12.60. Příklad. Vypočtěme křivkový integrál prvního druhu v $\mathbf{R}^2$

$$\int_k xy\,\mathrm{d}s, \quad \text{kde} \quad k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} \quad (a > 0).$$

Řešení. Snadno zjistíme, že k (část lemniskáty) má v polárních souřadnicích rovnici $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, \frac{1}{4}\pi\rangle$. Křivku k tedy podle (12.59.1) můžeme parametrizovat vektorovou funkcí (v našem případě je $g(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$)

$$\boldsymbol{g}:\ x = a\sqrt{\cos 2t}\cos t, \quad y = a\sqrt{\cos 2t}\sin t, \quad t \in \langle 0, \tfrac{1}{4}\pi\rangle.$$

Podle (12.59.2) vypočítáme (proveďte podrobně sami), že platí

$$|\boldsymbol{g}'(t)| = \sqrt{(a\sqrt{\cos 2t})^2 + \left[(a\sqrt{\cos 2t})'\right]^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}, \quad t \in \langle 0, \tfrac{1}{4}\pi).$$

Vektorová funkce $\boldsymbol{g}$ sice nesplňuje předpoklady z M II, def. 12.76, množina k je však přesto hladký oblouk a pro výpočet daného integrálu lze použít vzorec (12.56.1) (podrobněji viz pozn. 12.57 a 12.61):

$$\int_k xy\,\mathrm{d}s \overset{\clubsuit}{=} \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2t}\cos t \,.\, a\sqrt{\cos 2t}\sin t \,.\, \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}a^3 \int_0^{\pi/4} \sin 2t\sqrt{\cos 2t}\,\mathrm{d}t \overset{\diamondsuit}{=}$$

$$\overset{\diamondsuit}{=} \tfrac{1}{4}a^3 \int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}a^3\left[\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{1}{6}a^3.$$

$\clubsuit$: Použili jsme vzorec (12.56.1).
$\diamondsuit$: Provedli jsme substituci $u = \cos 2t$. $\square$

***12.61. Poznámka.** Parametrizace $\boldsymbol{g}$ v příkl. 12.60 nesplňuje předpoklady ($\clubsuit$), ($\diamondsuit$) z pozn. 12.57 (nemá vlastnost ($\diamondsuit$) — není totiž v bodě $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ diferencovatelná zleva), lze však dokázat, že má vlastnosti ($\clubsuit'$), ($\diamondsuit'$). [Výpočtem se můžeme přesvědčit o tom, že pro každé $t \in \langle 0, \frac{1}{4}\pi\rangle$ jednotkovým tečným vektorem oblouku k v bodě $(x,y) = \boldsymbol{g}(t) \in k$ zkonstruovaným na základě parametrizace $\boldsymbol{g}$ způsobem uvedeným v pozn. 12.57 je vektor $\boldsymbol{t}(x,y) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{g}(t)) = (-\sin 3t, \cos 3t)$.]

CVIČENÍ

Ve cvičeních 967–979 vypočtěte dané křivkové integrály prvního druhu v $\mathbf{R}^2$.

967. $\displaystyle\int_k \frac{\mathrm{d}s}{x-y}$, kde $k \subset \mathbf{R}^2$ je úsečka s krajními body $(0,-2)$, $(4,0)$.

968. $\displaystyle\int_k \frac{x+2y+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, kde $k \subset \mathbf{R}^2$ je úsečka s krajními body $(1,-1)$, $(4,0)$.

969. $\displaystyle\int_k (x+y)\,\mathrm{d}s$, kde $k \subset \mathbf{R}^2$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $(0,1)$, $(2,1)$, $(0,3)$.

970. $\displaystyle\int_k xy\,\mathrm{d}s$, kde $k \subset \mathbf{R}^2$ je obvod obdélníka s vrcholy $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$, $(0,2)$.

971. $\displaystyle\int_k \frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}s$, kde $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \in \langle\sqrt{2}, 2\rangle \wedge y^2 = 2x\}$.

972. $\displaystyle\int_k x^2\,\mathrm{d}s$, kde $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle 1, 2\rangle \wedge y = \ln x\}$.

973. $\displaystyle\int_k \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kde $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = ax\}$ $(a > 0)$.

974. $\displaystyle\int_k x\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}s$, kde $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \wedge x \geq 0\}$ $(a > 0)$.

975. $\int_k (\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4})\,ds$, kde $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}\}$ $(a > 0)$. [Návod: Parametrizujte křivku k (asteroidu) rovnicemi $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.]

976. $\int_k \sqrt{2y}\,ds$, kde $k \subset \mathbf{R}^2$ je křivka (jeden „oblouk" cykloidy) daná parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0)$.

977. $\int_k (x^2 + y^2)\,ds$, kde $k \subset \mathbf{R}^2$ je křivka (část evolventy kružnice) daná parametrickými rovnicemi $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0)$.

