}_2$ se díky ortogonalitě redukuje na $(\hat{u}_i, \hat{u}_i) a_i = (y, \hat{u}_i), i = 1, 2$.

V předchozích mezivýsledcích se už objevilo (jako integrály u c_1 a d_2)

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_1) = \frac{1}{2} \text{ a } (\hat{u}_2, \hat{u}_2) = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}(y, \hat{u}_1) &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = - \left[\frac{1}{x} \ln x \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\&= -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}, \\(y, \hat{u}_2) &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x} \left(x - \frac{2}{x} \right) dx = \int_1^2 \ln x \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) dx \\&= \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 - \frac{2}{x^2} & v = x + \frac{2}{x} \end{array} \right| \\&= \left[\ln x \left(x + \frac{2}{x} \right) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \left(x + \frac{2}{x} \right) dx = 3 \ln 2 - \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right) dx \\&= 3 \ln 2 - 1 - 2 \frac{1}{2} = 3 \ln 2 - 2\end{aligned}$$

Maticově

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \\ 3 \ln 2 - 2 \end{pmatrix}, \text{ řešení } \begin{pmatrix} 1 - \ln 2 \\ -6 + 9 \ln 2 \end{pmatrix}.$$

$$y_{\text{apr}}(x) = (1 - \ln 2) \frac{1}{x} + (-6 + 9 \ln 2) \left(x - \frac{2}{x} \right) = \frac{13 - 19 \ln 2}{x} + (9 \ln 2 - 6)x.$$

$$y_{\text{apr}}(x) \approx 0,238324625x - 0,16979643 \frac{1}{x}.$$

c) K odhadu chyby potřebujeme

$$\begin{aligned}(y, y) &= \int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{cc} u = \ln^2 x & u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = \left[-\frac{\ln^2 x}{x} \right]_1^2 + 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx \\&= \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln^2 2}{2} - 2 \left[\frac{\ln x}{x} \right]_1^2 + 2 \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\&= -\frac{\ln^2 2}{2} - \ln 2 + 1 \approx 0,0666263124\end{aligned}$$

$$\text{a také } \begin{pmatrix} 1 - \ln 2 \\ -6 + 9 \ln 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \\ 3 \ln 2 - 2 \end{pmatrix} \approx 0,06601220.$$

$$\text{Pak } \|y - y_{\text{apr}}\|_{L^2(0,2)} = \sqrt{0,06662631 - 0,06601220} = \sqrt{0,00061411} = 0,02478124291.$$

$$\text{d) } I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{cc} t = \ln x & x = 1, \Rightarrow t = 0 \\ dt = \frac{dx}{x}, & x = 2 \Rightarrow t = \ln 2 \end{array} \right| = \int_0^{\ln 2} t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Tedy $I \approx 0,2402265070$.

Hodnoty funkce y v bodech sítě $(1, 5/4, 3/2, 7/4, 2)$ jsou $(0, 4 \ln(5/4)/5, 2 \ln(3/2)/3, 4 \ln(7/4)/7, \ln(2)/2)$

$$\text{a } I_S = \frac{\ln(\frac{5}{4})}{5} + \frac{\ln(\frac{3}{2})}{6} + \frac{\ln(\frac{7}{4})}{7} + \frac{\ln(2)}{16} \approx 0,2354730397.$$

$$|I - I_L| = |0,2402265070 - 0,2354730397| = 0,0047534673.$$

K odhadu chyby potřebujeme (viz oficiální tahák) $y''(x) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$.

Je to na $[1, 2]$ záporná funkce a je rostoucí, neboť $y'''(x) = \frac{11 - 6 \ln x}{x^4} > 0$ na $[1, 2]$, přestože $-6 \ln x$ je záporná a klesající. Tedy maxima $|y''(x)|$ se na $[1, 2]$ nabývá v $x = 1$.

$$\text{Pak } |R_h| \leq \frac{2-1}{12} \frac{1}{4^2} \max_{x \in [1,2]} |y''(x)| = \frac{1}{12} \frac{1}{16} 3 = \frac{1}{64} \approx 0,015625.$$

Odhad 0,015625 je větší než skutečná chyba 0,0047534673.

