

Komise JČMF pro matematiku na VŠTEZ
Fakulta stavební ČVUT v Praze

SBORNÍK

příspěvků

z

18. konference studentů v matematice
na školách VŠTEZ

16. - 18. června 2010

Tetřeví boudy

Vydavatel: Vydavatelství ČVUT v Praze
Praha 2010

Editor: Stanislav Olivík

Podpořeno grantem SGS ČVUT, SVK 03/10/F1

Osmnáct matematických studentských konferencí na VŠTEZ

1993 - 2010

Myšlenka organizovat konference pro studenty vysokých škol technických, ekonomických a zemědělských (VŠTEZ), kteří se buď hlouběji věnují matematice, nebo kteří matematiku aplikují na technické problémy své specializace, zazněla poprvé na 22. konferenci o matematice na VŠTEZ v roce 1992 v Trnavě. U jejího zrodu stáli prof. RNDr. Stanislav Míka, CSc. a prof. RNDr. Václav Medek, CSc. V následujícím roce byla tato myšlenka Komisí Jednoty českých matematiků a fyziků o matematice na VŠTEZ realizována.

Ve dnech 8. a 9. června 1993 v Lošticích na Moravě se konala 1. matematická konference studentů VŠTEZ. Na její organizaci se podílel Ústav matematiky a deskriptivní geometrie FAST VUT Brno. Zúčastnilo se jí šest studentů a dvacet učitelů. Nebyla to ale konference v pravém smyslu tohoto slova, byla organizována jako soutěž o Cenu Václava Medeka. První zkušenosti ale ukázaly na diversifikaci studentů a jejich prací – různé ročníky, různé aplikace a teorie, různé inženýrské a matematické obory apod. Rozhodnutí, která z prací byla nejlepší, bylo neřešitelné pro obtížné stanovení hodnotících podmínek. Myšlenka na každoroční studentské soutěže tak v následujícím roce byla opuštěna.

Téměř o rok později, ve dnech 1. a 2. června 1994, se v Třešti u Jihlavy konala 2. studentská konference. Tentokrát přijelo třináct studentů, pět z FAV ZČU v Plzni, čtyři z FSv ČVUT, tři z FJFI ČVUT a jeden z ČZU Praha a 14 učitelů. Jejich referáty byly publikovány ve sborníku, který se stal součástí i všech následujících konferencí.

3. studentská konference se konala ve dnech 5. až 7. června 1995 v Chebu. Spolupřádala ji Ekonomická fakulta ZČU Plzeň se sídlem v Chebu. Na konferenci vystoupilo osm studentů magisterského studia a jedna studentka doktorandského studia, po dvou z FAV ZČU Plzeň, FSv ČVUT a FJFI ČVUT a po jednom z FEI a FS VUT Brno, doktorandka byla z VŠE Praha. Učitelů se zúčastnilo dvanáct. Pokud inovací na druhé konferenci byl sborník, tak od třetí konference byly novým prvkem přednášky významných českých matematiků, nebo jiných odborníků. Prvním z přednášejících byl doc. RNDr. Jiří Neustupa, CSc. z Katedry technické matematiky FSI ČVUT, který posluchače přivedl k „prahu“ funkcionální analýzy.

4. studentská konference se konala ve dnech 5. a 6. června 1996 v Brně. Na její organizaci se podílel Ústav matematiky FEI VUT Brno. Konference se zúčastnilo 15 studentů, tři z FJFI ČVUT, po dvou z DF Univerzity v Pardubicích, FSI a FSv ČVUT a jedna studentka z FS VUT Brno a 15 učitelů. Program svými přednáškami obohatili RNDr. Michal Křížek, CSc. z MÚ ČR v Praze a doc. RNDr. Jiří Vanžura, CSc. z MÚ ČR v Brně.

5. studentská konference se konala v Lázních Bohdaneč ve dnech 2. až 4. června 1997. Na její organizaci se podílela Univerzita v Pardubicích. Zúčastnilo se jí 14 studentů, po dvou z TU-VŠB Ostrava, Univerzity Pardubice, FEI VUT Brno, FJFI a FSv ČVUT, tři z FAV ZČU Plzeň a jeden z VŠCHT Praha. Tentokrát přijelo dvacet učitelů. Jako host vystoupil doc. RNDr. Štefan Schwabik, DrSc. z MÚ ČR v Praze s přehlednou přednáškou o historii a vývoji matematické analýzy. V rámci konference proběhla prezentace produktů firmy Microsoft a návštěva katedry matematiky Univerzity v Pardubicích.