978. $\int_k e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, kde $k \subset \mathbf{R}^2$ je uzavřená křivka, která je hranicí množiny $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le a^2 \wedge 0 \le y \le x\}$ $(a > 0)$.

979. $\int_k \frac{ds}{x^2 + y^2}$, kde $k \subset \mathbf{R}^2$ je křivka (část logaritmické spirály) mající v polárních souřadnicích rovnici $\varrho = ae^{b\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0,\ b > 0)$.

980. Vypočtěte $\lim_{c\to+\infty} \int_{k_c} \frac{ds}{y^2}$, kde $k_c = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = a\cosh(x/a) \wedge x \in \langle -c, c\rangle\}$, $c \in (0, +\infty)$ (k_c je část řetězovky) $(a > 0)$.

Ve cvičeních 981–984 vypočtěte dané křivkové integrály prvního druhu v $\mathbf{R}^3$.

981. $\int_k \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$, kde $k \subset \mathbf{R}^3$ je křivka (jeden „závit" šroubovice) daná parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0,\ b > 0)$.

982. $\int_k (2\sqrt{x^2 + y^2} - z)\,ds$, kde $k \subset \mathbf{R}^3$ je křivka (jeden „závit" kuželové šroubovice) daná parametrickými rovnicemi $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

983. $\int_k \sqrt{2y^2 + z^2}\,ds$, kde $k = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x = y\}$ $(a > 0)$.

984. $\int_k (xy + z^2)\,ds$,
kde $k = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0 \wedge xyz = 0\}$ (k je obvod sférického trojúhelníka) $(a > 0)$.

9. Některé aplikace křivkového integrálu prvního druhu

12.62. Příklad. Vypočítejme délku křivky $k \subset \mathbf{R}^3$ (jednoho „závitu" kuželové šroubovice) dané parametrickými rovnicemi

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle. \tag{12.62.1}$$

Řešení. Nechť $\boldsymbol{g}$ je vektorová funkce definovaná rovnicemi (12.62.1). Pro každé $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ platí

$$\boldsymbol{g}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1),$$
$$|\boldsymbol{g}'(t)| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2 + t^2}.$$

Podle M II, vzorce (12.89.1) (s použitím vzorce (12.56.1)) vypočteme, že délka křivky k (jde o hladký oblouk) je rovna číslu

$$s = \int_k 1\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}\,dt \overset{\clubsuit}{=} \left[\ln\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}t + \sqrt{1 + \tfrac{1}{2}t^2}\right) + \tfrac{1}{2}t\sqrt{2 + t^2}\right]_0^{2\pi} =$$
$$= \ln\left(\sqrt{2}\pi + \sqrt{1 + 2\pi^2}\right) + \pi\sqrt{2(1 + 2\pi^2)}.$$

$$k_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2 \wedge x^2 + z^2 = a^2 \wedge z \geq 0\},$$
$$k_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x^2 + y^2 = ax\}.$$

Ve cvičeních 992–996 pomocí křivkového integrálu prvního druhu vypočtěte obsahy daných válcových ploch $\varkappa \subset \mathbf{R}^3$.

992. $\varkappa = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y = \frac{3}{8}x^2 \wedge 0 \leq z \leq x \wedge y \leq 6\}$.

993. $\varkappa = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3 \wedge 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x}\}$.

994. $\varkappa = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$ $(a > 0)$.

995. $\varkappa = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = ax \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ $(a > 0)$.

996. $\varkappa = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \wedge 0 \leq z \leq |y|\}$ $(a > 0)$.

997. Vypočtěte hmotnost křivky $k \subset \mathbf{R}^2$ (části Archimédovy spirály), jejíž polární rovnice (viz pozn. 11.1) je $r = a\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \varphi_0 \rangle$ $(a > 0,\ \varphi_0 > 0)$, jestliže hustota v každém bodě křivky k je rovna vzdálenosti tohoto bodu od počátku.

998. Vypočtěte hmotnost křivky $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$, jestliže její hustota je popsána funkcí $h(x,y) = xy$.

999. Vypočtěte hmotnost křivky $k \subset \mathbf{R}^3$ dané parametrickými rovnicemi $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, jestliže její hustota je popsána funkcí $h(x,y,z) = \sqrt{2y}$.

1000. Vypočtěte hmotnost křivky $k \subset \mathbf{R}^3$ (jednoho „závitu" šroubovice) dané parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, jestliže hustota v každém bodě křivky k je rovna druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od počátku $(a > 0,\ b > 0)$.

1001. Vypočtěte hmotnost křivky $k \subset \mathbf{R}^3$ z příkl. 12.62 (části kuželové šroubovice), jestliže hustota v každém jejím bodě je přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od roviny Pxy, přičemž v bodě $(2\pi, 0, 2\pi)$ je rovna jedné.

