740. M je trojúhelník s vrcholy $(-1,0)$, $(0,3)$, $(2,1)$.

741. M je rovnoběžník s vrcholy $(-1,-7)$, $(2,-1)$, $(2,3)$, $(-1,-3)$.

742. M je uzavřená množina ohraničená křivkami $y^2 = x$, $y^2 = 4 - 3x$.

743. M je uzavřená množina ohraničená přímkami $y = \frac{3}{4}x$, $y = 3x$ a obloukem hyperboly $xy = 12$ ležícím v prvním kvadrantu.

744. Zaměňte pořadí integrace ve dvojnásobných integrálech:

a) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$;   b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{y^3}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$;

c) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$;   d) $\displaystyle\int_{-6}^2 \left(\int_{\frac{1}{4}y^2-1}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$;

e) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$.

Ve cvičeních 745–758 vypočtěte dané dvojné integrály.

745. $\displaystyle\iint_M (2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 3\}$.

746. $\displaystyle\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$.

X **747.** $\displaystyle\iint_M xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0\}$.

748. $\displaystyle\iint_M (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq \frac{3}{2}x \wedge (x-1)^2 + y \leq 4\}$.

749. $\displaystyle\iint_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

750. $\displaystyle\iint_M |x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq y \wedge 4x^2 + y^2 \leq 12\}$.

751. $\displaystyle\iint_M y^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq a^2\}$ $(a > 0)$.

752. $\displaystyle\iint_M \frac{2x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \leq 1 \wedge \sqrt{x} \leq y\} - \{(0,0)\}$.

753. $\displaystyle\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je uzavřená oblast ohraničená křivkami $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

754. $\displaystyle\iint_M (x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je uzavřená oblast ohraničená křivkami $y = x^2$, $y^2 = x$.

755. $\displaystyle\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je uzavřená oblast ohraničená křivkami $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$.

756. $\displaystyle\iint_M \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

757. $\displaystyle\iint_M x^2\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je uzavřená oblast ohraničená křivkami $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

X **758.** $\displaystyle\iint_M \sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

759. Vypočtěte $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \iint_{M_a} \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq x\}$, $a \in (0, +\infty)$.

CVIČENÍ

760. Ukažte, že vektorová funkce $\boldsymbol{g}: G_{uv} \to \mathbf{R}^2$ je prostá, určete její obor hodnot $G_{xy} = \boldsymbol{g}(G_{uv})$, najděte inverzní vektorovou funkci $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}^{-1}: G_{xy} \to \mathbf{R}^2$ a vypočtěte Jacobián $J_{\boldsymbol{g}}$ vektorové funkce $\boldsymbol{g}$, jestliže:

a) $\boldsymbol{g}: x = 3u - 2v,\ y = u + v, \quad G_{uv} = \mathbf{R}^2;$

b) $\boldsymbol{g}: x = u,\ y = uv, \quad G_{uv} = (0,1) \times (0,1);$

c) $\boldsymbol{g}: x = u + v,\ y = \dfrac{v}{u}, \quad G_{uv} = (0,+\infty) \times (0,+\infty);$

d) $\boldsymbol{g}: x = u^2 + v^2,\ y = \dfrac{u}{v}, \quad G_{uv} = (0,+\infty) \times (0,+\infty);$

e) $\boldsymbol{g}: x = \dfrac{u^3}{v},\ y = \dfrac{v^2}{u}, \quad G_{uv} = (0,+\infty) \times (0,+\infty);$

f) $\boldsymbol{g}: x = u\cos^s v,\ y = u\sin^s v, \quad G_{uv} = (0,+\infty) \times (0,\tfrac{1}{2}\pi) \quad (s > 0).$

Ve cvičeních 761–770 vypočtěte dané dvojné integrály pomocí substituce do polárních souřadnic.

761. $\displaystyle\iint_M (1 - 3x - 2y)\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4 \wedge y \ge x\}$.

762. $\displaystyle\iint_M \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 9\pi^2\}$.

763. $\displaystyle\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le \mathrm{e} \wedge y \ge 0\}$.

764. $\displaystyle\iint_M \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \wedge x \ge 0\}$.

765. $\displaystyle\iint_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \wedge x \le y \le \sqrt{3}\,x\}$.