Ve dnech 18. a 19. května 1998 ve Vyškově na Moravě se konala 6. studentská konference. Lokální organizace se ujala Katedra matematiky Vojenské vysoké školy pozemních vojsk ve Vyškově. Celkem přijelo dvanáct studentů, čtyři z FAV ZČU, tři z TU-VŠB, tři z místní školy a po

jednom z FSv ČVUT a ČZU Praha. Učitelé byli zastoupeni v počtu 14. Jako host vystoupil doc. RNDr. Jiří Vanžura, CSc. z MÚ ČR Brno s přednáškou o vektorových polích na sférách.

Další tři konference se konaly ve školicím středisku FSv ČVUT v Černicích u Bechyně pod záštitou FSv ČVUT.

Ve dnech 2. až 4. června 1999 to byla 7. studentská konference. Referovat přijelo 12 studentů, osm z FAV ZČU, tři z TU-VŠB a jeden z FEI VUT. Učitelů přijelo třináct. Jako hosté vystoupili dva vysokoškolští učitelé Dr. Bedřich Beneš z FEL ČVUT a Dr. Zdeněk Skalák, CSc. z FSv ČVUT.

8. studentská konference se konala ve dnech 7. až 9. června 2000 za účasti patnácti studentů, jedenáct z FAV ZČU, po dvou z FJFI a FSv ČVUT a 14 učitelů. Jako host vystoupil prof. RNDr. Ivo Marek, DrSc. z FSv ČVUT.

9. studentská konference proběhla ve dnech 7. a 8. června 2001 za účasti devíti studentů, tři z FAV ZČU, po dvou z FJFI ČVUT a TU-VŠB a po jednom z DF ČVUT a FAST VUT, učitelů bylo 16. Jako host vystoupil doc. RNDr. Alois Klíč, CSc. z VŠCHT Praha s matematickou definicí chaosu.

10. studentská konference se vrátila do Lázní Bohdaneč ve dnech 2. až 4. června 2002. Pojali jsme ji jako jubilejní, a proto jsme oslovili účastníky předchozích devíti studentských konferencí. Pozvání přijalo šestnáct z bývalých účastníků a současných studentů, devět z FAV ZČU, kteří měli na všech předchozích konferencích nejpočetnější zastoupení, tři z FSv ČVUT a po dvou z FJFI ČVUT a z Univerzity Pardubice. Učitelů se zúčastnilo 13. Jako hosté přijeli tři odborníci z praxe. Doc. Ing. Jan Vítek, CSc. z FSv ČVUT referoval o návrhu projektu tubusu Metra pod Vltavou. Prof. RNDr. Ing. Petr Pavel Procházka, DrSc. z FSv ČVUT prezentoval matematický model chování horniny působením vnitřních napětí. RNDr. Josef Horáček z firmy Sophic Zlín prezentoval aplikace počítačové grafiky na tvarování obuvnického kopyta.

Další tři konference se opět vrátily do školicího střediska FSv ČVUT v Černicích u Bechyně pod záštitou FSv ČVUT.

11. studentská konference se konala ve dnech 9. až 11. června 2003. Přijelo 10 studentů, pět z FAV ZČU, po dvou z FSv a FJFI ČVUT a jeden z VŠCHT Praha, učitelů bylo 9. Jako hosté vystoupil doc. RNDr. Michal Křížek, CSc. z MÚ AV ČR Praha a RNDr. Alena Šolcová z FSv ČVUT.

12. studentská konference proběhla ve dnech 26. až 28. května 2004. Zúčastnilo se jí 19 studentů, devět z FSv ČVUT, sedm z FAV ZČU, dva z FJFI a jeden z VŠCHT, a sedm učitelů. Jako hosté vystoupili dva význační naši geodeti prof. Ing. Jan Kostecký, CSc. z FSv ČVUT a doc. Ing. Jaroslav Klokočník, CSc. z AÚ AV ČR v Ondřejově. Jejich přednášky o využití GPS a altimetrie v dálkovém průzkumu Země doplnila doc. RNDr. Milada Kočandrllová, CSc. z FSv ČVUT o geometrické modely bistatické altimetrie.