1002. Vypočtěte vzdálenost těžiště homogenního kruhového oblouku s poloměrem R a středovým úhlem 2α $(0 < \alpha < \pi)$ od středu kružnice.

Ve cvičeních 1003–1007 najděte souřadnice těžišť daných homogenních hmotných křivek k.

1003. $k \subset \mathbf{R}^2$ je homogenní křivka (část logaritmické spirály), jejíž rovnice v polárních souřadnicích je $\varrho = ae^{\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $(a > 0)$.

1004. $k \subset \mathbf{R}^2$ je homogenní křivka („horní polovina" kardioidy), jejíž rovnice v polárních souřadnicích je $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ $(a > 0)$.

1005. $k \subset \mathbf{R}^2$ je homogenní křivka (část cykloidy) daná parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ $(a > 0)$.

1006. $k \subset \mathbf{R}^2$ je homogenní křivka (část evolventy kružnice) daná parametrickými rovnicemi $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ $(a > 0)$.

1007. $k \subset \mathbf{R}^2$ je homogenní křivka (část asteroidy) daná implicitní rovnicí $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ a nerovnicemi $x \geq 0$, $y \geq 0$ $(a > 0)$. [Návod: Parametrizujte křivku k rovnicemi $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$.]

1008. Vypočtěte souřadnice těžiště nehomogenní křivky $k \subset \mathbf{R}^3$ (části kónické spirály) dané parametrickými rovnicemi $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = be^t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $(a > 0,\ b > 0)$, jestliže hustota v každém bodě křivky k je rovna převrácené hodnotě vzdálenosti tohoto bodu od roviny Pxy.

Ve cvičeních 1009–1013 předpokládejte, že hustoty daných homogenních hmotných křivek v každém jejich bodě jsou rovny jedné.

$\boxed{1009.}$ Vypočtěte momenty setrvačnosti vzhledem k oběma osám souřadnic homogenní křivky k ze cvič. 1004 („horní poloviny“ kardioidy).

$\boxed{1010.}$ Vypočtěte momenty setrvačnosti vzhledem k oběma osám souřadnic homogenní křivky $k \subset \mathbb{R}^2$ (asteroidy) dané implicitní rovnicí $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ $(a > 0)$.

$\boxed{1011.}$ Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose y homogenní křivky

$$k = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \wedge y = \tfrac{1}{2}x^2 \}.$$

$\boxed{1012.}$ Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní křivky

$$k = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge xyz = 0 \}$$

(k je obvod sférického trojúhelníka).

$\boxed{1013.}$ Vypočtěte momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, z homogenní křivky $k \subset \mathbb{R}^3$ (jednoho „závitu“ šroubovice) dané parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $(a > 0,\ b > 0)$.

$\boxed{1014.}$ Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z nehomogenní křivky (části kónické spirály) dané parametrickými rovnicemi $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = be^t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $(a > 0,$ $b > 0)$, jestliže hustota v každém bodě křivky k je nepřímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od roviny Pxy, přičemž v bodě $(a, 0, b)$ je rovna jedné.

$\boxed{1015.}$ Vypočtěte momenty setrvačnosti vzhledem k oběma osám souřadnic nehomogenní hmotné kružnice v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku a poloměrem R, jestliže její hustota je popsána funkcí $h(x,y) = |x| + |y|$.

10. Křivkový integrál druhého druhu

12.67. Poznámka. Nechť (k) je orientovaný hladký oblouk v $\mathbb{R}^2$, resp. v $\mathbb{R}^3$, jehož parametrizace je dána vektorovou funkcí $\boldsymbol{g}$: $x = \boldsymbol{g}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, a jehož trajektorií je množina k.

a) Vzorec, jímž je definován křivkový integrál druhého druhu podél orientovaného oblouku (k) vektorového pole $\boldsymbol{f}$ (dvou, resp. tří proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$, resp. v $\mathbb{R}^3$), které je definované a spojité na množině k (viz M II, vzorec (12.98.1), resp. vzorec z M II, hesla 12.107), můžeme vyjádřit ve „vektorovém“ tvaru takto:

$$\int_{(k)} \boldsymbol{f}(x) \,.\, \mathrm{d}s = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t)) \,.\, \boldsymbol{g}'(t)\,\mathrm{d}t \tag{12.67.1}$$

(v integrálu napravo je skalární součin dvou vektorů).

Všude v této části kapitoly (aniž to budeme zdůrazňovat) budeme pracovat pouze s takovými parametrizacemi orientovaných hladkých oblouků, při nichž je možné použít vzorec (12.67.1) [podrobněji (ve smyslu *b)) viz poslední dva odstavce v pozn. 12.56].

*b) O parametrizaci orientovaného hladkého oblouku bychom mohli říci totéž, co v pozn. 12.57 o parametrizaci hladkého oblouku.

