MA1 a MA1A - otázky ke zkouškovému pohovoru

Cílem pohovoru je prověřit, zda se student orientuje v základních pojmech, zda zná jejich vlastnosti a související tvrzení (věty) a u některých vět i jejich důkazy. Důkazů je celkem 9. Seznam pojmů, vět a požadovaných důkazů je uveden níže.

Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

Posloupnost reálných čísel. Definice posloupnosti reálných čísel, posloupnost klesající, rostoucí, neklesající, nerostoucí, omezená shora, omezená zdola, omezená. Okolí bodu, neúplné okolí bodu. Definice limity posloupnosti. Limita vlastní a nevlastní. Neurčité výrazy. Konvergentní a divergentní posloupnost. Vybraná posloupnost (podposloupnost). Aritmetická a geometrická posloupnost, částečný a celkový součet jejich členů. Posloupnost typu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Věta. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. DŮKAZ.

Věta. Jestliže má posloupnost limitu, pak každá z ní vybraná posloupnost má také limitu a ta je tototožná s limitou původní posloupnosti.

Věta. Každá konvergentní posloupnost je omezená. DŮKAZ.

Věta. Každá monotónní posloupnost má limitu (vlastní nebo nevlastní).

Věta. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ a $c \in \mathcal{R}$, potom
a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;
b) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;
c) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$, jestliže $b \neq 0$ a jestliže všechny nulové členy b_k, $k = 1, 2, \ldots$ nahradíme libovolnými nenulovými čísly;
d) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$;
e) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$;
f) $\lim_{n\to\infty} c + a_n = c + a$.
Uvedené vztahy platí i v případě, že některá z limit je nekonečno a současně všechny uvedené výrazy mají smysl.

Věta. (Princip sevřené posloupnosti. Věta o dvou policajtech.)
a) Jestliže pro všechna $n \in N$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$ a jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, potom limita posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje a platí $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.
b) Jestliže pro všechna $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$ a jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, potom limita posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje a platí $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Funkce, základní pojmy. Elementární funkce a jejich vlastnosti a grafy, t.j. polynomické funkce, lineární lomené funkce, mocninné funkce, exponenciální funkce, goniometrické a cyklometrické funkce. Definiční obor a obor hodnot funkce. Funkce rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, sudá, lichá, periodická. Prostá funkce. Složená funkce, inverzní funkce k zadané funkci. Funkce omezená shora, zdola, funkce omezená. Supremum, infimum, maximum, minimum funkce. Lokální maximum, minimum, lokální extrém. Globání maximum, minimum, globální extrém (na intervalu). Ostrý a neostrý extrém.

Limita a spojitost funkce. Definice limity funkce v bodě, spojitosti funkce v bodě a na množině. Limita jednostranná, zleva, zprava. Nevlastní limita. Limita v nevlastním bodě. Heineova definice limity funkce v bodě.

Věta. Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, právě když existuje konečná limita funkce f v bodě x_0 a tato limita je rovna funkční hodnotě $f(x_0)$.

Věta. Jsou-li funkce f a g spojité v bodě x_0, jsou funkce $f+g$, $f \cdot g$, f/g pro $g(x_0) \neq 0$, $|f|$, $c \cdot f$ pro $c \in \mathcal{R}$ spojité v bodě x_0.

Věta. Limita funkce f v bodě x_0 existuje, právě když existují obě limity funkce f v bodě x_0 zprava a zleva a jsou si rovny.

Věta. Pokud existuje limita funkce f v bodě x_0, je dána jednoznačně. DŮKAZ.

Věta. Pro výpočet limit funkcí v bodě platí následující pravidla. Platí-li $\lim_{x\to *} f(x) = F$ a $\lim_{x\to *} g(x) = G$, potom $\lim_{x\to *}(f(x)+g(x)) = F+G$, $\lim_{x\to *} f(x)g(x) = F \cdot G$, $\lim_{x\to *} f(x)/g(x) = F/G$ pro $G \neq 0$, $\lim_{x\to *} |f| = |F|$, $\lim_{x\to *} c \cdot f = c \cdot F$, jestliže použité výrazy mají smysl. Za $*$ můžeme dosadit reálné číslo nebo ∞ nebo $-\infty$.