13. studentská konference se konala od 6. do 8. června 2005. Tentokrát studenti byli ve velké převaze k učitelům, 22:6 a také studenti z FSv ČVUT v počtu „převálcovali“ studenty FAV ZČU, 13:7, dva studenti byli z FJFI. Jako hosté přijali pozvání dva statistici, prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc. z MFF UK Praha a doc. RNDr. Daniela Jarušková, CSc. z FSv ČVUT a jeden odborník na ocelové mosty doc. Ing. Tomáš Rotter, CSc. z FSv ČVUT.

Výukové středisko v Černicích fakulta musela vrátit v restituci a my jsme se s pěti dalšími konferencemi vrátili do Lázní Bohdaneč.

14. studentská konference se konala ve dnech 5. až 7. června 2006 za účasti patnácti studentů, devět z FSv ČVUT, čtyři z FAV ZČU a dva z FJFI a čtrnácti učitelů. Jako hosté vystoupili prof. Ing. Miroslav Petrtyl, DrSc. s RNDr. Janou Danešovou, CSc. z FSv ČVUT se

zajímavou přednáškou o interakci umělých náhrad s kostní tkání a RNDr. Petr Mayer, CSc. z FSv ČVUT o matematickém modelování v zabezpečovací technice.

15. studentská konference se konala ve dnech 4. až 6. června 2007 za účasti čtrnácti studentů, sedm z FSv ČVUT, pět z FAV ZČU a dva z FJFI a deseti učitelů. Jako host o dynamické interakci mostů a těžkých vozidel referoval doc. Ing. Jiří Máca, CSc. z FSv ČVUT. Prof. RNDr. Jiří Neustupa, CSc. z MÚ AV ČR v Praze představil Navier-Stokesovy rovnice.

16. studentská konference vybočila z celé předchozí řady studentských konferencí. Dne 8. listopadu 2007 zemřel vedoucí Komise pro matematiku na VŠTEZ a hlavní organizátor všech studentských konferencí doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc. Do čela Komise se postavil účastník čtyř studentských konferencí Ing. Michal Beneš, Ph.D. Šestnáctá studentská konference proběhla jako sekce 30. konference o matematice na VŠTEZ, která se konala ve dnech 15. až 17. září 2008. Deset studentů, dva z FJFI, šest z FSv ČVUT a po jednom z FEL ČVUT a VŠCHT Praha, tak mělo příležitost vyslechnout referáty čtyřiceti účastníků 30. konference učitelů matematiky na VŠTEZ. Konference byla podpořena grantem IGS ČVUT, CTU0813711.

17. studentská konference již proběhla v tradičním termínu, tj. ve dnech 15. až 17. června 2009 za účasti třinácti studentů, šest z FJFI, čtyři z FSv ČVUT, dva z FAV ZČU a jeden z ČZU Praha a sedmi učitelů. Jako hosté vystoupil prof. RNDr. Ivo Marek, DrSc. z FSv ČUT a prof. Edita Pelantová, CSc. z FJFI.

18. studentská konference zřejmě zakládá novou tradici vzhledem k místu konání, Tetřeví Boudy, kde se všem sedmnácti studentům a sedmi učitelům líbilo. Jako hosté vystoupil doc. RNDr. Jaroslav Vlček, CSc. z TU-VŠB Ostrava a Mgr. Milan Krbálek, Ph.D. z FJFI.

Příspěvky účastníků-studentů jsou součástí tohoto sborníku. Všem účastníkům děkujeme za aktivní účast.

Konference byla podpořena grantem SGS ČVUT, SVK 03/10/F1.

