

Cylindrická algebraická dekompozice

Ondřej Davídek

FAV ZČU

17.června 2010

Obsah

Co nás čeká...

- **Cylindrická Algebraická Dekompozice – CAD**
 - úvod do teorie CAD

Obsah

Co nás čeká...

- **Cylindrická Algebraická Dekompozice – CAD**
 - úvod do teorie CAD
- **Aplikace CAD**
 - využití CAD v geometrii

Úvod do CAD

- **Eliminace kvantifikátorů**

- atomická formule – polynomiální podmínka
- *vstupní formule*: formule spojené $\wedge, \vee$ a kvantifikované $\forall, \exists$

$$F = (Q_1 x_{k+1}) \dots (Q_{r-k} x_r) [F'(x_1, \dots, x_r)],$$

- *výstupní formule*: ekvivalentní nekvantifikovaná formule (Tarski)

Úvod do CAD

- **Eliminace kvantifikátorů**

- atomická formule – polynomiální podmínka
- *vstupní formule*: formule spojené $\wedge, \vee$ a kvantifikované $\forall, \exists$

$$F = (Q_1 x_{k+1}) \dots (Q_{r-k} x_r) [F'(x_1, \dots, x_r)],$$

- *výstupní formule*: ekvivalentní nekvantifikovaná formule (Tarski)

- **Příklad**

- Pro jaké koeficienty má kvadratická rovnice reálné kořeny?
- *vstupní formule*:

$$F : (\exists x)(ax^2 + bx + c = 0)$$

- *výstupní formule*:

$$\bar{F} : b^2 - 4ac \geq 0 \wedge (b \neq 0 \vee a \neq 0 \vee c = 0)$$

- **Popis CAD**

- rozdělení prostoru $\mathbb{R}^r$ do *buněk* c_j
- buňky cylindricky uspořádané

$$\mathbb{R}^r = \bigcup_{j=1}^I c_j, \quad c_j \subset \mathbb{R}^r, \quad c_i \cap c_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

- indukovaný CAD ($i \leq r$)

$$\mathbb{R}^i = \bigcup_{j=1}^I \hat{c}_j, \quad \hat{c}_j = c_j \cap \mathbb{R}^i$$

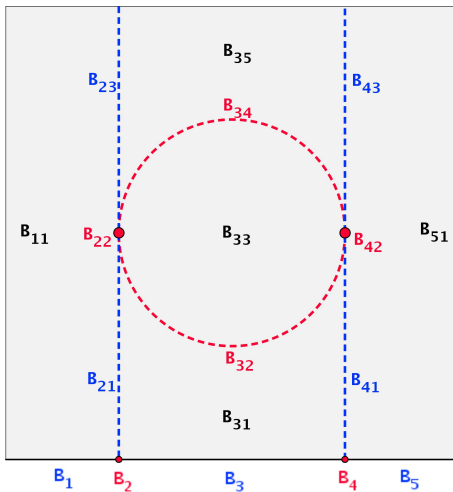
$$\hat{c}_i \cap \hat{c}_j = \emptyset \vee \hat{c}_i \cap \hat{c}_j = \hat{c}_i = \hat{c}_j, \quad i \neq j.$$

- polynomy ze vstupní formule s-invariantní v c_j

$$p(x) > 0, p(x) < 0, p(x) = 0$$

CAD

- polynom $p = y^2 + x^2 - 1$



- **Fáze CAD**

- *projekce*: implicitní popis CAD
- *konstrukce hald*: explicitní popis CAD
- *konstrukce výstupní formule*

Fáze CAD – projekce

- **Projekce**

- projekční operátor Proj:

$$A^1 = \text{Proj}(A) \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{r-1}]$$

$$A^2 = \text{Proj}(A^1) \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{r-2}]$$

...