Příklad: Na intervalu $I = [-2, 2]$ jsou dány funkce $\varphi_1 = 1 + x$ a $\varphi_2 = x^2$. Metodou nejmenších čtverců aproximujte na I funkci $g = x^4$. Spočítejte velikost chyby aproximace.

Mezivýsledky a výsledky: Bez ortogonalizace, rozšířená soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{28}{3} & \frac{16}{3} & \frac{64}{5} \\ \frac{16}{3} & \frac{64}{5} & \frac{256}{7} \end{array} \right)$$

s řešením $(-12/35, 3)^T$, tj. $g_{\text{apr}} = 3x^2 - \frac{12}{35}x - \frac{12}{35}$.

S ortogonalizací. Ortogonální systém $\left\{ 1 + x, x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{4}{7} \right\}$. Rozšířená soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{28}{3} & 0 & \frac{64}{5} \\ 0 & \frac{1024}{105} & \frac{1024}{35} \end{array} \right)$$

s řešením $(48/35, 3)^T$, $g_{\text{apr}} = \frac{48}{35}(x+1) + 3\left(x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{4}{7}\right) = 3x^2 - \frac{12}{35}x - \frac{12}{35}$.

Jiný ortogonální systém $\left\{ x^2, -\frac{5}{12}x^2 + x + 1 \right\}$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{64}{5} & 0 & \frac{256}{7} \\ 0 & \frac{64}{9} & -\frac{256}{105} \end{array} \right)$$

s řešením $(20/7, -12/35)^T$.

$$\text{Norma } \|g - g_{\text{apr}}\|_{L^2(-2,2)} = \sqrt{\frac{13312}{1575}} \approx 2,907243280.$$

Příklad: Na intervalu $I_1 = [-3, 3]$ jsou dány funkce $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x + 2$, $\varphi_2 = x^2 - x$ a $\varphi_3 = x^4$. Vytvořte z nich ortogonální systém, při ortogonalizaci postupujte od φ_0 k φ_3 . Varianta: totéž na intervalu $I_2 = [0, 3]$.

Výsledky: Na I_1 : $\left\{ 1, x, x^2 - 3, x^4 - \frac{54}{7}x^2 + \frac{243}{35} \right\}$.
Na I_2 : $\left\{ 1, x - \frac{3}{2}, x^2 - 3x + \frac{3}{2}, x^4 - \frac{108}{7}x^2 + \frac{864}{35}x - \frac{243}{35} \right\}$.

6 Vrstevnice a spádnic

Příklad: Pro funkci $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6$

- určete typ křivek, které tvoří vrstevnice; vrstevnice načrtněte; vypočítejte souřadnice průsečíků vrstevnice odpovídající kótě $v \in \mathbb{R}$ se souřadnými osami;
- sestavte a vyřešte diferenciální rovnici průmětů spádníc v rovině xy , průměty spádníc načrtněte (nezapomeňte na speciální případ(y)!).

Výsledky:

a) Upravme $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 2(x - 1)^2 + (y - 2)^2$.

Po úpravě $2(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = v$ na $(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{2} = \frac{v}{2}$ vidíme, že vrstevnice jsou elipsy se středem v bodě $[1, 2]$.