V Praze 12. července 2010

Milada Kočandrlová
Michal Beneš
Stanislav Olivík

Obsah

Ondřej Davídek	9
<i>Cylindrická algebraická dekompozice</i>	
Martin Dzurov, Kristýna Kitzbergerová, Lucie Šindelářová	19
<i>Použití nespojité Galerkinovy metody v transportních problémech</i>	
Michal Eliaš	31
<i>Modelovanie deformácií zemského povrchu</i>	
Milan Hanuš	41
<i>Matematické modelování transportu neutronů</i>	
Václav Jára	43
<i>Stereografická projekce a astroláb</i>	
Pavel Jirásek	49
<i>Fredholmova alternativa</i>	
Stanislav Olivík	55
<i>Určení odrazného bodu bistatické altimetrie na ploše referenčního elipsoidu</i>	
Oleg Pasteliak	63
<i>Model pro pohyb vozidel poblíž řízené křižovatky založený na Dysonově termodynamickém plynu</i>	
Jitka Prošková	73
<i>Duální kvaterniony a jejich aplikace</i>	
Martin Ptáček	83
<i>Aplikace numerické matematiky na dynamiku tekutin</i>	
Tomáš Tichý	85
<i>Zpracování kódových měření globálních navigačních systémů</i>	
Tomáš Vávra	95
<i>Číselné soustavy se záporným základem</i>	
Jana Vecková	97
<i>Věty o existenci a jednoznačnosti řešení Plateauova problému</i>	
Martin Veselý	103
<i>Spektrální vlastnosti negaussovských náhodných matic</i>	

Cylindrická algebraická dekompozice

Ondřej Davídek*

Abstrakt

V článku se seznámíme s tím, co to je cylindrická algebraická dekompozice (CAD) a jak se tato metoda dá využít při eliminaci kvantifikátorů. Postupně rozebereme jednotlivé fáze této metody a zmíníme jejich varianty.

1 Úvod

Na začátek bych rád zmínil dvě důležité publikace věnující se tomuto problému. První z nich je sborník [CJ98], který obsahuje výběr článků a prací na téma eliminace kvantifikátorů a CAD, a druhou je disertační práce Christophera W. Browna [Bro99], ze které je v tomto článku převážně čerpáno.

Hlavní problém, který stál u zrodu CAD, byla eliminace kvantifikátorů v teorii reálně uzavřených těles. Atomická formule v této teorii se skládá z podmínek (rovnosti či nerovnosti) vyjádřené pomocí polynomů v proměnných z reálně uzavřených těles. Proměnné v těchto formulích mohou být potom libovolně kvantifikovány ($\forall, \exists$) a formule spojeny logickými operátory $\wedge$ a $\vee$. Obecně máme na vstupu formuli F (*vstupní formule*) a hledáme ekvivalentní formuli $\bar{F}$ (*výstupní formule*) takovou, že žádná její proměnná není kvantifikována. To, že pro každou kvantifikovanou formuli existuje formule, která neobsahuje kvantifikátory a tím ani kvantifikované proměnné, dokázal v první polovině 20. století polský matematik a logik Alfred Tarski (viz [Tar51]).

Příklad 1 (Řešení kvadratické rovnice). Pro názornost si eliminaci kvantifikátorů ukážeme na jednoduchém problému: Pro jaké koeficienty má kvadratická rovnice reálné kořeny? Vstupní formule má tvar:

*Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 22, Plzeň, odavidek@kma.zcu.cz

$$F : (\exists x)(ax^2 + bx + c = 0).$$

Výstupní formule může vypadat následovně:

$$\bar{F} : b^2 - 4ac \geq 0 \wedge (b \neq 0 \vee a \neq 0 \vee c = 0).$$

■

Mnoho matematických problémů lze převést na eliminaci kvantifikátorů, ať už je to z geometrie, numeriky (integrace) nebo analýzy (stabilita), proto se z CAD stává mocný nástroj pro řešení těchto problémů.

Eliminace kvantifikátorů pomocí CAD má tři fáze: *projekce*, *konstrukce hald* a *konstrukce výstupní formule*.

projekce vytvoří implicitní popis cylindrické algebraické dekompozice prostoru všech proměnných formule F , tedy i prostoru jen volných proměnných (tj. proměnných, které nejsou vázané kvantifikátorem)

konstrukce hald vytvoří explicitní popis této dekompozice, čímž můžeme rozhodnout o pravdivosti formule F v každé buňce dekompozice prostoru volných proměnných

konstrukce výstupní formule pomocí dekompozice prostoru volných proměnných zkonstruuje výstupní formuli $\bar{F}$

V dalším textu budeme vždy vstupní formuli F uvažovat v prenexním tvaru

$$F = (Q_1 x_{k+1}) \dots (Q_{r-k} x_r) [F'(x_1, \dots, x_r)],$$

kde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ a formule F' není kvantifikovaná. Pokud formule není v prenexním tvaru, lze jí vždy na tento tvar převést.