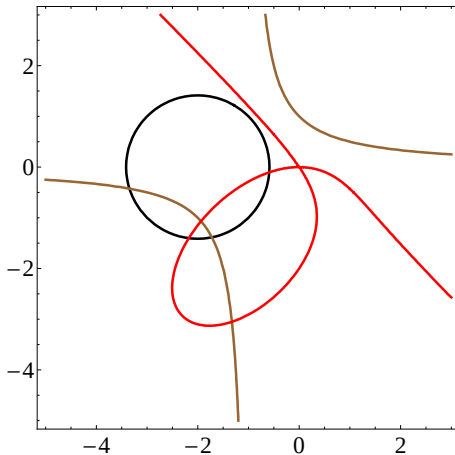
$$A^{r-1} = \text{Proj}(A^{r-2}) \subset \mathbb{R}[x_1]$$

- projekční množina
 - McCallumův operátor

$$\text{ProjMC}(A) = \text{ProjMC}_1(A) \cup \text{ProjMC}_2(A) \cup \text{ProjMC}_3(A)$$

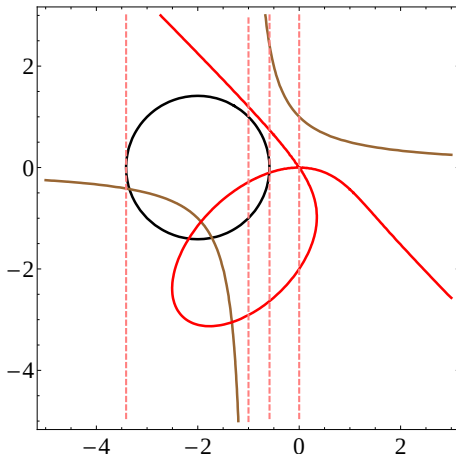
Fáze CAD – projekce

$$A = \{y^2 + (x + 2)^2 - 2, (x + 1)y - 1, y^3 + 3xy + 2y^2 + x^3\}$$



Fáze CAD – projekce

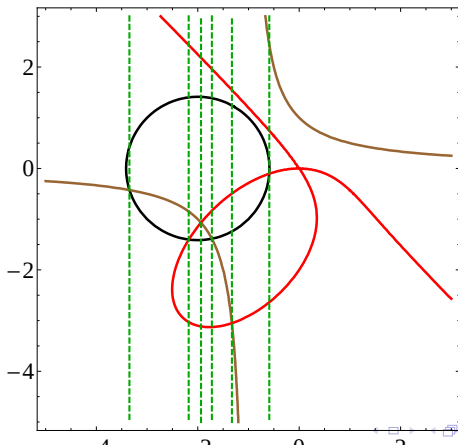
$$\text{ProjMC}_1(A) = \bigcup_{p \in A} \{p_i\} = \{2 + 4x + x^2, 1 + x, x^3, 3x\}$$



Fáze CAD – projekce

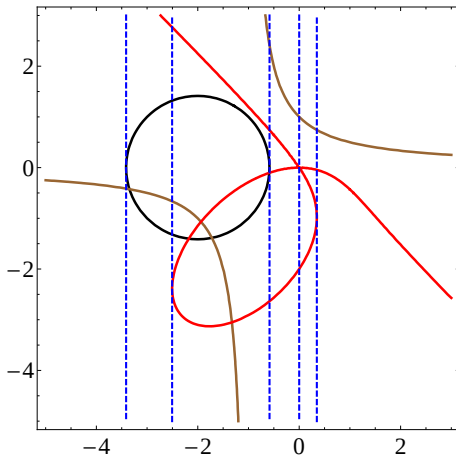
$$\text{ProjMC}_2(A) = \bigcup_{p,q \in A} \{\text{res}(p, q)\} =$$

$$\{3 + 8x + 11x^2 + 6x^3 + x^4, 24 + 88x + 110x^2 + 52x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 2x^6, 3 + 5x + 6x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 3x^5 + x^6\}$$