766. $\displaystyle\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le x \wedge 0 \le x \le 1\}$.

767. $\displaystyle\iint_M xy^2\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2ax\}$ $(a > 0)$.

768. $\displaystyle\iint_M (x+y)\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le a(x+y)\}$ $(a > 0)$.

769. $\displaystyle\iint_M y\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \le ay^3\}$ $(a > 0)$.

770. $\displaystyle\iint_M x^2y^2\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \le a^2(x^2-y^2)\}$ $(a > 0)$.

Ve cvičeních 771–774 vypočtěte dané dvojné integrály pomocí substituce do zobecněných polárních souřadnic.

771. $\displaystyle\iint_M (x-2y)\,dx\,dy$, kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1 \wedge 0 \le x \le \sqrt{12}\,y\right\}$.

772. $\displaystyle\iint_M (x^2+y^2)\,dx\,dy$, kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$ $(a > 0, b > 0)$.

773. $\displaystyle\iint_M \ln(1+x^2+9y^2)\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 9y^2 \le 36\}$.

774. $\displaystyle\iint_M x^3\,dx\,dy$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x-2)^2 + 4y^2 \le 4\}$.

775. Pomocí substituce $x = \varrho\cos^3\varphi$, $y = \varrho\sin^3\varphi$ vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M xy\,dx\,dy, \quad \text{kde } M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \le \sqrt[3]{a^2}\} \quad (a > 0).$$

Ve cvičeních 792–800 vypočtěte objemy daných válcových těles.

792. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : |x| \le 1 \wedge |y| \le 1 \wedge 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2 \}.$

793. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \ge 0 \wedge \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x} \wedge z \ge 0 \wedge x + z \le 6 \}.$

794. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2x \wedge 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \}.$

795. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x-a)^2 + (y-a)^2 \le a^2 \wedge 0 \le z \le x^2 + y^2 \}$ $(a > 0)$. [Návod: Použijte substituci danou vektorovou funkcí $\boldsymbol{g}^* : x = a + \varrho\cos\varphi,\ y = a + \varrho\sin\varphi$ (jde o složení transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (a,a).]

796. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2+y^2)^2 \le 2a^2xy \wedge z \ge 0 \wedge z^2 \le 2xy \}$ $(a > 0)$.

797. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2+y^2)^2 \le a^2(x^2-y^2) \wedge 0 \le az \le x^2 + y^2 \}$ $(a > 0)$.

798* $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^4 + y^4 \le a^2(x^2+y^2) \wedge 0 \le 2z \le x^2 + y^2 \}$ $(a > 0)$.

799. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \le x^2 \le 2y \wedge x \le y^2 \le 2x \wedge 0 \le z \le xy \}.$

800. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge \frac{1}{2}x \le y \le 2x \wedge a^2 \le xy \le 2a^2 \wedge 0 \le z \le x^2 + y^2 \}$ $(a > 0)$.

Ve cvičeních 801–808 vypočtěte objemy válcových těles ohraničených danými plochami.

801. $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3,\ z = 0,\ z = 4x^2 + 2y^2 + 1.$

802. $y = 1,\ y = x^2,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2.$

803. $y = \frac{1}{2}x^2,\ z = 4 - y^2,\ z = 0.$

804. $y = \ln x,\ y = \ln^2 x,\ z = 0,\ y + z = 1.$

805. $y = 0,\ y = 2x,\ x + y = a,\ z = 0,\ z = a^2 - x^2$ $(a > 0)$.

806. $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0,\ z = a^2 - x^2$ $(a > 0)$.

807. $z = 16 - x^2 - 4y^2,\ z = 0.$

808. $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0,\ z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ $(a > 0)$.

809. Vypočtěte objem tělesa $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2ax \wedge x \le z \le 2x \}$ $(a > 0)$.

810. Vypočtěte objem tělesa $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 \wedge (x^2+y^2)^2 \le a^2(x^2-y^2) \}$ $(a > 0)$.

811. Vypočtěte objem tzv. *Vivianiova tělesa*

$$\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 \wedge x^2 + y^2 \le ax \} \quad (a > 0).$$

812. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného dvěma rotačními válcovými plochami o stejném poloměru R, jejichž osy rotace se kolmo protínají.

813* Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rotační válcovou plochou $x^2+y^2 = 2ax$ a rotačním paraboloidem $y^2 + z^2 = 4ax$ $(a > 0)$.

814. Vypočtěte objem tělesa $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le a^2 \wedge x^2+y^2 \le b^2 \}$ $(0 < b < a)$.

Ve cvičeních 815–829 vypočtěte obsahy daných ploch.

$\frac{40}{9}$ v. **815.** $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 12 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0 \}.$

816. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z \wedge 2z^2 \le xy \}.$ $\frac{1}{9}(20-3\pi)$

817. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y^2 + z^2 = 2ax \wedge z \ge 0 \wedge y^2 \le ax \wedge x \le a \}$ $(a > 0)$.

818. $\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1 \wedge z \ge 0 \}.$

819. $\left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 2z \wedge \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

820. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x+y)^2 + 2z = 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$.

821. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq \frac{1}{3}\}$.

822* $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0 \wedge |x| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \wedge |y| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$.

823. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \wedge z \geq 0 \wedge z^2 \leq 2y\}$.

824. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \wedge z \geq 0 \wedge z \leq \sqrt{2}(\frac{1}{2}x + 1)\}$.

825. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 = a^2 \wedge z \geq 0 \wedge |y| \leq x\}$ $(a > 0)$.

826. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 - y^2 = z^2 \wedge z \geq 0 \wedge (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\}$ $(a > 0)$.

827. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{a^2} \wedge z \geq 0 \wedge \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq \sqrt[3]{a^2}\}$ $(a > 0)$.

828. $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\}$ $(a > 0)$.

829. $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge z \geq 0 \wedge \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ $(0 < b < a)$.

830. Vypočtěte obsah povrchu tělesa $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2az\}$ $(a > 0)$.

831. Vypočtěte obsah povrchu tělesa ze cvič. 812.

832. Pomocí dvojného integrálu odvoďte vzorec pro výpočet obsahu pláště rotačního kužele s poloměrem podstavy R a výškou H.

833. Pomocí dvojného integrálu odvoďte vzorec pro výpočet obsahu pláště komolého rotačního kužele s poloměry podstav R_1, R_2 $(0 < R_1 < R_2)$ a výškou H.

Ve cvičeních 834–838 vypočtěte hmotnosti tenkých desek $M \subset \mathbf{R}^2$, jejichž hustoty jsou popsány danými funkcemi $h\colon M \to (0, +\infty)$.

834. $M = \langle 0,3\rangle \times \langle 1,2\rangle$, $h(x,y) = x^2y^3$.

835. $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq \frac{1}{2}\pi\}$, $h(x,y) = \cos x \cos y$.

836. M je ohraničená parabolou $y = x^2$ a přímkou $x - y + 2 = 0$, $h(x,y) = xy$.

837. M je ohraničená kružnicí $x^2 + y^2 = 2ax$, $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$.

838. M je ohraničená elipsou $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, hustota $h(x,y)$ je přímo úměrná vzdálenosti bodu (x,y) od osy x, přičemž $h(0,b) = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Ve cvičeních 839–845 vypočtěte souřadnice těžišť daných homogenních hmotných tenkých desek $M \subset \mathbf{R}^2$.

839. M je ohraničená křivkami $4y = x^2$, $x + y = 3$.

840. M je ohraničená křivkami $y = 2x - 3x^2$, $y = -x$.

841. M je ohraničená smyčkou křivky $y^2 = x^2 - x^4$ ležící v polorovině $x \geq 0$.

842. M je ohraničená křivkou $y = \sin x$, $x \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, a úsečkou s krajními body $(0,0)$, $(\frac{1}{2}\pi, 1)$.

843. M je ohraničená kružnicí $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ a osami souřadnic $(a > 0)$.

844. M je ohraničená uzavřenou křivkou (kardioidou), jejíž rovnice v polárních souřadnicích je $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$.

845. a) M je ohraničená obloukem křivky (Archimédovy spirály), jehož vyjádření v polárních souřadnicích je $\varrho = a\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, a úsečkou s krajními body $(0,0)$, $(0, \frac{1}{2}\pi a)$ $(a > 0)$;

b) M je ohraničená obloukem křivky (Archimédovy spirály), jehož vyjádření v polárních souřadnicích je $\varrho = a\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, a úsečkou s krajními body $(0,0)$, $(2\pi a, 0)$ $(a > 0)$.