Bude-li $P \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]$ množina polynomů, pak P_i bude označovat takovou podmnožinu množiny P , pro kterou platí $P_i = P \cap \mathbb{R}[x_1, \dots, x_i]$, $i \leq r$.

2 CAD

Máme danu množinu polynomů $A \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]$. Cylindrická algebraická dekompozice je rozklad prostoru $\mathbb{R}^r$ na konečně mnoho cylindricky uspořádaných *buněk* tak, že znaménka všech polynomů z A jsou neměnná uvnitř každé

buňky. Cylindrické uspořádání tedy znamená, že projekce jakýchkoliv dvou buněk do $\mathbb{R}^i$, kde $1 \leq i \leq r$, je buď identická nebo disjunktní.

Jsou-li c_j , $j = 1, \dots, l$, buňky cylindrické algebraické dekompozice, potom platí

$$\mathbb{R}^r = \bigcup_{j=1}^l c_j, \quad c_j \subset \mathbb{R}^r$$

$$c_i \cap c_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

CAD prostoru $\mathbb{R}^r$ indukuje CAD prostoru $\mathbb{R}^k$, pro každé $k \leq r$, která se potom nazývá *indukovaná CAD*. Pro indukovanou CAD tedy platí

$$\mathbb{R}^k = \bigcup_{j=1}^l \hat{c}_j, \quad \hat{c}_j = c_j \cap \mathbb{R}^k$$

$$\hat{c}_i \cap \hat{c}_j = \emptyset \vee \hat{c}_i \cap \hat{c}_j = \hat{c}_i = \hat{c}_j, \quad i \neq j.$$

Definice 1. O polynomu $p \in A$ řekneme, že je *s-invariantní* v buňce c , pokud pro všechny body $x \in c$ platí právě jedna z následujících možností: $p(x) > 0$, $p(x) < 0$, $p(x) = 0$.

Nechť D je CAD množiny polynomů A , potom D nazveme *s-invariantní*, pokud všechny polynomy $p \in A$ jsou *s-invariantní* na každé buňce $c \in D$.

Definice 2. Řekneme, že D je *t-invariantní CAD* vzhledem k formuli F , pokud pro každou buňku $c \in D$ platí:

$$\forall x, y \in c: F|_x = F|_y,$$

kde $F|_x$ značí pravdivostní hodnotu formule F v bodě $x \in \mathbb{R}^r$.

Poznámka 1. Vezmeme-li všechny polynomy z formule F , zjistíme, že pokud jsou *s-invariantní* ve všech buňkách $c \in D$ (tj. D je *s-invariantní*), potom je D také *t-invariantní*. Jak uvidíme později, opačná implikace obecně neplatí.

Z předešlého vyplývá, že každá CAD je určená nějakou množinou polynomů A . Proto se budeme nejdříve zabývat tím, jaké má tato množina mít vlastnosti.

Definice 3. Množinu $B \subset \mathbb{R}^n$, definovanou polynomy $p_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]$, kde $i = 1, \dots, m$, a vztahy $\epsilon_i \in \{<, >, =\}$, nazveme *semialgebraickou právě tehdy, když*

$$B = \bigcup_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n | p_i(x) \epsilon_i 0\}.$$

Definice 4. Řekneme, že dekompozice je algebraická, pokud každá buňka dekompozice je semialgebraickou množinou.

Každá algebraická dekompozice $\mathbb{R}^1$ do otevřených intervalů a jednotlivých bodů je CAD. Buňky této dekompozice jsou $c_1 = (-\infty, \alpha_1)$, $c_2 = \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle$, $c_3 = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\dots$, $c_{2m} = \langle \alpha_m, \alpha_m \rangle$, $c_{2m+1} = (\alpha_m, \infty)$, kde α_i jsou reálná čísla. Tyto buňky v $\mathbb{R}^1$ mají přirozené uspořádání $c_1 < c_2 < \dots < c_{2m+1}$.