Dodejme, že pro každé $t \in \langle a, b \rangle$ „souhlasí“ orientace jednotkového tečného vektoru $\boldsymbol{t}(x)$ hladkého oblouku k sestrojeného v bodě $x = \boldsymbol{g}(t) \in k$, který je pro $t \in (a,b)$ dán předpisem

$$\boldsymbol{t}(x) = \frac{\boldsymbol{g}'(t)}{|\boldsymbol{g}'(t)|} \tag{12.67.2}$$

CVIČENÍ

Ve cvičeních 1016–1026 vypočtěte dané křivkové integrály druhého druhu v $\mathbf{R}^2$.

1016. $\int_{(k)} (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy,$

kde (k) je orientovaný oblouk s trajektorií $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle -1, 1\rangle \wedge y = x^2\}$, přičemž $\mathrm{pb}(k) = (-1,1)$, $\mathrm{kb}(k) = (1,1)$.

1017. $\int_{(k)} \frac{y}{x}\,dx + x\,dy,$

kde (k) je orientovaný oblouk s trajektorií $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle \frac{1}{2}, 3\rangle \wedge xy = 1\}$, přičemž $\mathrm{pb}(k) = (3, \frac{1}{3})$, $\mathrm{kb}(k) = (\frac{1}{2}, 2)$.

1018. $\int_{(k)} xy\,dy,$

kde (k) je orientovaný oblouk s trajektorií $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle 0, \pi\rangle \wedge y = \sin x\}$, přičemž $\mathrm{pb}(k) = (0,0)$, $\mathrm{kb}(k) = (\pi,0)$.

1019. $\int_{(k)} (x^2 - y^2)\,dx,$

kde (k) je orientovaný oblouk s trajektorií $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle 0, 2\rangle \wedge y = x^2\}$, přičemž $\mathrm{pb}(k) = (2,4)$, $\mathrm{kb}(k) = (0,0)$.

1020. $\int_{(k)} (2a - y)\,dx + x\,dy,$ kde (k) je orientovaný oblouk daný parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0)$.

1021. $\int_{(k)} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy,$

kde (k) je jednoduchá cesta s trajektorií $k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle 0, 2\rangle \wedge y = 1 - |1 - x|\}$, přičemž $\mathrm{pb}(k) = (2,0)$, $\mathrm{kb}(k) = (0,0)$.

1022. $\int_{(k)} 2xy\,dx - x^2\,dy,$ kde (k) je jednoduchá cesta s počátečním bodem $\boldsymbol{a} = (0,0)$ a koncovým bodem $\boldsymbol{b} = (2,1)$, jejíž trajektorií je:

a) úsečka $\boldsymbol{ab}$;

b) část paraboly $4y = x^2$;

c) část paraboly $2y^2 = x$;

d) „lomená čára $\boldsymbol{acb}$“, kde $\boldsymbol{c} = (2,0)$;

e) „lomená čára $\boldsymbol{acb}$“, kde $\boldsymbol{c} = (0,1)$.

1023. $\int_{(k)} (2y - 6xy^3)\,dx + (2x - 9x^2y^2)\,dy,$ kde (k) je jednoduchá cesta s počátečním bodem $\boldsymbol{a} = (0,0)$ a koncovým bodem $\boldsymbol{b} = (1,1)$, jejíž trajektorií je:

a) úsečka $\boldsymbol{ab}$;

b) část paraboly $y = x^2$;

c) část kubické paraboly $y = x^3$;

d) „lomená čára $\boldsymbol{acb}$“, kde $\boldsymbol{c} = (1,0)$;

e) „lomená čára $\boldsymbol{acb}$“, kde $\boldsymbol{c} = (0,1)$.

1024. $\int_{(k)} \frac{1}{|x| + |y|}\,dx + \frac{1}{|x| + |y|}\,dy,$ kde (k) je orientovaný obvod čtverce s vrcholy $\boldsymbol{a} = (1,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,1)$, $\boldsymbol{c} = (-1,0)$, $\boldsymbol{d} = (0,-1)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.

1025. $\int_{(k)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}\,dx - \frac{x - y}{x^2 + y^2}\,dy,$ kde (k) je orientovaná kružnice daná parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0)$.

1026. $\int_{(k)} -y\,dx + x\,dy$, kde (k) je cesta daná parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle 0, 4\pi \rangle$ $(a > 0,\ b > 0)$ ((k) je elipsa „proběhnutá dvakrát proti směru pohybu hodinových ručiček").

1027. Vypočtěte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{f}(x,y) = \big(2(x^2+y^2), (x+y)^2\big)$ podél orientovaného obvodu trojúhelníka s vrcholy $\boldsymbol{a} = (1,1)$, $\boldsymbol{b} = (2,2)$, $\boldsymbol{c} = (1,3)$, jehož orientace je dána uvedným pořadím vrcholů.