Průsečíky s osami. Je-li $x = 0$, pak $|y - 2| = \sqrt{v - 2}$, tj. $y = 2 \pm \sqrt{v - 2}$, ale jen pro $v \geq 2$. Je-li $y = 0$, pak $|x - 1| = \sqrt{(v - 4)/2}$, tj. $x = 1 \pm \sqrt{(v - 4)/2}$, ale jen pro $v \geq 4$.

b) Diferenciální rovnice průmětů spádnic $f'_x(x, y)y'(x) = f'_y(x, y)$. Po dosazení parciálních derivací $2(x - 1)y' = (y - 2)^2$. Vidíme, že $y(x) = 2$ je řešení, průmětem spádnice je přímka $y = 2$. Další řešení hledáme metodou separace proměnných, tj. nejprve od diferenciální rovnice přejdeme k rovnosti integrálů, pak integrujeme a vyjádříme (pokud to jde) y jako funkci proměnné x :

$$\begin{aligned} 4(x - 1) \frac{dy}{dx} &= 2(y - 2), \\ \frac{1}{y - 2} dy &= \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} dx, \\ \int \frac{1}{y - 2} dy &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx, \\ \ln |y - 2| &= \frac{1}{2} \ln |x - 1| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ \ln |y - 2| &= \ln(C\sqrt{|x - 1|}), \quad C > 0, \\ |y - 2| &= C\sqrt{|x - 1|}, \quad C > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Výraz (2) upravíme⁶ s přihlédnutím k množinám

$$\begin{aligned} M_1 &= (-\infty, 1] \times (-\infty, 2], \quad y = 2 - C\sqrt{1 - x}, \\ M_2 &= (-\infty, 1] \times [2, \infty), \quad y = 2 + C\sqrt{1 - x}, \\ M_3 &= [1, \infty) \times (-\infty, 2], \quad y = 2 - C\sqrt{x - 1}, \\ M_4 &= [1, \infty) \times [2, \infty), \quad y = 2 + C\sqrt{x - 1}. \end{aligned}$$

Obrázek ukazuje vrstevnice (hnědá, přerušovaná) a průměty spádnic: v M_1 červená, $x \leq 1$ a $y \leq 2$; v M_2 magenta, $x \leq 1$ a $y \geq 2$; v M_3 zelená, $x \geq 1$ a $y \leq 2$; v M_4 modrá, $x \geq 1$ a $y \geq 2$.

Z rovnice, která byla odvozena za předpokladu, že průmět spádnice je grafem funkce $y = y(x)$, nedostaneme průměty spádnic, které jsou kolmé na osu x .⁷ Nicméně průmět spádnice daný vztahem $x = 1$ (černě, přerušovaně) snadno získáme z obrázku vrstevnic. Jde vlastně o limitní případ parabolických průmětů spádnic.

⁶Trochu jiný postup preferuje pan kolega Milan Bořík. V absolutní hodnotě na levé straně (2) je číslo buď kladné, nebo záporné (připomeňme, že případ $y = 2$ jsme už zpracovali). Je-li kladné, lze levou absolutní hodnotu bez dalších úprav odstranit. Je-li záporné, lze levou absolutní hodnotu odstranit s tím, že na pravé straně uvažujeme konstantu $-C$. Obě možnosti můžeme sjednotit zavedením konstanty $K \in \mathbb{R}$

