Příklady k MA4B (zatím nezkontrolvané)

Příklad 1. Vyřešte přibližně metodou sítí s krokem $h = h_x = h_y = \frac{1}{3}$ úlohu

$$-4\triangle u + (1 + 6x)u = 3x - 3y$$

na $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ s okrajovými podmínkami:
$\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial n} + u = 1$ na hranici, kde $x = 0$,
$u(x, y) = 2 - 6y$ na zbývající části hranice.

Řešení pro obvyklé číslování uzlů:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
217 & -72 & 0 & -36 & 0 & 0 & 143 \\
-36 & 147 & -36 & 0 & -36 & 0 & 72 \\
0 & -36 & 149 & 0 & 0 & -36 & 73 \\
-36 & 0 & 0 & 217 & -72 & 0 & -74 \\
0 & -36 & 0 & -36 & 147 & -36 & -145 \\
0 & 0 & -36 & 0 & -36 & 149 & -216
\end{array}\right)$$

Příklad 2. Vyřešte přibližně metodou sítí s prostorovým krokem $h = \frac{1}{4}$ a časovým krokem $d = \frac{1}{7}$ úlohu na oblasti $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2})$ a $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - 4\triangle u &= 2x + 14t \quad \text{na } \Omega_1 \times (0, \frac{2}{7}) \\
u(x, y, 0) &= 8x + 1 \quad \text{na } \Omega_1 \\
u(x, y, t) &= 8x + 1 + 21t \quad \text{na hranici } \Gamma_1 \times (0, \frac{2}{7}) \\
4\frac{\partial u}{\partial t} &= 3 - 4u \quad \text{na hranici } \Gamma_2 \times (0, \frac{2}{7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - 5\triangle u &= 1 + 7t + 4y \quad \text{na } \Omega_2 \times (0, \frac{2}{5}) \\
u(x, y, 0) &= 2 \quad \text{na } \Omega_2 \\
u(x, y, t) &= 2 - 7t \quad \text{na hranici } \Gamma_3 \times (0, \frac{2}{7})
\end{aligned}$$

konstanta přechodového odporu na kontaktu Γ_4 oblastí Ω_1 a Ω_2 je $\beta = 5$. Hranice Γ_1 a Γ_2 jsou hranicemi oblasti Ω_1. Hranice Γ_1 je část přímek $y = 0$ a $y = \frac{1}{2}$ a hranice Γ_2 je část přímky $x = 0$. Hranice Γ_3 je tou částí hranice oblasti Ω_2, která není v kontaktu s oblastí Ω_1.

Řešení pro obvyklé číslování uzlů:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c}
295 & -128 & 0 & 0 & 0 & 545 & 924 + 7u_1 \\
-64 & 263 & -64 & 0 & 0 & 791 & 1156,5 + 7u_2 \\
0 & -16 & 21 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & -25 & 20 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -80 & 327 & 257 & 4 + 7u_5
\end{array}\right)$$

Příklad 3. Vyřešte přibližně metodou sítí s prostorovým krokem $h = \frac{1}{2}$ a časovým krokem $d = \frac{1}{5}$ úlohu na oblasti $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, \frac{3}{2})$ a $\Omega_2 = (1, 2) \times (0, \frac{3}{2})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - 2\triangle u &= 3 - 4x + 2y \quad \text{na } \Omega_1 \times (0, \frac{2}{5}) \\
u(x, y, 0) &= 2 + 2x \quad \text{na } \Omega_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= 2+2x-10t \quad \text{na hranici } \Gamma_1 \times (0,\frac{2}{5}) \\
\frac{\partial u}{\partial t} + 3u &= 1 \quad \text{na hranici } \Gamma_2 \times (0,\frac{2}{5})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - 5\triangle u &= 2 \quad \text{na } \Omega_2 \times (0,\frac{2}{5}) \\
u(x,y,0) &= 3 \quad \text{na } \Omega_2 \\
u(x,y,t) &= 3+5t \quad \text{na hranici } \Gamma_3 \times (0,\frac{2}{5})
\end{aligned}
$$

konstanta přechodového odporu na kontaktu Γ_4 oblastí Ω_1 a Ω_2 je $\beta = 7$. Hranice Γ_1 a Γ_2 jsou hranicemi oblasti Ω_1. Hranice Γ_1 je část přímek $y=0$ a $y=\frac{3}{2}$ a hranice Γ_2 je část přímky $x=0$. Hranice Γ_3 je tou částí hranice oblasti Ω_2, která není v kontaktu s oblastí Ω_1.

Řešení pro obvyklé číslování uzlů:

$$
\left(\begin{array}{cccccccccc|c|c}
61 & -16 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & -12+5u_1 \\
-8 & 37 & -8 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 25 & -5+5u_2 \\
0 & 4 & -11 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & -17 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -20 & 85 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 177 & 202+5u_5 \\
-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & -16 & 0 & 0 & 0 & 23 & -3+5u_6 \\
0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -8 & 37 & -8 & 0 & 0 & 26 & -5+5u_7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -11 & 7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -17 & 10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & -20 & 85 & 177 & 202+5u_{10}
\end{array}\right)
$$