Fáze CAD – projekce

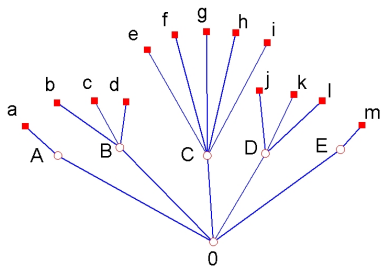
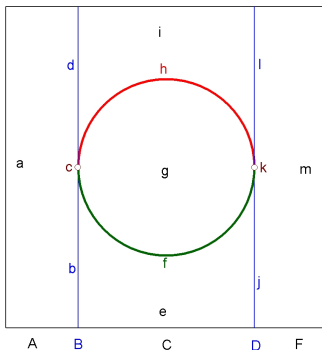
$$\text{ProjMC}_3(A) = \bigcup_{p \in A} \{\text{disc}(p)\} =$$
$$\{2 + 4x + x^2, x^2(36 - 140x + 108x^2 - 27x^4)\}$$



Fáze CAD – konstrukce hald

• Konstrukce hald

- zástupce $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}]$
- $\{p(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x) | p \in P_i\}$
- částečná CAD



Fáze CAD – konstrukce výstupní formule

- **Konstrukce výstupní formule – prostá metoda**

- nejnáročnější fáze
- pro každou buňku c z CAD prostoru $\mathbb{R}^k$ a pro každý polynom p z projekční množiny $P = P_1 \cup \dots \cup P_k$

$$A(c, p) = \left\{ \begin{array}{l} [p < 0] \\ [p = 0] \\ [p > 0] \end{array} \right\} \vee c$$

- T je množina všech buněk, ve kterých je vstupní formule F pravdivá

$$\bigvee_{c \in T} \bigwedge_{p \in P} A(c, p)$$

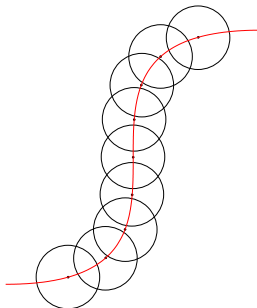
- **Collinsova metoda**
- **Hongova metoda**

Aplikace CAD – offset křivky

- **Offset křivky**

- *úkol*: nalézt offset rovinné křivky $k(x, y) = 0$
- *vstupní formule*:

$$F : \exists(x', y') : k(x', y') = 0 \wedge (x - x')^2 + (y - y')^2 = d^2$$



Aplikace CAD – Minkowského suma

- **Minkowského suma**

- *úkol*: nalézt Minkowského sumu množin $A, B \subset \mathbb{R}^2$
- *vstupní formule*: podle $A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

$$\exists (x_a, y_a), (x_b, y_b) : (x_a, y_a) \in A \wedge (x_b, y_b) \in B \wedge (x, y) = (x_a + x_b, y_a + y_b)$$

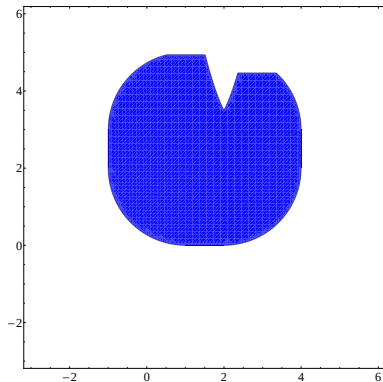
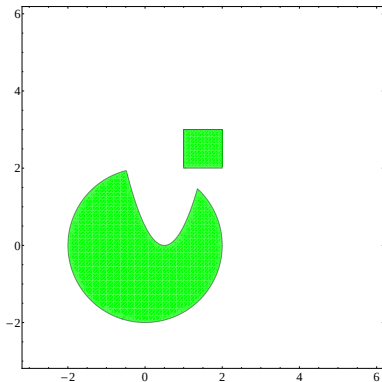
- **Minkowského suma – příklad**

$$A = \{(x_a, y_a) \mid x_a \geq 1 \wedge x_a \leq 2 \wedge y_a \geq 2 \wedge y_a \leq 3\}$$

$$B = \{(x_b, y_b) \mid x_b^2 + y_b^2 \leq 4 \wedge y_b - 2(x_b - 1/2)^2 \leq 0\}$$