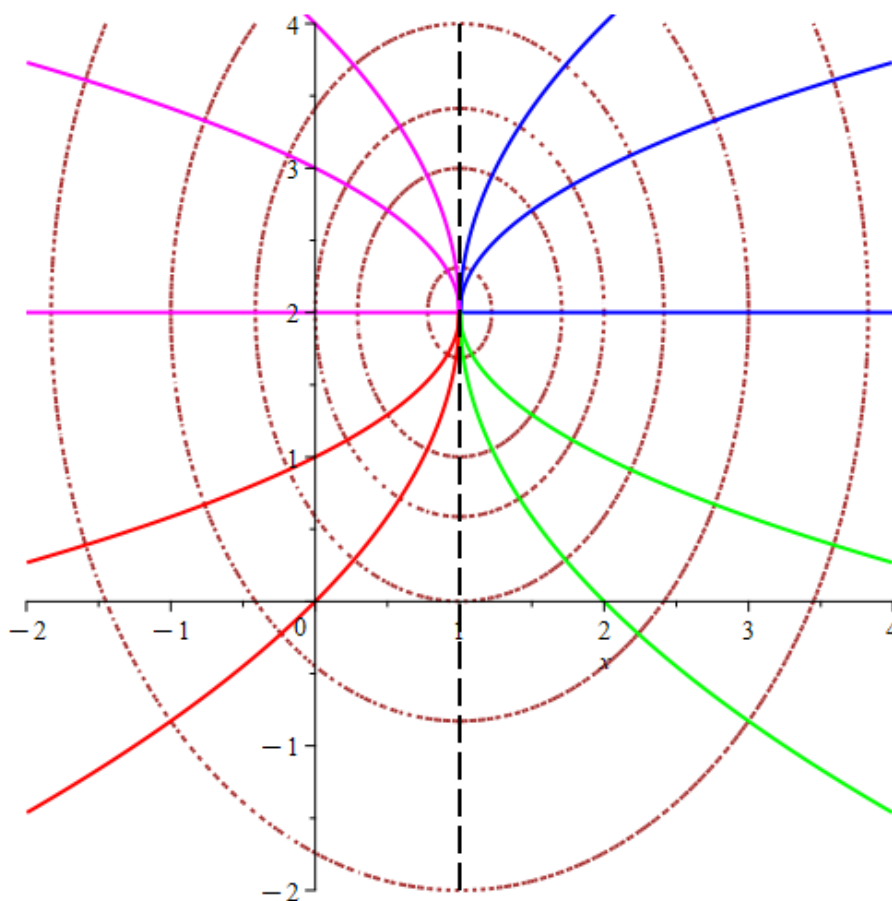
$$\begin{aligned} y - 2 &= K\sqrt{|x - 1|}, \\ y &= 2 + K\sqrt{|x - 1|}. \end{aligned}$$

Při $K = 0$ jsme dokonce získali i ono konstatní řešení $y = 2$. Místo čtyř případů $M_1, \dots, M_4$ dostaneme jen dva

$$\widehat{M}_1 = (-\infty, 1], \quad y = 2 + K\sqrt{1 - x} \quad \text{a} \quad \widehat{M}_2 = [1, \infty), \quad y = 2 + K\sqrt{x - 1},$$

kde $K \in \mathbb{R}$.

⁷Takové průměty bychom dostali z rovnice odvozené za předpokladu $x = x(y)$, avšak nezískali bychom průměty spádnic kolmé na osu y .



Příklad: Pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^3$

- napište obecné rovnice vrstevnic; vrstevnice načrtněte; vypočtete souřadnice průsečíků vrstevnice odpovídající kótě $v \in \mathbb{R}$ se souřadnými osami;
- sestavte a vyřešte diferenciální rovnici průmětů spádnic v rovině xy , průměty spádnic načrtněte (nezapomeňte na speciální případ(y)!).

Výsledky:

a) Implicitní funkci $x^2 + y^3 = v$ lze v tomto případě vyjádřit i explicitně $y = \sqrt[3]{v - x^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$. Průsečík s osou y v bodě $[0, \sqrt[3]{v}]$, průsečíky s osou x pouze pro $v \geq 0$, a to v bodech $[-\sqrt{v}, 0]$ a $[\sqrt{v}, 0]$, pro $v = 0$ splývají v jeden bod dotyku s osou x .

