

Kvaterniony, duální kvaterniony a jejich aplikace

Jitka Prošková

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

17. 6. 2010

Zadání

- Základní charakteristika tělesa kvaternionů a duálních kvaternionů, historie a vznik
- Duální kvaterniony a přímé shodnosti
- Implementace duálních kvaternionů v kybernetice
- Využití duálních kvaternionů při řešení vybraných praktických problémů

Kvaterniony

- Kvaterniony jsou zobecněním komplexních čísel.
- Obsahují jednu reálnou a tři imaginární složky.
- Lze je zapisovat jako

$$q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad (1)$$

kde s, x, y, z jsou reálná čísla a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou základní jednotky.

-

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1, \quad \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \text{a} \quad \mathbf{j}\mathbf{i} = -\mathbf{k}. \quad (2)$$

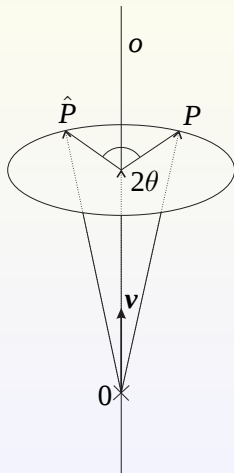
- Konjugovaný kvaternion: $\bar{q} = s - \mathbf{i}x - \mathbf{j}y - \mathbf{k}z$.
- Pokud je $s = 0$, mluvíme o ryzích kvaternionech.

Kvaterniony a rotace

- Jednotkový kvaternion zapíšeme jako $q = [\cos \theta, \mathbf{v} \sin \theta]$, kde $\mathbf{v}$ je jednotkový ryzí kvaternion a θ je úhel otočení.
- Kvaternion popisuje rotaci v trojrozměrném prostoru a to rotaci kolem osy dané směrovým vektorem $\mathbf{v}$ o úhel 2θ .
- Rotaci zapíšeme ve tvaru

$$\hat{p} = qp\bar{q}, \quad (3)$$

kde q je jednotkový kvaternion a p je ryzí kvaternion.



Duální kvaterniony

- Duální číslo

$$z = a + \varepsilon a_\varepsilon, \quad (4)$$

kde $a, a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon^2 = 0$ je duální jednotka.

- Duální kvaternion $\mathbf{q}_d$ můžeme zapsat jako součet dvou kvaternionů

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}_\varepsilon, \quad (5)$$

kde $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ a $\mathbf{q}_\varepsilon = a_\varepsilon + b_\varepsilon\mathbf{i} + c_\varepsilon\mathbf{j} + d_\varepsilon\mathbf{k}$.

- ε je komutativní s kvaternionovými jednotkami.
- Duálně konjugovaný duální kvaternion: $\overline{\mathbf{q}_d^*} = \overline{\mathbf{q}} - \varepsilon \overline{\mathbf{q}_\varepsilon}$.
- Pokud je $\|\mathbf{q}_d\| = 1$, pak se $\mathbf{q}_d$ nazývá jednotkový duální kvaternion.

Duální kvaterniony a přímé shodnosti

- Přímou shodnost v $\mathbb{E}_3$ vyjádříme rotací, posunutím.
- Duální kvaterniony dokáží jednoduše reprezentovat rotaci a posunutí v jedné operaci.
- Otočení o úhel θ a posunutí o vektor $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ bodu P do bodu $\hat{P}$ můžeme vyjádřit jako:

$$\hat{\mathbf{p}}_d = \mathbf{q}_d \mathbf{p}_d \overline{\mathbf{q}_d^*}, \quad (6)$$

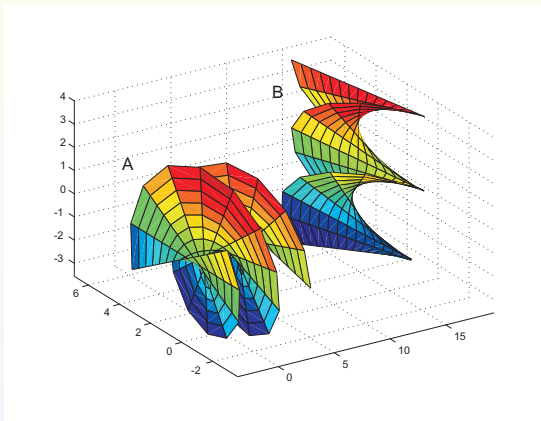
kde $\mathbf{p}_d$ je jednotkový duální kvaternion, $\mathbf{q}_d$ je jednotkový duální kvaternion, pro který platí

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}_\varepsilon = \mathbf{q} + \varepsilon \frac{t\mathbf{q}}{2}, \quad \text{a} \quad \mathbf{t} = t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k}$$

je kvaternion.

Vykreslení otočené a posunuté plochy *helikoidu*

Parametrické zadání: $P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} * \cos(\mathbf{v}), \mathbf{u} * \sin(\mathbf{v}), \mathbf{v})$. Vektor posunutí: $\mathbf{t} = [12, 2, 0]$.
Body osy otočení: $A = [0, 10, 0]$, $B = [1, 2, 3]$. Úhel otočení: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.



Obr. 1: Helikoid v základní poloze (A) a po transformaci (B).