1028. Vypočtěte práci vektorového pole $\boldsymbol{f}(x,y) = (0, x^2)$ podél orientovaného oblouku s počátečním bodem $(0,1)$ a koncovým bodem $(1,0)$, jehož trajektorie je částí paraboly $y^2 = 1 - x$.

α-β **1029.** Na oblasti $G = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ je dáno vektorové pole $\boldsymbol{f}$ takové, že v každém bodě $(x,y) \in G$ vektor $\boldsymbol{f}(x,y)$ směřuje do počátku a jeho velikost je rovna jedné. Vypočtěte práci vektorového pole $\boldsymbol{f}$ podél orientovaného oblouku daného parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Ve cvičeních 1030–1035 vypočtěte dané křivkové integrály druhého druhu v $\mathbf{R}^3$.

1030. $\int_{(k)} (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$, kde (k) je orientovaný oblouk daný parametrickými rovnicemi $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

1031. $\int_{(k)} yz\,dx + z\sqrt{a^2 - x^2}\,dy + xy\,dz$, kde (k) je orientovaný oblouk daný parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $(a > 0,\ b > 0)$.

1032. $\int_{(k)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, kde (k) je orientovaný oblouk s trajektorií $k = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \wedge z = x \wedge y \geq 0\}$, přičemž $\mathrm{pb}(k) = (0,0,0)$, $\mathrm{kb}(k) = (a, 0, a)$ $(a > 0)$.

1033. $\int_{(k)} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, kde (k) je jednoduchá uzavřená cesta s trajektorií $k = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2 \wedge z = xy\}$, přičemž orientace cesty (k) je je dána pořadím bodů $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(-a,0,0)$ $(a > 0)$.

1034. $\int_{(k)} (z^2 - y^2)\,dx + (x^2 - z^2)\,dy + (y^2 - x^2)\,dz$, kde (k) je jednoduchá uzavřená cesta s trajektorií $k = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = a^2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge xyz = 0\}$, přičemž orientace cesty (k) je dána pořadím vrcholů $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$ sférického trojúhelníka, jehož obvodem je křivka k.

1035*. $\int_{(k)} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, kde (k) je jednoduchá uzavřená cesta s trajektorií $k = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = a^2 \wedge x^2+y^2 = ax \wedge z \geq 0\}$ (k je smyčka Vivianiovy křivky), přičemž orientace cesty (k) je taková, že jejím tečným vektorem v bodě $(0,0,a) \in k$ (viz pozn. 12.57) je vektor $(0,-1,0)$ $(a > 0)$.

1036. Vypočtěte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (z, y, x)$ podél jednoduché uzavřené cesty (k), jejíž trajektorií je trojúhelník s vrcholy $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{c} = (0,0,1)$, přičemž orientace cesty (k) je dána uvedeným pořadím vrcholů.

1037. Na oblasti $G = \mathbf{R}^3 - \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0 \wedge y = 0\}$ je dáno vektorové pole $\boldsymbol{f}$ takové, že pro každý bod $\mathsf{x}_0 \in G$ je $\boldsymbol{f}(\mathsf{x}_0)$ vektor, jehož velikost je rovna převrácené hodnotě vzdálenosti bodu x_0 od osy z, a pro který polopřímka $\mathsf{x} = \mathsf{x}_0 + t\,\boldsymbol{f}(\mathsf{x}_0)$, $t \in \langle 0, +\infty)$, kolmo protíná osu z. Vypočtěte práci vektorového pole $\boldsymbol{f}$ podél orientovaného oblouku daného parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = b$, $z = a\sin t$, $t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ $(a > 0,\ b \neq 0)$.

oblouků (k_1), (k_2) jsou takové, že $(k) = (k_1) + (k_2)$. Rovnice (12.75.1) jsou parametrickými rovnicemi orientovaného oblouku $(-k_1)$ (proč?). Podle vzorce z pozn. 12.73 je hledaný moment setrvačnosti roven číslu

$$I_x = -\tfrac{1}{3}\int_{(k)} y^3\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\int_{(k_1)} y^3\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{3}\int_{(k_2)} y^3\,\mathrm{d}x.$$

Vypočítejme jednotlivé křivkové integrály:

$$-\tfrac{1}{3}\int_{(k_1)} y^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int_{(-k_1)} y^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 \,.\, [a(t-\sin t)]'\,\mathrm{d}t =$$

$$= \tfrac{1}{3}a^4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}a^4\int_0^{2\pi}(1-4\cos t+6\cos^2 t-4\cos^3 t+\cos^4 t)\,\mathrm{d}t \stackrel{\clubsuit}{=}$$

$$\stackrel{\clubsuit}{=} \tfrac{1}{3}a^4 \,.\, (2\pi - 0 + 6\,.\,\pi - 0 + \tfrac{3}{4}\pi) = \tfrac{35}{12}\pi a^4,$$

$$-\tfrac{1}{3}\int_{(k_2)} y^3\,\mathrm{d}x \stackrel{\diamond}{=} -\tfrac{1}{3}\int_{(k_2)} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

$\clubsuit$: Integrál jsme vypočítali pomocí vzorců z pozn. 12.19 (proveďte podrobně sami).
$\diamond$: Pro každé $(x,y)\in k_2$ je $y=0$ (proto nebylo nutné (k_2) parametrizovat).