b) Diferenciální rovnice průmětů spádnic $f'_x(x, y)y'(x) = f'_y(x, y)$. Po dosazení partiálních derivací $2xy' = 3y^2$. Vidíme, že $y(x) = 0$ je řešení, průmětem spádnice je osa x . Další řešení hledáme metodou separace proměnných, tj. nejprve od diferenciální rovnice přejdeme k rovnosti integrálů, pak integrujeme

a vyjádříme (pokud to jde) y jako funkci proměnné x :

$$\begin{aligned}
2x \frac{dy}{dx} &= 3y^2, \\
\frac{2}{y^2} dy &= \frac{3}{x} dx, \\
\int \frac{2}{y^2} dy &= \int \frac{3}{x} dx, \\
-2 \frac{1}{y} &= 3 \ln |x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
-2 \frac{1}{y} &= \ln(|x|^3) + \ln C_2, \quad C_2 > 0, \\
-2 \frac{1}{y} &= \ln(C_2 |x|^3), \\
-2 \frac{1}{y} &= 3 \ln(\sqrt[3]{C_2} |x|), \\
y &= -\frac{2}{3 \ln(\sqrt[3]{C_2} |x|)}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Výraz (3) už dává dobrou představu o průběhu a definičním oboru⁸ řešení, avšak bude vhodné se zbavit absolutní hodnoty tím, že kladnost součinu $\sqrt[3]{C_2}|x|$ zajistíme kladností nebo záporností konstanty na místě $\sqrt[3]{C_2}$.

Pro $C < 0$ je $y(x) = -\frac{2}{3 \ln(Cx)}$, kde $x \in (-\infty, 1/C)$ nebo $x \in (1/C, 0)$.

Pro $C > 0$ je $y(x) = -\frac{2}{3 \ln(Cx)}$, kde $x \in (0, 1/C)$ nebo $x \in (1/C, \infty)$.

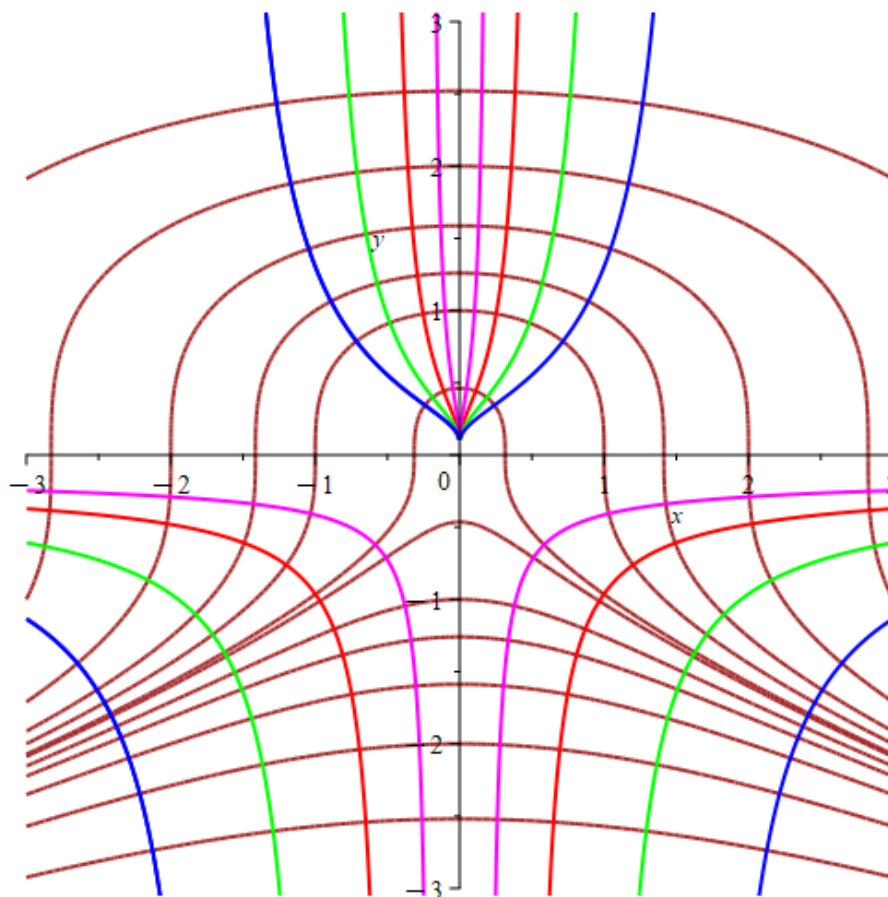
Vidíme, že pro každé $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ má řešení dvě větve.