846. Homogenní tenká deska má tvar kruhové výseče s poloměrem R a středovým úhlem 2α $(0 < \alpha < \pi)$. Vypočtěte vzdálenost těžiště desky od středu kruhu.

12.39. Poznámka. Tvrzení z pozn. 12.5 má následující analogii pro trojný integrál:

Nechť F je funkce (dvou proměnných) definovaná na měřitelné množině $M \subset \mathbf{R}^2$, h funkce (jedné proměnné) definovaná na intervalu $\langle p,q\rangle$, nechť $F \in R(M)$, $h \in R\langle p,q\rangle$. Označme $\Omega = M \times \langle p,q\rangle$. Potom Ω je měřitelná množina v $\mathbf{R}^3$, funkce $(x,y,z) \mapsto F(x,y)h(z)$, $(x,y,z) \in \Omega$, je riemannovsky integrovatelná na Ω a platí

$$\iiint_\Omega F(x,y)h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\iint_M F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\cdot\left(\int_p^q h(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Je-li navíc $M = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, $F(x,y) = f(x)g(y)$, $(x,y) \in M$, kde $f \in R\langle a,b\rangle$, $g \in R\langle c,d\rangle$, potom platí

$$\iiint_\Omega f(x)g(y)h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right)\cdot\left(\int_p^q h(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Důkaz by byl podobný jako v pozn. 12.5 a nebudeme jej provádět.

CVIČENÍ

V každém ze cvičení 859–861 převeďte trojný integrál spojité funkce f na dané množině $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ na trojnásobný integrál, v němž je integrace podle jednotlivých proměnných prováděna v tomto pořadí:

a) z, y, x; b) x, y, z.

859. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 \le 1 \wedge z \ge 0\}$.

860. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z \le 1 \wedge z \ge -1\}$.

861. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4\}$.

V každém ze cvičení 862, 863 zaměňte pořadí integrace v daném trojnásobném integrálu tak, aby integrace podle jednotlivých proměnných byla prováděna v tomto pořadí:

a) y, z, x; b) x, y, z.

862. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

863. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

Ve cvičeních 864–869 vypočtěte dané trojné integrály.

864. $\displaystyle\iiint_J \left(x^3y - \frac{z}{y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $J = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

865. $\displaystyle\iiint_J xy^2\sqrt{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $J = \langle -2,1\rangle \times \langle 1,3\rangle \times \langle 2,4\rangle$.

866. $\displaystyle\iiint_J \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $J = \langle 1,3\rangle \times \langle 1,3\rangle \times \langle 1,3\rangle$.

867. $\displaystyle\iiint_J x^2 z \mathrm{e}^{x-y+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $J = \langle -1,1\rangle \times \langle -2,0\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

868. $\displaystyle\iiint_J \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x+y+z+1}}$, kde $J = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

869. $\displaystyle\iiint_J \cos(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $J = \langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle \times \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle$.

Ve cvičeních 870–878 vypočtěte dané trojné integrály [např. pomocí prvního případu Fubiniovy věty pro trojný integrál (M II, věta 12.60)].

$\boxed{870.}$ $\iiint_\Omega x^2y^3z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1 \wedge z \ge 0 \wedge x^2+y^2+z^2 \le 2\}$.

$\boxed{871.}$ $\iiint_\Omega xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ je uzavřená oblast ohraničená plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$, $z = xy$.

$\boxed{872.}$ $\iiint_\Omega (2x+3y-z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge x+y \le 1 \wedge 0 \le z \le 2\}$.

$\boxed{873.}$ $\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1+x+y},$ kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0 \wedge x+y+z \le 1\}$.

$\boxed{874.}$ $\iiint_\Omega xy^2 \sin(x+y+z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0 \wedge x+y+z \le \frac{1}{2}\pi\}$.

$\boxed{875.}$ $\iiint_\Omega xz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \le x \wedge 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$.

$\boxed{876.}$ $\iiint_\Omega y^2 \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \le 1 \wedge 0 \le z \le 1\right\}$.