Aplikace v kybernetice - segmentace objektů z ultrazvukového obrazu

- **Problém**

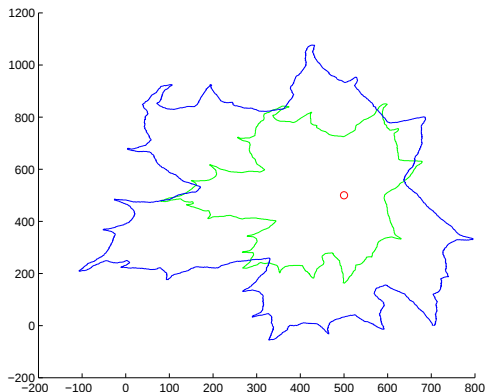
Rozpoznávání tvaru ledvin v ultrazvukovém snímku a jeho přesné ohraničení.

- **Řešení**

- Popíše se textura ledvin ve snímcích a zjišťuje se podobnost.
- Z velkého množství tvarů ledvin se získá obecný model ledviny a sestaví se kritérium obsahující vektory deformací, které uvádí jak a kde se ledviny mohou deformovat.
- Tvarový model porovnáváme se snímkem, zjišťujeme jeho vektory deformace a hledáme parametry (otočení, poloha, deformace) minimalizující kritérium.
- Získání přesného tvaru ledviny.

Příklad - javorové listy

- Problém řeší KKY-ZČU pro segmentaci javorových listů.
- Na část úlohy můžeme aplikovat duální kvaterniony.
- Požadavek: posunutí, otočení, zvětšení a zpětná transformace tvarového modelu.



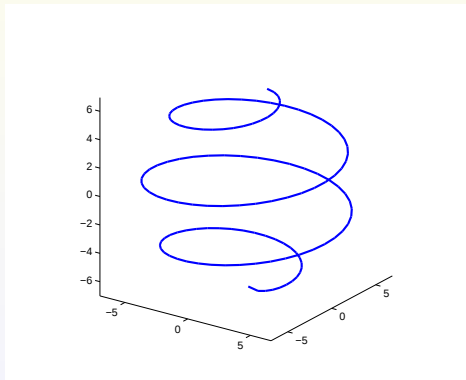
Obr. 2: Původní javorový list (zelený) a po otočení o úhel $\frac{\pi}{8}$ okolo bodu $A = [500, 500]$ a zvětšení $s = 1,6$.

Aplikace v robotice - odvalování sfér

- Máme dány dvě sféry - pevná S_{r_1} , která leží v počátku souřadnicového systému a pohyblivá S_{r_2} , která se po ní odvaluje.
- Pozice sféry S_{r_2} je daná bodem dotyku obou sfér, tj. $a \in S^2$.
- Prostor určený těmito sférami se nazývá neholonomický, $S^2 \times SO(3)$.
- Odvalování je pohyb bez prokluzování a protáčení.
- Aplikace duálních kvaternionů při řešení.

Vykreslení v Matlabu 1

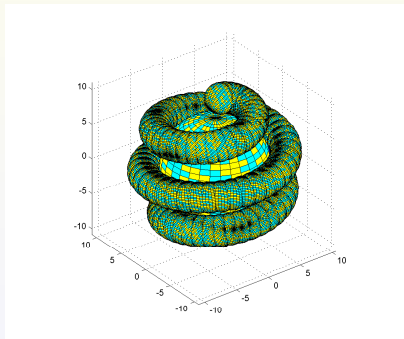
Nechme odvalovat sféru S_{r_2} po zvolené trajektorii S_{r_1} . Trajektorií je sférická šroubovice.



Obr. 3: Tvar trajektorie, po které se odvaluje sféra S_{r_2} .

Vykreslení v Matlabu 2

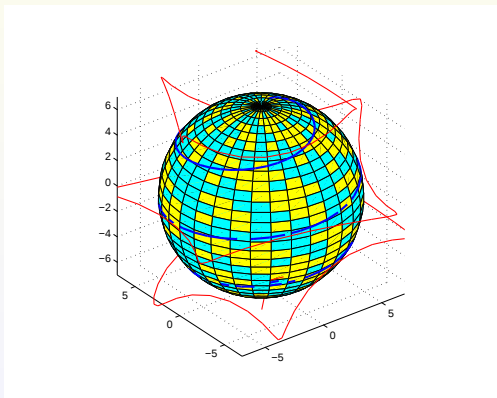
Dále s pomocí kvaternionů necháme odvalovat sféru S_{r_2} po sféře S_{r_1} .



Obr. 4: Sféra S_{r_1} , po které se odvaluje sféra S_{r_2} .

Vykreslení v Matlabu 3

Zvolíme jakýkoliv pevný bod na sféře S_{r_2} a vykreslíme jeho trajektorii.



Obr. 5: Výsledná křivka (červená) vykreslená se sférou S_{r_1} .

Další možné aplikace duálních kvaternionů

- **Grafika** - skinning: animace deformace složitějších objektů. Pro velké rotace - nepřirozené deformace. K odstranění můžeme použít např. *Dual quaternion Linear Blending*.
- **Fyzika** - Maxwellovy rovnice: můžeme je popsat pouze jednou rovnicí využívající duální kvaterniony.
- **Robotika** - Hand-eye kalibrace: Duální kvaterniony popisují vztah mezi souřadnicovými systémy úchopu robota a kamery, která je k úchopu připevněna.

Závěr

- Duální kvaterniony mohou jednoduše reprezentovat rotaci a posunutí v jedné prostorové operaci.
- Využívají se v oblastech, kde není vhodné použít reprezentaci rotace a posunutí pomocí matic, např. počítačová grafika – skinning (nepřirozené deformace).
- Řeší problém Hand–eye kalibrace (robotika – lékařství).
- Animace odvalování pomocí kvaternionů.
- Aplikace duálních kvaternionů na aktuální problém segmentace objektů z ultrazvukových snímků.

Děkuji za pozornost