Obrázek ukazuje vrstevnice (hnědá) a průměty spádnic: pro $C = -0,6$ (modrá, $x < 0$), $C = 0,6$ (modrá, $x > 0$), $C = -1$ (zelená, $x < 0$), $C = 1$ (zelená, $x > 0$), $C = -2$ (červená, $x < 0$), $C = 2$ (červená, $x > 0$), pro $C = -5$ (magenta, $x < 0$), pro $C = 5$ (magenta, $x > 0$).

Svislá asymptota průmětu spádnic (pro pevné $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) je $x = 1/C$, vodorovná asymptota je osa x .

Průmětem spádnice, který neodvodíme z rovnice, je osa y .

⁸Nesmí být $x = 0$ a $\sqrt[3]{C_2}|x| = 1$.



7 Lineární obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

7.1 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Příklad: Vyřešte Cauchyovu úlohu $y'' + 6y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

Řešení: Charakteristický polynom $\lambda^2 + 6\lambda = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -6$. Z teorie víme (viz např. oficiální tahák pro MM2G), že fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1$ a $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-6x}$.

Obecné řešení: $y(x) = c_1 + c_2 e^{-6x}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Z počátečních podmínek odvodíme rovnice pro c_1 a c_2 :

$$y(0) = c_1 + c_2 \stackrel{\text{zadáno}}{=} 2,$$

$$y'(0) = -6c_2 e^{-6x} \Big|_{x=0} = -6c_2 \stackrel{\text{zadáno}}{=} 6.$$

Odtud $c_1 = 3$, $c_2 = -1$ a řešení C. úlohy $y(x) = 3 - e^{-6x}$, $x \in (-\infty, \infty)$. Správnost řešení lze ověřit jednoduchou zkouškou, tj. dosazením funkce y do zadané rovnice a též ověřením splnění počátečních podmínek.

Příklad: Vyřešte Cauchyovu úlohu $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(2) = e^7$, $y'(2) = e^6$.

Řešení: Charakteristický polynom $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda = 3$. Z teorie víme (viz např. oficiální tahák pro MM2G), že fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = e^{\lambda x} = e^{3x}$ a $y_2 = x e^{\lambda x} = x e^{3x}$. Obecné řešení: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Z počátečních podmínek odvodíme rovnice pro c_1 a c_2 :

$$y(2) = c_1 e^6 + c_2 2e^6 \stackrel{\text{zadáno}}{=} e^7 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = e,$$

$$y'(2) = (c_1 3e^{3x} + c_2 e^{3x} + c_2 3x e^{3x}) \Big|_{x=2} = (3c_1 + 7c_2) e^6 \stackrel{\text{zadáno}}{=} e^6 \Rightarrow 3c_1 + 7c_2 = 1.$$

Odtud $c_1 = 7e - 2$, $c_2 = 1 - 3e$ a řešení C. úlohy $y(x) = (7e - 2 + x - 3ex)e^{3x}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Příklad: Vyřešte Cauchyovu úlohu $y'' - 4y' + 20y = 0$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 9$.

Řešení: Charakteristický polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = 2 - 4i$ a $\lambda_2 = 2 + 4i$. Z teorie víme (viz např. oficiální tahák pro MM2G), že fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = e^{2x} \cos 4x$ a $y_2 = e^{2x} \sin 4x$. Obecné řešení: $y(x) = c_1 e^{2x} \cos 4x + c_2 e^{2x} \sin 4x$, $x \in (-\infty, \infty)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Z počátečních podmínek odvodíme rovnice pro c_1 a c_2 :

$$y(0) = c_1 \stackrel{\text{zadáno}}{=} \frac{1}{2},$$

$$y'(0) = ((-4c_1 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x) e^{2x} + (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) 2e^{2x})|_{x=0} = 2c_1 + 4c_2 \stackrel{\text{zadáno}}{=} 9.$$