Buď B souvislá oblast v $\mathbb{R}^k$, f spojitá reálná funkce na B a polynom $p \in P_{k+1}$, který není roven nule nikde v B . Haldá nad B je dekompozice $B \times \mathbb{R}$ do buněk $c_1, c_2, \dots, c_{2m+1}$ tak, že pro jakékoliv $\beta \in B$ průniky $c_i \cap (\beta \times \mathbb{R})$ tvoří CAD prostoru $\mathbb{R}^1$ s přirozeným uspořádáním $c_i \cap (\beta \times \mathbb{R}) < c_j \cap (\beta \times \mathbb{R}) \iff i < j$. Takto mají buňky v haldě přesně takové uspořádání jako CAD v $\mathbb{R}^1$. Sudé buňky jsou určeny reálnými funkcemi definovanými na B , neboť jejich průnik s $\beta \times \mathbb{R}$ je vždy nějaký bod, a nazývají se *sekce*. Liché buňky jsou potom *sektory*. V haldě definované algebraickou dekompozicí $B \times \mathbb{R}$ je každá sekce částí nulové množiny nějakého polynomu $p \in P_{k+1}$, nebo-li pokud

$$\forall x \in B : p(x, f(x)) = 0,$$

pak funkce f na B je sekci.

Definice 5. Řekneme, že polynom p je rozložitelný na B , pokud nulová množina polynomu p na B obsahuje konečně mnoho disjunktních sekcí f_i , $i = 1, \dots, m$. To znamená, pro $i, j = 1, \dots, m$; $i \neq j$ platí

$$(\forall x \in B \exists i : p(x, f_i(x)) = 0) \wedge (\forall x \in B : f_i(x) \neq f_j(x)).$$

Definice 6. Množina polynomů P_{k+1} je rozložitelná na B , pokud každý polynom je buď nulový nebo rozložitelný na B a pokud sekce jakýchkoliv dvou polynomů jsou buď identické nebo disjunktní.

Poznámka 2. Pokud je množina polynomů rozložitelná na oblasti B , pak jimi definovaná algebraická dekompozice $B \times \mathbb{R}$ je cylindrická.

Algebraická dekompozice D je CAD prostoru $\mathbb{R}^{k+1}$ za předpokladu, že existuje CAD D' prostoru $\mathbb{R}^k$ taková, že projekce jakékoliv buňky $c \in D$ do $\mathbb{R}^k$ je nějaká buňka $c' \in D'$ (D' je potom indukovaný CAD prostoru $\mathbb{R}^k$) a že buňky v D , jejichž projekcí do $\mathbb{R}^k$ získáme c' , tvoří haldě nad c' . Buňka c' bývá označována jako *rodič* a buňky v haldě nad c' jako jeho *potomci*.

3 Projekce

Definice 7. Mějme množinu polynomů $A \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]$, které jsou součástí formule F . Nechť existuje množinu polynomů P taková, že

$$A \subseteq P \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]$$

a že algebraická dekompozice definovaná množinou P je cylindrická. Potom P nazveme projekční množinou.

Projekce je určena projekčním operátorem Proj , který z množiny A vytvoří množinu $A^1 = \text{Proj}(A) \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{r-1}]$ takovou, že pokud $c \subseteq \mathbb{R}^{r-1}$ je buňka v CAD vytvořené z A^1 , pak maximálně souvislé oblasti v $c \times \mathbb{R}$, v nichž jsou polynomy z A s-invariantní, jsou cylindricky uspořádány. Nyní aplikujeme projekční operátor na A^1 , dostaneme $A^2 = \text{Proj}(A^1) \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{r-2}]$, atd. až získáme polynomy v jedné proměnné x_1 . Projekční množina P se potom skládá ze všech ireducibilních faktorů polynomů z množin $A, A^1, \dots, A^{r-1}$ a lze ji rozložit následovně

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_r.$$

Vzhledem k rekurzivité projekčního operátoru je algebraická dekompozice definovaná polynomy $\bigcup_{i=1}^k P_i$ také cylindrická a odpovídá už definované indukované CAD prostoru $\mathbb{R}^k$.