Věta. Jestliže $f(x) \le g(x) \le h(x)$ na nějaké množině $(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, potom $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.

Věta. (Limita složené funkce.) Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to b} g(x) = c$, a nechť buď je funkce g spojitá v bodě b nebo existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro všechna $x \in P(a)$ je $f(a) \neq b$, potom $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Věta. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a \quad (a \in \mathcal{R}).$$

Věta. (Bolzanova věta.) Jestliže f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a jestliže $f(a)\cdot f(b) < 0$, potom existuje aspoň jeden bod $c \in (a,b)$ takový, že $f(c) = 0$. DŮKAZ.

Věta. (Weierstrassova věta.) Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá na tomto intervalu své největší a nejmenší hodnoty (svého globálního maxima a globálního minima).

Derivace funkce. Definice derivace funkce. Jednostranná derivace. Geometrický a fyzikální význam derivace. Tečna grafu funkce, úhel dvou křivek, rychlost a zrychlení. Derivace na intervalu. Pravidla pro derivování elementárních funkcí. Derivace složené funkce. Derivace inverzní funkce. Diference. Definice diferenciálu prvního řádu. Derivace vyšších řádů. Oskulační kružnice, křivost. Vztah derivace, monotonie a extrémů. Konvexní a konkávní funkce. Inflexní bod. Definice svislé a šikmé asymptoty grafu funkce. L'Hospitalovo pravidlo. Taylorova věta, Taylorův polynom. Přibližné řešení nelineárních rovnic, Newtonova metoda.

Věta. Má-li funkce f konečnou (vlastní) derivaci v bodě $x_0 \in D(f)$, je v bodě x_0 spojitá. Opačná implikace neplatí. DŮKAZ.

Věta. Funkce f má v bodě c diferenciál právě tehdy, existuje-li derivace $f'(c)$. V tom případě platí $\mathrm{d}f(c)(h) = f'(c) \cdot h$.

Věta. (Rolleova věta.) Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, má vlastní nebo nevlastní derivaci na (a, b) a platí $f(a) = f(b) = 0$. Potom existuje číslo $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta. (Lagrangeova věta. Věta o střední hodnotě.) Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li vlastní derivaci na (a, b), pak existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

Věta.
a) Je-li $f' > 0$ na (a, b), je f na (a, b) rostoucí;
b) je-li $f' < 0$ na (a, b), je f na (a, b) klesající;
c) je-li $f' = 0$ na (a, b), je f na (a, b) konstantní. DŮKAZ.

Věta. Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, potom $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje. DŮKAZ.

Věta.
a) Jestliže je f spojitá v bodě x_0 a jestliže $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje a jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.
b) Jestliže $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$ má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.

Věta. (L'Hospitalovo pravidlo.) Nechť je $x_0 \in \mathcal{R}^*$. Jestliže existuje $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ a jestliže buď $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ nebo$-\infty$ a f je jakákoliv, potom také existuje $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$. Uvedené pravidlo lze použít i pro výpočet jednostranných limit.

Věta. Nechť je funkce f spojitá na intervalu I a nechť $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, v každém vnitřním bodě intervalu I. Potom je f na I ryze konvexní, resp. ryze konkávní.

Věta. (Nutná podmínka inflexe.) Je-li c bodem inflexe funkce f, pak buď $f''(c)$ neexistuje nebo $f''(c) = 0$.

Věta. (Postačující podmínka inflexe.) Postačující podmínkou pro existenci inflexe funkce f v bodě c je jedna z následujících skutečností,
a) $f''(c) = 0$ a existuje $\delta > 0$, že buď $f''(c) > 0$ na $(c - \delta, c)$ a $f''(c) < 0$ na $(c, c + \delta)$, nebo naopak;
b) $f''(c) = 0$ a $f'''(c)$ existuje a $f'''(c) \neq 0$.