$\boxed{877.}$ $\iiint_\Omega \frac{x^3yz}{(1+z^2)^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$.

$\boxed{878.}$ $\iiint_\Omega \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \ge 1 \wedge z \ge 0 \wedge x^2+y^2+z^2 \le 4\}$.

Ve cvičeních 879–884 vypočtěte dané trojné integrály [např. pomocí druhého případu Fubiniovy věty pro trojný integrál (M II, věta 12.64)].

$\boxed{879.}$ $\iiint_\Omega z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4 \wedge x^2+y^2 \le 3z\}$.

$\boxed{880.}$ $\iiint_\Omega z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le a^2 \wedge x^2+y^2+z^2 \le 2az\}$ $(a > 0)$.

$\boxed{881.}$ $\iiint_\Omega |y|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^4+z^2 \le 1\}$.

$\boxed{882.}$ $\iiint_\Omega x^5 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0 \wedge x+2y+3z \le 6\}$.

$\boxed{883.}$ $\iiint_\Omega x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : |x|+|y|+|z| \le 1\}$.

$\boxed{884.}$ $\iiint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$ $(a > 0,\ b > 0,$ $c > 0)$.

890. $\iiint_\Omega xyz \, dx \, dy \, dz$,

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$.

891. $\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$,

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq z^2 \wedge z \geq 0\}$ $(a > 0)$.

892. $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$,

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \wedge x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$ $(a > 0)$.

893. Pomocí substituce do sférických souřadnic vypočtěte trojný integrál ze cvič. 878.

894. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a(x + y + z)\}$ $(a > 0)$. [Návod: Použijte substituci danou vektorovou funkcí $x = a + r\cos\varphi\cos\psi$, $y = a + r\sin\varphi\cos\psi$, $z = a + r\sin\psi$ (jde o složení transformace do sférických souřadnic a posunutí o vektor (a, a, a)).]

Ve cvičeních 895–897 vypočtěte dané trojné integrály pomocí substituce do zobecněných sférických souřadnic.

895. $\iiint_\Omega z^3 \, dx \, dy \, dz$,

kde $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \wedge z \geq 0\right\}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

896. $\iiint_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \, dx \, dy \, dz$,

kde $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

897. $\iiint_\Omega z \, dx \, dy \, dz$, kde $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z\right\}$.

Ve cvičeních 898–903 vypočtěte dané trojné integrály pomocí substituce do cylindrických souřadnic.

898. $\iiint_\Omega x^2 y^2 z \, dx \, dy \, dz$, kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

899. $\iiint_\Omega xz \, dx \, dy \, dz$, kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x \wedge x \leq z \leq 2x\}$.

900. $\iiint_\Omega (x^4 + y^4) z \, dx \, dy \, dz$,

kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

901. $\iiint_\Omega (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z \wedge z \leq 2\}$.

902. $\iiint_\Omega (x^2 + y^2) z \, dx \, dy \, dz$, kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$.

Jacobián vektorové funkce g^* je

$$J_{g^*}(r,\varphi^*,\psi) = J_g(\varrho,\varphi,z^*) \,.\, J_{h^*}(r,\varphi^*,\psi) = \varrho \,.\, r = (a + r\cos\psi)r.$$

Množině Ω odpovídá při této substituci trojrozměrný interval $\Omega_{r\varphi^*\psi} = \langle 0,b\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$ (podrobněji opět viz pozn. 12.44).

Jiným způsobem byl tento příklad vyřešen v P I (viz P I, příkl. 6.69). □

12.55. Poznámka. Pro výpočet momentu setrvačnosti hmotného tělesa vzhledem k (libovolné) přímce se někdy hodí následující tvrzení (tzv. *Steinerova věta* — srovn. s pozn. 12.33):

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je (nikoliv nutně homogenní) těleso o hmotnosti m, nechť $p \subset \mathbb{R}^3$ je libovolná přímka a nechť $p^* \subset \mathbb{R}^3$ je přímka procházející těžištěm tělesa Ω rovnoběžná s přímkou p. Označme d vzdálenost přímek p, p^*. Potom platí

$$I_p = I_{p^*} + md^2,$$

kde I_p, resp. I_{p^*} je moment setrvačnosti tělesa Ω vzhledem k přímce p, resp. p^*.