Závěr: $I_x = \frac{35}{12}\pi a^4$. □

CVIČENÍ

Ve cvičeních 1038, 1039 převeďte dané křivkové integrály druhého druhu v $\mathbf{R}^2$ podél jednoduché cesty (k) pomocí Greenovy věty na dvojné integrály, jestliže (k) je kladně orientovaná hranice nějaké uzavřené oblasti $M \subset G$, kde $G \subset \mathbf{R}^2$ je daná oblast.

1038. $\displaystyle\int_{(k)} \tfrac{3}{4}y^2(x^2-2)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}x^2(1+xy)\,\mathrm{d}y,\quad G = \mathbf{R}^2.$

1039. $\displaystyle\int_{(k)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y\,[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,\mathrm{d}y,$
$G = \mathbf{R}^2 - \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\ge 0 \wedge y = 0\}.$

Ve cvičeních 1040–1044 vypočtěte dané křivkové integrály druhého druhu v $\mathbf{R}^2$ pomocí Greenovy věty.

1040. $\displaystyle\int_{(k)} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y$, kde (k) je kladně orientovaná elipsa $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ $(a>0,\ b>0)$.

1041. $\displaystyle\int_{(k)} \mathrm{e}^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x(y-\sin y)\,\mathrm{d}y$, kde (k) je kladně orientovaná hranice uzavřené oblasti $M = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\in\langle 0,\pi\rangle \wedge 0\le y\le\sqrt{\sin x}\}$.

1042. $\displaystyle\int_{(k)} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,\mathrm{d}y$, kde (k) je kladně orientovaná hranice uzavřené oblasti $M = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4 \wedge x\le y\le\sqrt{3}\,x\}$.

1043. $\displaystyle\int_{(k)} y^3\,\mathrm{d}x - x^3\,\mathrm{d}y$, kde (k) je kladně orientovaná hranice uzavřené oblasti $M = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\ge 0\wedge y\ge 0\wedge (x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)\}$ $(a>0)$.

1044. $\displaystyle\int_{(k)} (\mathrm{e}^x\sin y - y)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 1)\,\mathrm{d}y$, kde (k) je orientovaný oblouk s trajektorií $k = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = ax \wedge y\ge 0\}$, přičemž $\mathrm{pb}(k) = (0,0)$, $\mathrm{kb}(k) = (a,0)$ $(a>0)$. [Návod: Doplňte oblouk k úsečkou, jejímiž krajními body jsou krajní body oblouku k, na uzavřenou křivku.]

$\boxed{1045.}$ Pomocí Greenovy věty vyřešte cvič. 1027.

$\boxed{1046.}$ Dokažte, že platí $\displaystyle\int_{(\mathrm{hr}\,M)} (yx^3+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = 0,$ jestliže $(\mathrm{hr}\,M)$ je kladně orientovaná hranice nějaké omezené uzavřené oblasti $M \subset \mathbf{R}^2$, která je symetrická:

a) podle počátku; b) podle přímky $y = x$.

$\boxed{1047.}$ Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah rovinného obrazce M, jehož hranicí je křivka k daná implicitní rovnicí ($a > 0$):

a) $\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{y^2} = \sqrt[5]{a^2}$; b) $\sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{|y|} = \sqrt[3]{a}$;

c) $\sqrt[4]{|x|} + \sqrt[4]{|y|} = \sqrt[4]{a}$.

[Návod: Uvažujte průnik daného obrazce s (uzavřeným) prvním kvadrantem. Část křivky k ležící v prvním kvadrantu parametrizujte rovnicemi $x = a\cos^n t$, $y = a\sin^n t$, $t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, kde n je vhodné přirozené číslo.]

$\boxed{1048.}$ Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah rovinného obrazce, jehož hranicí je křivka ze cvič. 987 (epicykloida).

$\boxed{1049.}$ Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah rovinného obrazce, jehož hranicí je křivka ze cvič. 988 (hypocykloida).

$\boxed{1050.}$ Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah rovinného obrazce, jehož hranicí je křivka (smyčka Descartova listu) daná implicitní rovnicí $x^3 + y^3 = 3axy$ a nerovnicemi $x \geq 0$, $y \geq 0$ ($a > 0$).

$\boxed{1051.}$ Pomocí Greenovy věty vypočtěte souřadnice těžiště homogenní tenké desky $M \subset \mathbf{R}^2$ z příkl. 12.75.