Věta. (Taylorova věta.) Nechť funkce f má derivace až do řádu $n + 1$ v intervalu J, a nechť $x, c \in J$, pak existuje bod ξ v intervalu ohraničeném body c a x tak, že $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$, kde

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

a zbytek $R_{n+1}(x)$ je

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Lineární algebra

Vektorový prostor. Prostor $\mathcal{R}^n$. Lineární kombinace. Lineární závislost a nezávislost. Podprostor. Lineární obal skupiny vektorů. Báze. Dimenze. Skalární součin. Souřadnice vektoru vzhledem k bázi. Matice. Hodnost matice. Regulární a singulární matice. Stupňovitá matice. Gaussův eliminační algoritmus. Soustava lineárních rovnic. Matice soustavy, vektor pravé strany, rozšířená matice soustavy. Homogenní a nehomogenní soustavy. Maticové operace, součet, skalární násobek, transpozice a součin. Nulová matice, jednotková matice. Inverzní matice. Maticové rovnice. Determinant matice. Adjungovaná matice. Cramerovo pravidlo. Vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Věta. (Věta o výměně.) Nechť v je lineární kombinace vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m$, a nechť koeficient a_k není nulový. Potom lineární obal vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_m$ je shodný s lineárním obalem vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \ldots, u_m$. Jestliže navíc vektory $u_1, u_2, \ldots, u_m$ jsou lineárně nezávislé, jsou také vektory $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \ldots, u_m$ lineárně nezávislé. DŮKAZ.

Věta. Pro prostory konečné dimenze platí:
a) Každá lineárně nezávislá podmnožina vektorového prostoru lze doplnit na bázi.
b) Každá množina, která generuje prostor, obsahuje bázi.
c) Každá množina, která má více prvků, než je dimenze, je lineárně závislá.
d) Každá lineárně nezávislá množina, která má tolik prvků, jako je dimenze, je bazí.
e) U je podprostor právě když $L(U) = U$.

Věta. Následující úpravy nezmění hodnost matice:
a) výměna dvou řádků mezi sebou,
b) vynásobení řádku nenulovým číslem,
c) přičtení jakéhokoliv násobku řádku k libovolnému jinému řádku,
d) vynechání (vyškrtnutí) nulového řádku.

Věta. Množinou řešení soustavy homogenních lineárních rovnic je vždy prostor, podprostor prostoru $\mathcal{R}^n$, kde n je počet neznámých. Součet dimenze prostoru řešení a hodnosti matice soustavy je roven počtu neznámých.

Věta. (Frobeniova věta.) Soustava lineárních rovnic má aspoň jedno řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.
Je-li navíc tato hodnost rovna počtu neznámých, má soustava právě jedno řešení, v opačném případě má soustava nekonečně mnoho řešení. DŮKAZ.

Věta. Soustava rovnic s regulární maticí má pro každou pravou stranu právě jedno řešení.

Věta. Platí následující tvrzení.
a) Pro každou čtvercovou matici A existuje nejvýše jedna inverzní matice. Inverzní matice existuje pouze k matici regulární a je určena jednoznačně.
b) Platí $A^{-1}A = E$. (E je jednotková matice.)
c) $(A^{-1})^{-1} = A$.
d) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

e) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Věta. Absolutní hodnota determinantu matice typu 2×2 je rovna obsahu rovnoběžníka určeného vektory, které jsou řádky (nebo sloupce) matice.
Absolutní hodnota determinantu matice typu 3×3 je rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory, které jsou řádky (nebo sloupce) matice.

Věta. Pro determinanty matic platí následující
a) $\det AB = \det A \det B$;
b) $\det A = \det A^T$;
c) je-li A regulární, je $\det A^{-1} = 1/\det A$;
d) A je regulární, právě když $\det A \neq 0$;
e) jestliže B vznikne z A prohozením dvou různých řádků nebo sloupců, je $\det B = -\det A$;
f) jestliže B vznikne z A vynásobením řádku nebo sloupce číslem s, je $\det B = s \det A$;
g) jestliže B vznikne z A přičtením libovolného násobku řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci), je $\det B = \det A$.

Analytická geometrie

Analytická geometrie nebude v pohovoru zkoušena.