Projekční množina není jednoznačně určena a existují různé přístupy, jak ji najít. Zde se zaměříme především na McCallumův projekční operátor. Zmíníme také projekční operátor Collinsův a Hongův, které mu předcházely. Důvodem této variability je snaha dosáhnout co možná nejmenší projekční množiny při zachování cylindrického uspořádání buněk výsledné dekompozice. Následující definice jsou nezbytné pro zavedení McCallumova projekčního operátoru.

Definice 8. Mějme polynom $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{k-1}][x_k]$. Hlavní koeficient polynomu p označíme $\text{lc}(p) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{k-1}]$ a stupeň polynomu p v proměnné x_k označíme $\deg(p)$. Pokud

$$p = \sum_{i=0}^n p_i(x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot x_k^i$$

a $\deg(p) = n$, pak $\text{lc}(p) = p_n$ a $\text{lt}(p) = p_n \cdot x_k^n$ je hlavní člen polynomu p .

Definice 9. *Nechť*

$$p = \sum_{i=0}^n p_i x_k^i, \quad q = \sum_{j=0}^m q_j x_k^j,$$

$p_n \neq 0$, $q_m \neq 0$, jsou polynomy v proměnné x_k . Potom Sylvesterovou maticí rozumíme matici

$$M = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & \cdots & \cdots & p_1 & p_0 & & & \\ & p_n & p_{n-1} & \cdots & \cdots & p_1 & p_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & p_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & p_0 \\ q_m & q_{m-1} & \cdots & \cdots & q_1 & q_0 & & & \\ & q_m & q_{m-1} & \cdots & \cdots & q_1 & q_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & q_m & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & q_0 \end{pmatrix}$$

řádu $m+n$. Determinant Sylvesterovy matice nazýváme Sylvesterův rezultant a značíme ho $\text{res}(p, q) = \det(M)$. Diskriminant polynomu p potom je

$$\text{disc}(p) = \frac{\text{res}(p, p')}{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} p_n},$$

kde p' značí derivaci polynomu p (samozřejmě vzhledem k proměnné x_k).

Collinsův a Hongův projekční operátor se vyznačuje tím, že produkují rozsáhlou projekční množinu ($m^2 n^3$ a $m^2 n^2$ prvků, kde m je počet polynomů a n maximální stupeň polynomů z množiny A).

McCallumův operátor (viz [McC98]) produkuje projekční množinu o počtu prvků ostře menší než $m^2 + mn$, proto se dnes pracuje hlavně s tímto operátorem. Jeho zápis je

$$\text{ProjMC}_1(A) = \bigcup_{p \in A} \{p_i\},$$

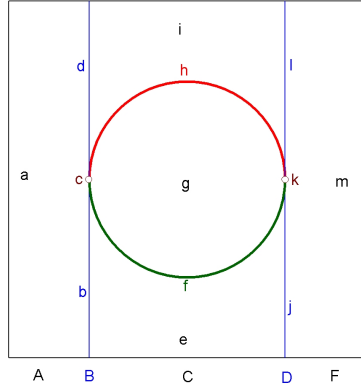
$$\text{ProjMC}_2(A) = \bigcup_{p, q \in A} \{\text{res}(p, q)\},$$

$$\text{ProjMC}_3(A) = \bigcup_{p \in A} \{\text{disc}(p)\},$$

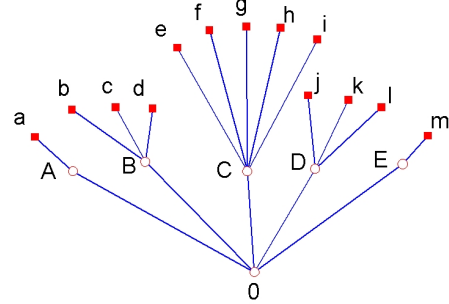
$$\text{ProjMC}(A) = \text{ProjMC}_1(A) \cup \text{ProjMC}_2(A) \cup \text{ProjMC}_3(A).$$

Přestože McCallumův operátor produkuje relativně malou projekční množinu, lze ukázat, že tato množina může být stále o něco menší; viz [Bro00], kde C. W. Brown ukazuje, že složku $\text{ProjMC}_1(A)$ lze omezit pouze na hlavní koeficienty. Potom bude

$$\text{ProjMC}_1(A) = \bigcup_{p \in A} \{\text{lc}(p)\}.$$



Obrázek 1: CAD prostoru $\mathbb{R}^2$.