$\boxed{1052.}$ Pomocí Greenovy věty vypočtěte souřadnice těžiště homogenní tenké desky $M \subset \mathbf{R}^2$, jejíž hranicí je křivka $k = k_1 \cup k_2 \cup k_3$, kde k_1, resp. k_2 je úsečka s krajními body $(0,0)$, $(0,a)$, resp. $(0,0)$, $(a,0)$, a kde k_3 je křivka daná implicitní rovnicí $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$).

$\boxed{1053.}$ Pomocí Greenovy věty vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose x homogenní tenké desky $M \subset \mathbf{R}^2$ ze cvič. 1052. Předpokládejte, že (plošná) hustota v každém bodě desky M je rovna jedné.

nebo obsah ohraničený $x^2+z^2=2a\sqrt{xz}$, $x \geq 0$, $z \geq 0$ [a^2]

$\boxed{1054.}$ Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ je těleso (uzavřená oblast), které vznikne rotací kolem osy z rovinného obrazce (uzavřené oblasti) $M \subset \mathbf{R}^2$ ležícího v rovině Pxz. Předpokládejme, že pro všechna $(x,z) \in M$ je $x \geq 0$ a že hranicí množiny M je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka k. Nechť (k) je kladně orientovaná křivka k. Dokažte, že pro objem V tělesa Ω a moment setrvačnosti I_z vzhledem k ose z homogenního tělesa Ω (s jednotkovou hustotou) platí:

$$V = \pi\int_{(k)} x^2\,\mathrm{d}z, \qquad I_z = \tfrac{1}{2}\pi\int_{(k)} x^4\,\mathrm{d}z.$$

12. Nezávislost křivkového integrálu druhého druhu na cestě

12.76. Poznámka. a) V pozn. 12.71 jsme definovali pojem rotace rovinného vektorového pole. Definujme další pojem: O rovinném vektorovém poli $\boldsymbol{f} = (f,g)$, které je definované a třídy C^1 na oblasti $G \subset \mathbf{R}^2$, řekneme, že je na G *nevírové*, jestliže pro každé $(x,y) \in G$ platí $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(x,y) = (\partial g/\partial x)(x,y) - (\partial f/\partial y)(x,y) = 0$.

Při použití této terminologie můžeme tvrzení z M II, hesla 12.118 formulovat takto:

Jestliže je $G \subset \mathbf{R}^2$ jednoduše souvislá oblast a $\boldsymbol{f}$ vektorové pole, které je definované a třídy C^1 na G, potom $\boldsymbol{f}$ je na G potenciální právě tehdy, když $\boldsymbol{f}$ je na G nevírové. [Není-li oblast G jednoduše souvislá, potom platí pouze implikace: Je-li $\boldsymbol{f}$ na G potenciální, pak $\boldsymbol{f}$ je na G nevírové. (Obrácená implikace neplatí — viz řešení příkl. 12.78.)]

CVIČENÍ

Ve cvičeních 1055–1059 rozhodněte, zda daná vektorová pole $\boldsymbol{f}$ jsou potenciální na daných oblastech $G \subset \mathbf{R}^2$, a pokud ano, najděte jejich potenciály na G.

$\boxed{1055.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = (3x^2 - 2xy + y^2, -x^2 + 2xy - 3y^2)$, $G = \mathbf{R}^2$.

$\boxed{1056.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = (2xy + y^3, x^2 - xy^2)$, $G = \mathbf{R}^2$.

$\boxed{1057.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(e^{x+y}(x - y + 2), e^{x+y}(x - y)\right)$, $G = \mathbf{R}^2$.

$\boxed{1058.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(12x^2y + \dfrac{1}{y^2}, 4x^3 - \dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{1}{y}\right)$, $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$.

$\boxed{1059.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x+y)^3}, \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{(x+y)^3}\right)$, $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x + y > 0\}$.

$\boxed{1060.}$ Rozhodněte, zda vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{x - y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}\right)$ je potenciální na oblasti G, a pokud ano, najděte jeho potenciál na G, jestliže:

a) $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$; b) $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$;

*c) $G = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$.

(Návod: V c) vyjděte z úvah uvedených v posledním odstavci pozn. 12.78.)

Ve cvičeních 1061–1063 rozhodněte, zda daná vektorová pole $\boldsymbol{f}$ jsou potenciální na daných oblastech $G \subset \mathbf{R}^3$, a pokud ano, najděte jejich potenciály na G.

$\boxed{1061.}$ $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(yz, zx, x(y+z)\right)$, $G = \mathbf{R}^3$.

$\boxed{1062.}$ $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(yz, zx + 2, xy - 1\right)$, $G = \mathbf{R}^3$.

$\boxed{1063.}$ $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}, \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}, 2z - \dfrac{xy}{z^2}\right)$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y > 0 \wedge z > 0\}$.

