

Předmět: MM2G

Dnešní látka

- ▶ určitý integrál – funkce horní meze
- ▶ nevlastní integrály
- ▶ některé aplikace určitého integrálu

M. Kočandrlová, J. Černý: GEO-MATEMATIKA I, oddíl III,
kapitoly 2, 5, 6

Text doc. A. Nekvindy

<http://mat.fsv.cvut.cz/nales/prednasky2/kniha.pdf>

kapitola 5 (od strany 44), aplikace v kapitole 4 (od strany 39)

Funkce horní meze určitého integrálu

Připomeňme, že (pokud existuje) určitý integrál $\int_a^b f(t) dt$ je číslo s geometrickým významem obsahu plochy vymezené grafem funkce f a intervalem $[a, b]$ na ose t .

Představme si, že dolní mez integrálu bude pevná, ale horní nikoli. Pak hodnota určitého integrálu bude záviset na horní mezi — dostaneme funkci jedné proměnné, tj. horní meze. Podrobněji:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pro $x \in [a, b]$ definujeme funkci F předpisem

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

pak $\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$, kde G je nějaká primitivní funkce ke spojitě funkci f na intervalu $[a, b]$.

Pozorování:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (G(x) - G(a)) = f(x),$$

kde $x \in (a, b)$.

Každou primitivní funkci W tedy lze psát

$$W(x) = \int_a^x f(t) dt + C, \text{ kde } C \in \mathbb{R} \text{ je konstanta.}$$

Analogicky $g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt$, pokud g' je spojitá na $[a, b]$ (lze oslabit).

Pozor: Obecně $g(x) \neq \int_a^x g'(t) dt$, rovnost jen pokud $g(a) = 0$.

Funkce (integrál) dolní meze: $\widehat{F}(x) \int_x^b f(t) dt = G(b) - G(x)$,

kde $x \in [a, b]$ a G je nějaká primitivní funkce k f na $[a, b]$.

Pro $x \in (a, b)$ je $\widehat{F}'(x) = -f(x)$.

Ekvivalence N. a R. integrálu (spojitých funkcí)

Měli jsme $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ a $F'(x) = f(x)$, kde integrál je Newtonův a F je (jak se ukázalo) primitivní funkce funkce f na intervalu $[a, b]$.

Definujme nyní $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$ pomocí Riemannova integrálu. Počítejme

$$\begin{aligned}\tilde{F}'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\tilde{F}(x+h) - \tilde{F}(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\&= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1}{h} h f(\xi_h) = \lim_{h \rightarrow 0_+} f(\xi_h) = f(x),\end{aligned}$$

kde $\xi_h \in (x, x+h)$; využili jsme větu o střední hodnotě a spojitost funkce f . Stejný výsledek i pro $\lim_{h \rightarrow 0_-}$.

Vidíme, že $\tilde{F}(x)$ je také primitivní funkce dané funkce f . Jelikož $F(a) = 0 = \tilde{F}(a)$, jest $F(x) = \tilde{F}(x)$ pro $x \in [a, b]$.

Nevlastním integrálem nazveme ...

... integrál $\int_a^b f(t) dt$, pokud

(A) f není na (a, b) omezená (ne vlastní integrál vlivem funkce)
nebo

(B) $a = -\infty$ či $b = +\infty$ (ne vlastní integrál vlivem intervalu).

Definice: Necht' $f \in C([a, b))$ je neomezená v levém okolí bodu b (připouští se i $b = +\infty$) nebo omezená v levém okolí $b = +\infty$ (levá okolí $+\infty$ tvoří všechny neomezené intervaly definované takto $I_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$, kde α je zvolené reálné číslo).

Řekneme, že integrál $\int_a^b f(x) dx$ je **konvergentní** (konverguje), jestliže **existuje vlastní limita**

$$\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx = I \quad (1)$$

a hodnotu integrálu definujeme touto limitou $\int_a^b f(x) dx = I$.
Jestliže limita (1) **neexistuje nebo je nevlastní**, řekneme, že integrál je **divergentní** (diverguje).

Obdobně pro **pravé okolí bodu** a (připouští se i $a = -\infty$).
Integrálu budeme říkat konvergentní, pokud limita

$$\lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx = I \text{ je vlastní.}$$

Obdobná situace, je-li f neomezená v okolí bodu $d \in (a, b)$.

$\int_a^b f(x) dx$ je konvergentní, jestliže konvergují oba integrály

$$I_1 = \int_a^d f(x) dx, \quad I_2 = \int_d^b f(x) dx. \quad \text{Pak} \quad \int_a^b f(x) dx = I_1 + I_2.$$

Jestliže I_1 nebo I_2 je divergentní, řekneme, že $\int_a^b f(x) dx$ diverguje (je divergentní).

Příklady: viz externí zdroj

Konvergence, divergence – porovnávací kritérium

Pozorování: Jestliže v intervalu $J = [a, b)$ (nebo $J = (a, b]$, případně $J = (a, b)$) platí

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad (2)$$

kde f a g jsou po částech spojité v J , pak

z konvergence $\int_a^b g(x) dx$ plyne konvergence $\int_a^b f(x) dx$,

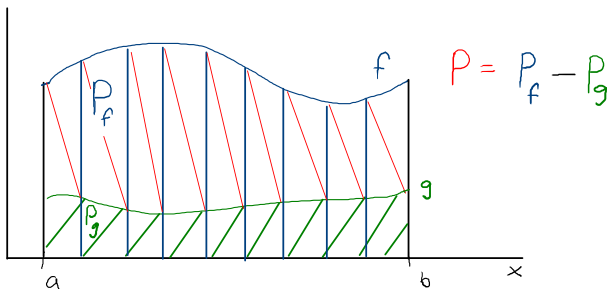
z divergence $\int_a^b f(x) dx$ plyne divergence $\int_a^b g(x) dx$.

