Příklad ze cvičení MA04 ze dne 1.12.2022

Je dána úloha $-((1+x)u')' = 2$ s okrajovými podmínkami $u(0) = 1$ a $u'(1) = 3$.
a) Určete konstanutu pozitivní definitnosti c.
b) Najděte přibližné řešení w_1 Ritzovou metodou s pomocí funkce $\psi_1(x) = x(x-2)$.
c) Napište soustavu rovnic pro nalezení přibližného řešení w_2 Ritzovou metodou s pomocí funkcí ψ_1 a $\psi_2(x) = x(x^2-3)$.
d) Najděte horní odhad normy chyby $\|w_1 - \widehat{u}\|_2$, kde $\widehat{u}$ je přesné řešení .

Nejdříve převedeme úlohu na tvar s homogenními okrajovými podmínkami, a to tak, že najdeme jednoduchou funkci φ, která splňuje okraj. podmínky: $\boxed{\varphi(x) = 3x+1}$, a zavedeme substituci $u = v + \varphi$:

$$-((1+x)(v+\varphi)')' = 5, \qquad v(0) + \varphi(0) = 1, \quad v'(1) + \varphi'(1) = 3,$$

což po úpravě dá

$$\boxed{-((1+x)v')' = 2, \qquad v(0) = 0, \quad v'(1) = 0.}$$

a) Převedeme (Au, v) na symetrický tvar

$$\boxed{(Au, v)} = \int_0^1 -((1+x)u')'v dx = [-(1+x)u'v]_0^1 + \int_0^1 (1+x)u'v' dx = \boxed{\int_0^1 (1+x)u'v' dx}$$

a odhadneme (Av, v) zdola (s použitím Fridrichsovy nerovnosti):

$$(Av, v) \quad = \quad \int_0^1 (1+x)v'v' dx \geq \int_0^1 v'v' dx \geq \frac{2}{1}\int_0^1 v^2 dx,$$

tedy $c = 2$.

b) Přibližné řešení bude $w_1 = \alpha_1\psi_1 + \varphi$, kde

$$\alpha_1 = \frac{(5, \psi_1)}{(A\psi_1, \psi_1)}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}(A\psi_1, \psi_1) &= \int_0^1 (1+x)(2x-2)^2 dx = \frac{5}{3}\\ (5, \psi_1) &= \int_0^1 5x(x-2) dx = -\frac{10}{3}.\end{aligned}$$

Tedy $\boxed{w_1 = -2\psi_1 + \varphi = -2x(x-2) + 3x + 1 = -2x^2 + 7x + 1}$.

c) Přibližné řešení bude $w_2 = \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \varphi$, kde β_1 a β_2 dostaneme vyřešením soustavy rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} (A\psi_1, \psi_1) & (A\psi_2, \psi_1) & (5, \psi_1) \\ (A\psi_1, \psi_2) & (A\psi_2, \psi_2) & (5, \psi_2) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{5}{3} & \frac{16}{5} & -\frac{10}{3} \\ \frac{16}{5} & \frac{63}{10} & -\frac{25}{4} \end{array}\right).$$

Dostaneme $\beta_1 \approx -3.85$ a $\beta_2 \approx 0.96$.

d) Pro odhad použijeme vzorec $\|w_1 - \widehat{u}\|_2 = \|\alpha_1\psi_1 - \widehat{v}\|_2 \leq \frac{1}{c}\|5 - A\alpha_1\psi_1\|_2$, kde $\widehat{v}$ je přesné řešení úlohy s homogenními okraj. podmínkami:

$$\begin{aligned}\boxed{\|w_1 - \widehat{u}\|_2} &\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (5 - A(-2)\psi_1)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (5 + 2A\psi_1)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (5 + 2(-4x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (5-8x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{19}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1.26}.\end{aligned}$$