Odtud $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 2$ a řešení C. úlohy $y(x) = (\frac{1}{2} \cos 4x + 2 \sin 4x) e^{2x}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

7.2 Metoda redukce řádu

Příklad: Vyřešte Cauchyovu úlohu $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, jestliže víte, že funkce $y(x) = x$ vyhovuje diferenciální rovnici.⁹

Řešení: Rovnici je zapotřebí převést do tvaru, v němž je koeficient u y'' roven jedné:

$$y'' - \underbrace{\frac{2x}{1-x^2}}_{p(x)} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0.$$

Z upraveného tvaru ihned vidíme podmínku $|x| \neq 1$. Odtud vznikají tři podintervaly reálné osy, a to $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$ a $I_3 = (1, \infty)$. Definiční obor hledaného řešení bude ležet¹⁰ v intervalu I_2 , neboť bod, v němž jsou zadány počáteční podmínky, leží v intervalu I_2 .

Při výpočtu druhého (tj. lineárně nezávislého) řešení y_2 postupujeme podle např. oficiálního taháku pro MM2G:

$$v(x) = \int p(x) dx = \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \ln |1-x^2| = \ln(1-x^2), \quad (4)$$

$$u(x) = e^{-v(x)} = e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1 \int \frac{u(x)}{y_1^2(x)} dx = x \int \frac{\frac{1}{1-x^2}}{x^2} dx \stackrel{\text{rozklad}}{=} x \int \frac{1}{x^2} dx - x \int \frac{1}{x^2-1} dx \\ &= -x \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -1 - \frac{x}{2} \ln \frac{1-x}{x+1} = -1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \end{aligned} \quad (5)$$

v (4) a (5) jsme při odstraňování absolutní hodnoty využili toho, že $x \in I_2$.

Obecné řešení: $y(x) = c_1 x + c_2 \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)$, $x \in I_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Určení parametrů c_1 a c_2 :

$$y(0) = -c_2 \stackrel{\text{zadáno}}{=} -2 \Rightarrow c_2 = 2,$$

$$y'(0) = \left(c_1 + c_2 \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+x}{1-x} + x(\ln \dots)' \right) \right) \Big|_{x=0} = c_1 \stackrel{\text{zadáno}}{=} 1,$$

při výpočtu $y'(0)$ není nutné derivovat až do úplného konce, neboť člen $x(\ln \dots)'$ je pro $x = 0$ roven nule.

Řešení Cauchyovy úlohy: $y(x) = x \left(1 + \ln \frac{1+x}{1-x} \right) - 2$, $x \in (-1, 1)$.

7.3 Rovnice se speciálními nekonstatními koeficienty

Příklad: Vyřešte Cauchyovu úlohu $x^2 y'' + 7xy' + 4y = 0$, $y(1) = -2$, $y'(1) = -1$.

Řešení: Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = x^s$, viz oficiální tahák pro MM2G. Po dosazení do rovnice a po úpravě dostaneme $x^s(s^2 + 6s + 4) = 0$. Rovnost má platit pro všechna x z nějakého intervalu (definičního

⁹Jde jen o rovnici, nikoli o počáteční podmínky. Ty funkce $y(x) = x$ zřejmě nesplňuje.

¹⁰Prozatím nevíme, zde hledané řešení bude definováno na celém intervalu I_2 nebo jen na jeho části.

intervalu řešení), což může nastat jen tehdy, pokud $s^2 + 6s + 4 = 0$. Odtud $s_1 = -3 - \sqrt{5}$, $s_2 = -3 + \sqrt{5}$. Fundamentální systém tedy sestává z funkcí $y_1(x) = x^{-3-\sqrt{5}}$ a $y_2(x) = x^{-3+\sqrt{5}}$.

