MA4 - cvičení dne 3.12.2018 - oprava druhého příkladu

Je dána úloha najít $u \in C^2\langle 0,1\rangle$ splňující $u(0)=3$, $u(1)=-2$ a rovnici

$$(5-x^2)u''(x) - 2xu'(x) - 3xu(x) = x \qquad \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle.$$

a) Napište úlohu ve tvaru diferenciální rovnice se symetrickým a pozitivně definitním operátorem A v divergentním tvaru a s homogenními okrajovými podmínkami. Určete $D(A)$. Ukažte symetrii i pozitivní definitnost operátoru A.
b) Najděte co největší konstantu c pozitivní definitnosti operátoru A.
c) Najděte přibližná řešení původní i nové úlohy, kde využijete násobku funkce $w(x) = x(1-x)$.

Řešení:

a)
Nejdříve si všimneme nehomogenních okrajových podmínek v zadání a "odstraníme je":
Najdeme lineární funkci, která jim vyhovuje: $y(x) = 3-5x$. Potom zavedeme substituci $u(x) = v(x)+y(x) = v(x)+3-5x$ a dosadíme do celé úlohy za $u(x)$. Tím dostaneme $u(0)=3=v(0)+3-5\cdot 0$ (čili $v(0)=0$), $u(1)=-2=v(1)+3-5\cdot 1$ (čili $v(1)=0$),

$$(5-x^2)v''(x) - 2x(v'(x)-5) - 3x(v(x)+3-5x) = x \qquad \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle.$$

Takže máme novou úlohu, kde ale hledáme $v \in C^2\langle 0,1\rangle$ tak, aby $v(0)=0$, $v(1)=0$ a

$$(5-x^2)v''(x) - 2xv'(x) - 3xv(x) = -15x^2 \qquad \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle.$$

Nyní tedy máme již homogenní okrajové podmínky. (Tato nová rovnice má vždy stejný operátor jako původní rovnice, ale jinou pravou stranu.)

Teď se zaměříme na diverg. tvar operátoru na levé straně rovnice. Místo členů $(5-x^2)v''(x) - 2xv'(x)$ chceme výraz typu $(s(x)u'(x))' = s'(x)u'(x) + s(x)u''(x)$, takže je vidět, že $s(x) = 5-x^2$ a $s'(x) = -2x$ vyhovuje našemu požadavku, a máme tedy rovnici

$$((5-x^2)v'(x))' - 3xv(x) = -15x^2 \qquad \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle.$$

Aby byl operátor pos. def., musíme zkontrolovat, zda $5-x^2 > 0$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$, a jestliže ano, musíme otočit všechna znaménka v rovnici, abychom před prvním členem dostali minus (a po provedení per partes plus). Nová rovnice (s tímto tvarem budeme dál pracovat) je tedy

$$-((5-x^2)v'(x))' + 3xv(x) = 15x^2 \qquad \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle.$$

Výsledný operátor A rovnice je definován jako $Av = -((5-x^2)v')' + 3xv$. Jeho definiční obor je $D(A) = \{u \in C^2\langle 0,1\rangle; u(0)=0, u(1)=0\}$.

Nyní ukážeme, že A je symetrický: zvolme libovolné dvě funkce $u, v \in D(A)$ a upravujme

$$\begin{aligned}
(Au,v) &= \int_0^1 Au\cdot v\,dx = \int_0^1 [-((5-x^2)u')' + 3xu]\cdot v\,dx = \\
&= \int_0^1 -((5-x^2)u')'v\,dx + \int_0^1 3xuv\,dx = -[(5-x^2)u'v]_0^1 + \int_0^1 (5-x^2)u'v'\,dx + \int_0^1 3xuv\,dx \\
&= \int_0^1 (5-x^2)u'v'\,dx + \int_0^1 3xuv\,dx.
\end{aligned}$$

Podobně ukážeme

$$(u,Av) = \int_0^1 u\cdot Av\,dx = \int_0^1 [-((5-x^2)v')' + 3xv]\cdot u\,dx = \ldots = \int_0^1 (5-x^2)u'v'\,dx + \int_0^1 3xuv\,dx.$$

Takže $(Au, v) = (u, Av)$ pro každé funkce $u, v \in D(A)$ a tím jsme dokázali symetrii operátoru A. Také vidíme, že (Au, v) můžeme nahradit

$$(Au, v) = \int_0^1 (5 - x^2)u'v'\,dx + \int_0^1 3xuv\,dx,$$

což se nám bude hodit v následujícím kroku.

Teď dokážeme pozitivní definitnost operátotu A, čili $(Au, u) \geq c(u, u)$:

$$(Au, u) \quad = \quad \int_0^1 (5 - x^2)u'u'\,dx + \int_0^1 3xuu\,dx \geq \int_0^1 4u'u'\,dx + \int_0^1 0uu\,dx \geq 4\frac{2}{1}\int_0^1 u^2\,dx.$$

Takže

$$(Au, u) \geq 8(u, u)$$

a tedy A je pos. def. a největší konstanta v této nerovnosti je $c = 8$.

b)
Konstantu c jsme právě našli a je to $c = 8$.

c)
Přibližné řešení budeme hledat ve tvaru $v(x) = \beta w(x)$, kde $w(x) = x(1 - x)$. Neznámá konstanta β se určí ze vztahu

$$\beta = \frac{(f, w)}{(Aw, w)},$$

kde f je pravá strana rovnice, $f(x) = 15x^2$. Takže

$$\beta = \frac{(f, w)}{(Aw, w)} = \frac{\int_0^1 15x^2 \cdot x(1 - x)\,dx}{\int_0^1 (5 - x^2)(1 - 2x)^2\,dx + \int_0^1 3x \cdot x^2(1 - x)^2\,dx} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{19}{12}} = \frac{9}{19}.$$

Přibližné řešení nové úlohy je tedy

$$v(x) = \frac{9}{19}x(1 - x)$$

a přibližné řešení původní úlohy je

$$u(x) = \frac{9}{19}x(1 - x) + 3 - 5x = 3 - \frac{86}{19}x - \frac{9}{19}x^2$$

na $\langle 0, 1\rangle$.

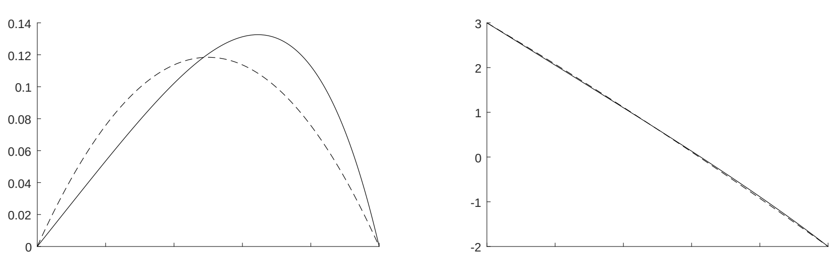

Figure 1: Přesné (plná čára) a přibližné (přerušovaná čára) řešení nové (vlevo) a původní (vpravo) úlohy.