Aplikace CAD – Minkowského suma

- Minkowského suma – příklad



Aplikace CAD – Minkowského suma

• Minkowského suma – příklad

$$\begin{aligned}
 & \left(-1 \leq x \leq \text{Root}\left[69 - 224 \, \text{H1} + 220 \, \text{H1}^2 - 96 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 1\right] \&\& 2 - \sqrt{3 + 2x - x^2} \leq y \leq 3 + \sqrt{3 + 2x - x^2} \right) \parallel \\
 & \left(\text{Root}\left[69 - 224 \, \text{H1} + 220 \, \text{H1}^2 - 96 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 1\right] < x \leq 1 \&\& \right. \\
 & \quad \left. 2 - \sqrt{3 + 2x - x^2} \leq y \leq \text{Root}\left[249 - 668 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 176 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] \right) \parallel \\
 & \quad \left(1 < x < \text{Root}\left[-11 - 16 \, \text{H1} + 28 \, \text{H1}^2 - 32 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] \&\& \right. \\
 & \quad \left. 0 \leq y \leq \text{Root}\left[249 - 668 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 176 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] \right) \parallel \\
 & \quad \left(x = \text{Root}\left[-11 - 16 \, \text{H1} + 28 \, \text{H1}^2 - 32 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] \&\& 0 \leq y \leq 3 + \sqrt{3 + 2x - x^2} \right) \parallel \\
 & \left(\text{Root}\left[-11 - 16 \, \text{H1} + 28 \, \text{H1}^2 - 32 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] < x \leq \text{Root}\left[625 - 1016 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 160 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 1\right] \&\& 0 \leq y \leq \text{Root}\left[249 - 668 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 176 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] \right) \parallel \\
 & \quad \left(\text{Root}\left[625 - 1016 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 160 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 1\right] < x \leq 2 \&\& 0 \leq y \leq \frac{1}{2} (31 - 20x + 4x^2) \right) \parallel \\
 & \left(2 < x \leq \text{Root}\left[69 - 224 \, \text{H1} + 220 \, \text{H1}^2 - 96 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] \&\& 2 - \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq \frac{1}{2} (15 - 12x + 4x^2) \right) \parallel \\
 & \quad \left(\text{Root}\left[69 - 224 \, \text{H1} + 220 \, \text{H1}^2 - 96 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] < \right. \\
 & \quad \quad \left. x < \text{Root}\left[625 - 1016 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 160 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] \&\& \right. \\
 & \quad \left. 2 - \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq \text{Root}\left[249 - 668 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 176 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 1\right] \right) \parallel \\
 & \quad \left(x = \text{Root}\left[625 - 1016 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 160 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] \&\& 2 - \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq \frac{1}{2} (31 - 20x + 4x^2) \right) \parallel \\
 & \quad \left(\text{Root}\left[625 - 1016 \, \text{H1} + 604 \, \text{H1}^2 - 160 \, \text{H1}^3 + 16 \, \text{H1}^4, 2\right] < x < 2 + \sqrt{3} \&\& \right. \\
 & \quad \quad \left. 2 - \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq 3 + \sqrt{4x - x^2} \right) \parallel \\
 & \quad \left(x = 2 + \sqrt{3} \&\& 1 \leq y \leq 3 + \sqrt{4x - x^2} \right) \parallel \left(2 + \sqrt{3} < x \leq 4 \&\& 2 - \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq 3 + \sqrt{4x - x^2} \right)
 \end{aligned}$$

CAD software

- Mathematica od firmy Wolfram Research

`CylindricalDecomposition[input, { $x_1, x_2, \dots$ }]`

- QEPCAD B - Quantifier Elimination by Partial Cylindrical Algebraic Decomposition
Christopher W. Brown - <http://www.cs.usna.edu/~qepcad>
pouze pro operační systémy Linux a Sun Solaris

Děkuji za pozornost.