Důkaz tohoto tvrzení je zadán jako cvič. 966.

CVIČENÍ

Ve cvičeních 905–913 vypočtěte objemy těles ohraničených danými plochami.

905. $y = x,\ y = x^2,\ z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2.$

906. $x = 1,\ y = x,\ y = 2x,\ z = x^2 + y^2,\ z = x^2 + 2y^2.$

907. $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1,\ z = xy,\ z = x + y.$

908*. $z = 0,\ z = xy,\ x + y + z = 1.$

909. $z = 6 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

910. $x^2 + y^2 + z^3 = 1,\ z + 1 = 0.$

911. $x^2 + y^2 + z^4 = 1.$

912. $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{3}z,\ x + \frac{1}{3}z = 2.$

913. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

Ve cvičeních 914–926 vypočtěte míry daných množin.

914. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2 \wedge z^2 \leq xy\}.$

915. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \wedge x^2 + y^2 \leq 2 - z\}.$

916. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2az\} \quad (a > 0).$

917. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az\} \quad (a > 0).$

918. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}.$

919. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \wedge x^2 + y^2 \leq \frac{1}{3}z^2\} \quad (a > 0).$

920. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^3 z\} \quad (a > 0).$

921. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq az(x^2 + y^2)\} \quad (a > 0).$

922. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^2(x^2 + y^2 - z^2)\} \quad (a > 0).$

923. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq a^2(x^2 + y^2)^2\} \quad (a > 0).$

924. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq a^3 xyz\} \quad (a > 0).$

925. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1 \wedge \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq \dfrac{z^2}{c^2} \wedge z \geq 0\right\} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

926. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 \leq \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right\} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

927. Vypočtěte poměr objemů dvou těles, na něž dělí rotační paraboloid $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ kouli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az \quad (a > 0).$

Ve cvičeních 928–931 vypočtěte míry daných množin $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ pomocí vhodné substituce (ze cvič. 885).

928. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x+y+z)^2 \leq az \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ $(a > 0)$.

929. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{a}\}$ $(a > 0)$.

930. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} \leq \sqrt[3]{a^2}\}$ $(a > 0)$.

931. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{|y|} + \sqrt[3]{|z|} \leq \sqrt[3]{a}\}$ $(a > 0)$.

Ve cvičeních 932, 933 vypočtěte míry daných množin $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ pomocí vhodné substituce (viz pozn. 12.49).

932.* $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : a \leq x+y+z \leq 2a \wedge z \leq x+y \leq 2z \wedge x \leq y \leq 3x\}$ $(a > 0)$.

933.* $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : ax \leq y^2 \leq bx \wedge cy \leq z^3 \leq dy \wedge pz \leq x \leq qz\} - \{(0,0,0)\}$ $(0 < a < b,\ 0 < c < d,\ 0 < p < q)$.

Ve cvičeních 934, 935 vypočtěte hmotnosti těles $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, jejichž hustoty jsou popsány danými funkcemi $h\colon \Omega \to \langle 0, +\infty)$.

934. Těleso Ω je ohraničené rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, $h(x,y,z) = x + y + z$ $(a > 0)$.

935. Těleso Ω je ohraničené rovinou $z = 0$ a rotačním paraboloidem $az = a^2 - x^2 - y^2$, $h(x,y,z) = z^3$ $(a > 0)$.

936. Vypočtěte hmotnost nehomogenního rotačního válce s poloměrem podstavy R a výškou H, jestliže hustota v každém bodě válce je přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od roviny, v níž leží jedna z podstav válce, a v bodech druhé podstavy je rovna jedné.

937. Vypočtěte hmotnost nehomogenní koule s poloměrem R, jestliže hustota v každém bodě koule je rovna třetí mocnině vzdálenosti tohoto bodu od středu koule a v bodech hraniční kulové plochy je rovna jedné.

938. Vypočtěte hmotnost nehomogenní „duté“ koule s „vnitřním“ poloměrem R_1 a „vnějším“ poloměrem R_2 $(0 < R_1 < R_2)$, jestliže hustota v každém bodě tělesa je nepřímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od společného středu hraničních kulových ploch a v bodech „vnitřní“ hraniční kulové plochy je rovna jedné.