$\boxed{1064.}$ Nalezením potenciálu dokažte, že vektorové pole $\boldsymbol{f}$ je potenciální na oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$, jestliže

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \quad G = \mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}.$$

Ve cvičeních 1065–1072 ukažte, že křivkové integrály druhého druhu daných vektorových polí $\boldsymbol{f}$ nezávisí v daných oblastech $G \subset \mathbf{R}^2$ na cestě, a vypočtěte dané integrály.

$\boxed{1065.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(2x(y^2 - 2x^2), 2y(x^2 - 2y^2)\right)$, $G = \mathbf{R}^2$, $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(2,3)} \boldsymbol{f}(x,y) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

$\boxed{1066.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$, $G = \mathbf{R}^2$, $\displaystyle\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} \boldsymbol{f}(x,y) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

$\boxed{1067.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = (2y \sin 2x, 1 - \cos 2x)$, $G = \mathbf{R}^2$, $\displaystyle\int_{(\frac{1}{4}\pi,2)}^{(\frac{1}{6}\pi,1)} \boldsymbol{f}(x,y) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

$\boxed{1068.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2}, -\dfrac{1}{x}\right)$, $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$, $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \boldsymbol{f}(x,y) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

$\boxed{1069.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{x}{(x+y)^2}, \dfrac{2x + y}{(x+y)^2}\right)$, $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x + y > 0\}$, $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,2)} \boldsymbol{f}(x,y) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

$\boxed{1070.}$ $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(x - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}, \dfrac{x^2}{(x-y)^2} - y\right)$, $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > y\}$,

$\displaystyle\int_{(2,0)}^{(0,-1)} \boldsymbol{f}(x,y) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

$\boxed{1071.}$ $f(x,y) = \left(x\ln(1+y^2), \dfrac{x^2y}{1+y^2}\right)$, $\quad G = \mathbf{R}^2$, $\quad \displaystyle\int_{(2,0)}^{(0,-1)} f(x,y)\,.\,\mathrm{d}s$.

$\boxed{1072.}$ $f(x,y) = \left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}, \sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)$, $\quad G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$,
$\displaystyle\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} f(x,y)\,.\,\mathrm{d}s$.

$\boxed{1073.}$ Dokažte, že vektorové pole $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)$ je potenciální na oblasti $G = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, a vypočtěte $\displaystyle\int_{(3,4)}^{(5,12)} f(x,y)\,.\,\mathrm{d}s$.

$\boxed{1074^*}$ Vypočtěte cirkulaci vektorového pole $f(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ podél libovolné jednoduché uzavřené kladně orientované cesty (k) takové, že:

a) $(0,0) \notin k \cup \operatorname{Int} k$; $\qquad$ b) $(0,0) \in \operatorname{Int} k$.

(Návod: Vyjděte z úvah uvedených v M II, pozn. 12.111 a z pozn. 12.78.)

$\boxed{1075^*}$ Dokažte, že pro každou spojitou funkci $h\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ je cirkulace vektorového pole $f(x,y) = \left(xh(x^2+y^2), yh(x^2+y^2)\right)$ podél libovolné uzavřené cesty v $\mathbf{R}^2$ rovna nule. (Návod: Najděte potenciál vektorového pole f na $\mathbf{R}^2$.)

$\boxed{1076.}$ Nechť funkce $H\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je třídy C^1 na $\mathbf{R}^2$. Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $f(x,y) = \left(yH(x,y), xH(x,y)\right)$ nezávisel v $\mathbf{R}^2$ na cestě.

Ve cvičeních 1077, 1078 ukažte, že křivkové integrály druhého druhu daných vektorových polí f nezávisí v daných oblastech $G \subset \mathbf{R}^3$ na cestě, a vypočtěte dané integrály.

$\boxed{1077.}$ $f(x,y,z) = (x^2 - 2yz, y^2 - 2zx, z^2 - 2xy)$, $\quad G = \mathbf{R}^3$, $\quad \displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(-1,2,-2)} f(x,y,z)\,.\,\mathrm{d}s$.

$\boxed{1078.}$ $f(x,y,z) = \left(2xz + \dfrac{1}{y}, -\dfrac{x+z}{y^2}, x^2 + \dfrac{1}{y}\right)$, $\quad G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y > 0\}$,
$\displaystyle\int_{(-1,3,-2)}^{(1,2,3)} f(x,y,z)\,.\,\mathrm{d}s$.

$\boxed{1079.}$ Dokažte, že vektorové pole $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ je potenciální na oblasti $G = \mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, a vypočtěte $\displaystyle\int_{(1,0,2)}^{(2,-1,1)} f(x,y,z)\,.\,\mathrm{d}s$.

$\boxed{1080.}$ Vypočtěte práci vektorového pole $f(x,y,z) = (x, y^2, -z^3)$ podél libovolné orientované cesty v $\mathbf{R}^3$ s počátečním bodem $(1,1,1)$ a koncovým bodem $(2,3,-4)$.