Platí-li (2), řekneme, že g je **majoranta** funkce f nebo f je **minoranta** funkce g .

Příklady: viz **externí zdroj**

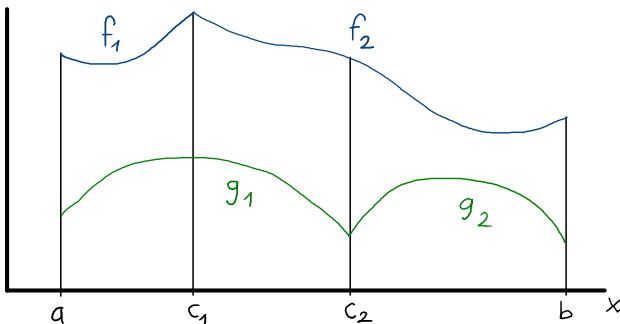
Některé aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce: $P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$, kde $f(x) > g(x) \geq 0$ a $x \in [a, b]$.



Obsah rovinného obrazce: složitější případ, kdy je obrazec vymezen více křivkami. Například

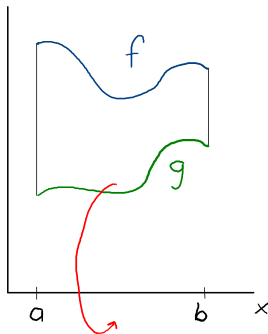
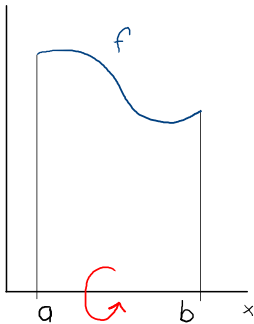
$$P = \int_a^{c_1} (f_1(x) - g_1(x)) dx + \int_{c_1}^{c_2} (f_2(x) - g_1(x)) dx \\ + \int_{c_2}^b (f_2(x) - g_2(x)) dx$$



Příklad: viz externí zdroj

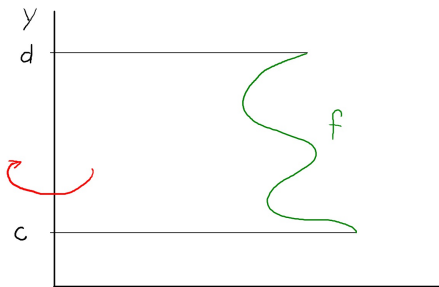
Objem rotačního tělesa: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ (funkce f proměnné x , graf $y = f(x)$ rotuje kolem osy x):

$$V_x = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$



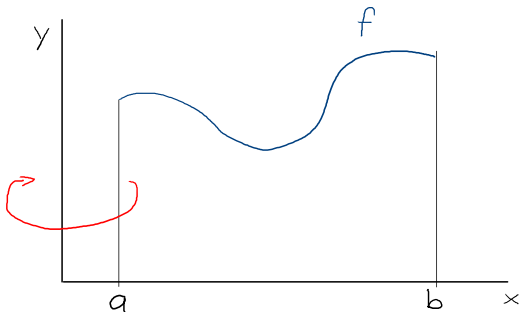
Objem rotačního tělesa: stejný princip, jen nyní graf funkce f proměnné y rotuje kolem osy y

$$V = \pi \int_c^d f^2(y) dy$$



Objem rotačního tělesa: Pozor – stejná osa rotace, funkce jiné proměnné! Funkce f **proměnné x** , graf $y = f(x)$ rotuje kolem

osy y $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$



Příklady: viz **externí zdroj**

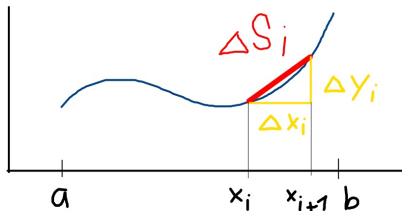
Délka ℓ grafu funkce f nad intervalem $[a, b]$:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \text{ kde } f' \text{ je po částech spojitá na } [a, b].$$

Vysvětlení: $f'(x_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \approx \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(x_i))^2},$$

$$s \approx \sum_i \Delta s_i \approx \sum_i \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \approx \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



Příklad: viz externí zdroj

Statické momenty rovinného obrazce daného grafy funkcí f a g :

Předpoklady: $0 < g(x) < f(x)$, kde $x \in [a, b]$; hustota rovna 1

Statický moment S_x vzhledem k ose x

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) \, dx$$

Statický moment S_y vzhledem k ose y

$$S_y = \int_a^b x(f(x) - g(x)) \, dx$$

Těžiště T rovinného obrazce se stat. momenty S_x a S_y :

$$T = (x_T, y_T), \quad x_T = \frac{S_y}{M}, \quad y_T = \frac{S_x}{M},$$

$$\text{kde } M = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Příklad: viz externí zdroj