939. Vypočtěte hmotnost nehomogenního rotačního kužele s poloměrem podstavy R a výškou H, jestliže hustota v každém bodě kužele je rovna vzdálenosti tohoto bodu od vrcholu kužele.

Ve cvičeních 940–948 najděte těžiště daných homogenních těles $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

940. $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1\right\}$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$.

941. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \leq 1 \wedge y^2 \leq 4x \wedge 0 \leq 4z \leq x^2\}$.

942. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq b \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}$ $(a > 0, b > 0)$.

943. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 \leq a^2 \wedge y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge z \geq 0\}$ $(a > 0)$.

944. Těleso Ω je ohraničené plochami $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

945. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2az\}$ $(a > 0)$.

946. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq z^2 \wedge z \geq 0\}$ $(a > 0)$.

947. $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \wedge z \geq 0\right\}$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$.

948.* $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^2(z^2 - x^2 - y^2) \wedge z \geq 0\}$ $(a > 0)$.

949. Vypočtěte vzdálenost těžiště homogenního rotačního kužele s poloměrem podstavy R a výškou H od středu jeho podstavy.

950. Najděte těžiště nehomogenní krychle $\Omega = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$, jestliže její hustota je popsána funkcí $h(x, y, z) = x^2y^4z^6$.

951. Najděte těžiště nehomogenní koule $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\}$, jestliže hustota v každém jejím bodě je rovna vzdálenosti tohoto bodu od bodu $(0, 0, 0)$.

Ve cvičeních 952–962 předpokládejte, že hustoty daných hmotných těles v každém jejich bodě jsou rovny jedné.

952. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa ze cvič. 940.

953. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa ze cvič. 941.

954. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa ze cvič. 947.

955. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z Vivianiova tělesa z příkl. 12.53.

956. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenního tělesa

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^2(x^2 + y^2 - z^2)\} \qquad (a > 0).$$

957. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace homogenního „dutého“ rotačního válce, jestliže poloměr jeho vnitřní, resp. vnější hraniční válcové plochy je R_1, resp. R_2 $(R_1 < R_2)$ a jeho výška je H.

958. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního rotačního válce s poloměrem podstavy R a výškou H vzhledem k (libovolné) přímce, která se dotýká pláště válce a je rovnoběžná s osou rotace.

959. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního rotačního kužele s poloměrem podstavy R a výškou H:

a) vzhledem k ose rotace;
b) vzhledem k (libovolné) přímce, která je kolmá k ose rotace a prochází středem podstavy kužele.

960. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k přímce $x = y = z$ homogenního rotačního kužele $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

961. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní krychle s hranami délky a vzhledem k přímce, která obsahuje:

a) (některou) hranu krychle; b) (některou) tělesovou úhlopříčku krychle.

962. Vypočtěte momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y tělesa z příkl. 12.54.

963. Vypočtěte moment setrvačnosti nehomogenní koule, jejíž hustota v každém jejím bodě je rovna vzdálenosti tohoto bodu od středu koule, vzhledem k (libovolné) přímce, která:

a) prochází středem koule; b) se dotýká povrchu koule.

964. Vypočtěte moment setrvačnosti nehomogenního rotačního kužele s poloměrem podstavy R a výškou H, jehož hustota v každém jeho bodě je rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy rotace, vzhledem k:

a) ose rotace;
b) (libovolné) přímce, která je kolmá k ose rotace a prochází vrcholem kužele.

965. Nechť Ω je těleso (měřitelná uzavřená oblast v $\mathbf{R}^3$), které vznikne rotací kolem osy z rovinného obrazce M (měřitelné uzavřené oblasti v $\mathbf{R}^2$) ležícího v rovině Pxz, přičemž pro všechna $(x, z) \in M$ je $x \geq 0$. Dokažte, že pro objem V tělesa Ω a moment setrvačnosti I_z vzhledem k ose z homogenního tělesa Ω (s jednotkovou hustotou) platí:

$$V = 2\pi \iint_M x \, dx \, dz, \qquad I_z = 2\pi \iint_M x^3 \, dx \, dz.$$

966. Dokažte Steinerovu větu (viz pozn. 12.55).