Obecné řešení $y(x) = c_1 x^{-3-\sqrt{5}} + c_2 x^{-3+\sqrt{5}}$ nás zajímá na intervalu $(0, \infty)$, neboť v něm leží bod, v němž jsou zadány počáteční podmínky.

Z počátečních podmínek dostaneme rovnice $c_1 + c_2 = 1$ a $(-3 - \sqrt{5})c_1 + (-3 + \sqrt{5})c_2 = -1$, z nich nakonec řešení Cauchyovy úlohy: $y(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)x^{-3-\sqrt{5}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)x^{-3+\sqrt{5}}$, $x \in (0, \infty)$.

Příklad: Vyřešte Cauchyovu úlohu $x^2 y'' + 7xy' + 9y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.

Řešení: Stejným postupem jako v předchozím příkladu odvodíme rovnici $s^2 + 6s + 9 = 0$ s dvojnásobným kořenem $s = -3$. Jedno řešení tedy je $y_1(x) = x^{-3}$ (pro $x \neq 0$), druhé nalezneme metodou redukce řádu, soustředíme se na interval $(0, \infty)$.

Nejprve upravíme rovnici na tvar $y'' + \underbrace{\frac{7}{x}}_{p(x)} y' + \frac{9}{x^2} y = 0$.

$$v(x) = \int p(x) dx = \int \frac{7}{x} dx = 7 \ln |x| = 7 \ln x, \quad (6)$$

$$u(x) = e^{-v(x)} = e^{-7 \ln x} = x^{-7},$$

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{u(x)}{y_1^2(x)} dx = x^{-3} \int \frac{x^{-7}}{x^{-6}} dx = x^{-3} \int \frac{1}{x} dx = \frac{\ln x}{x^3}, \quad (7)$$

v (6) a (7) jsme využili toho, že $x > 0$.

Obecné řešení: $y(x) = c_1 \frac{1}{x^3} + c_2 \frac{\ln x}{x^3}$, $x > 0$.

Z počátečních podmínek dostaneme rovnice $c_1 = 2$ a $-3c_1 + c_2 = -1$, tj. $c_2 = 5$. Řešení Cauchyovy úlohy: $y(x) = \frac{2 + 5 \ln x}{x^3}$, $x > 0$.

Příklad: Vyřešte Cauchyovu úlohu $x^2 y'' + 7xy' + 9y = 0$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = -1$.

Řešení: Oproti předchozímu příkladu je změněn jen bod, v němž jsou zadány počáteční podmínky. Opět dostaneme jedno řešení $y_1(x) = x^{-3}$, ale tentokrát se zaměříme na interval $(-\infty, 0)$. Druhé řešení získáme metodou redukce řádu, při úpravách využijeme toho, že $x < 0$.

$$v(x) = \int p(x) dx = \int \frac{7}{x} dx = 7 \ln |x| = 7 \ln(-x),$$

$$u(x) = e^{-v(x)} = e^{-7 \ln(-x)} = (-x)^{-7} = -x^{-7},$$

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{u(x)}{y_1^2(x)} dx = x^{-3} \int \frac{-x^{-7}}{x^{-6}} dx = -x^{-3} \int \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln(-x)}{x^3}.$$

Obecné řešení: $y(x) = c_1 \frac{1}{x^3} + c_2 \frac{\ln(-x)}{x^3}$, $x < 0$.

Z počátečních podmínek dostaneme rovnice $-c_1 = 2$ a $-3c_1 + c_2 = -1$, tj. $c_2 = -7$. Řešení Cauchyovy úlohy: $y(x) = -\frac{2 + 7 \ln(-x)}{x^3}$, $x < 0$.

Literatura

- [1] K. Rektorys a spolupracovníci: Přehled užití matematiky I (sedmé vydání). Prometheus, Praha, 2000.