Obrázek 2: CAD jako strom.

4 Konstrukce hald

V této fázi vyjdeme z implicitně vyjádřené CAD prostoru $\mathbb{R}^k$ pomocí projekční množiny $P_1 \cup \dots \cup P_k$ a najdeme explicitní vyjádření každé buňky CAD spolu s pravdivostní hodnotou F v každé z těchto buněk.

Každou buňku v CAD bude reprezentovat nějaký bod uvnitř této buňky. Takovému bodu budeme říkat *zástupce*. CAD prostoru $\mathbb{R}^i$ získáme konstrukcí haldy přes všechny buňky c' v CAD prostoru $\mathbb{R}^{i-1}$. Necht' má buňka c' zástupce $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}]$, potom všichni potomci buňky c' zdědí tohoto zástupce ve smyslu, že jejich zástupce bude mít prvních $(i-1)$ souřadnic stejných jako zástupce buňky c' . Takto se značně zjednoduší hledání zástupců v haldě nad c' . Hledáme vlastně takový bod z každé maximálně souvislé oblasti v $\mathbb{R}^1$, kde polynomy $\{p(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x) | p \in P_i\}$ jsou s -invariantní.

Konstrukce hald začíná buňkou c_0 , která odpovídá $\mathbb{R}^0$, a její zástupce je prázdný vektor. Nalezením kořenů polynomů $p \in P_1$ získáme buňky $c_{1,j}$ v CAD prostoru $\mathbb{R}^1$ a tím i zástupce potomků buňky c_0 . Obdobně postupujeme s dalšími polynomy až získáme CAD prostoru $\mathbb{R}^r$. Celá tato struktura se dá reprezentovat jako strom, kde kořen je c_0 , hrany znázorňují vztah rodič-potomek a koncové uzly jsou buňky CAD prostoru $\mathbb{R}^r$ (viz obrázek 1 a 2).

Pravdivost formule F' (nekvantifikované části formule F) v každé buňce dekompozice prostoru $\mathbb{R}^r$ určíme tak, že dosadíme zástupce z každé buňky do polynomů z F' . Jak už bylo zmíněno dříve, je t -invariantnost dekompozice zaručena s -invariantností polynomů z F' . Máme-li určenou pravdivost formule F' v každé buňce CAD prostoru $\mathbb{R}^r$, jsme potom schopni zjistit pravdivost formule F v buňkách indukované CAD prostoru $\mathbb{R}^k$.

Definice 10. *Bud' c buňka CAD prostoru $\mathbb{R}^{i-1}$, $k < i \leq r$ a formule $F =$*

$(Q_{i-k}x_i) \dots (Q_{r-k}x_r)[F']$, potom definujeme pravdivostní hodnotu buňky c vztahem $v(c) = F|_a$, $a \in c$.

Věta 1 (Propagace). *Mějme buňku c CAD prostoru $\mathbb{R}^{i-1}$, $k < i < r$ a buňky $c_1, \dots, c_n$ v haldě nad c . Pokud $Q_{i-k} = \forall$, potom $v(c) = \bigwedge_{i=1}^n v(c_i)$. Pokud $Q_{i-k} = \exists$, potom $v(c) = \bigvee_{i=1}^n v(c_i)$. Takto dokážeme rekurzivně rozhodnout o pravdivosti formule F v každé buňce CAD prostoru $\mathbb{R}^k$.*

Přecházející věta nám dává intuitivní návod, jak můžeme zjistit pravdivost formule F' v libovolné indukované CAD.

Konstrukce hald je paměťově i časově náročná fáze. Jednoduchým pozorováním se dá ukázat, že eliminace kvantifikátorů často nevyžaduje konstrukci hald nad všemi buňkami. To tedy znamená, že není nutné znát pravdivostní hodnotu vstupní formule F v každém bodě prostoru $\mathbb{R}^r$ k tomu, abychom byli schopni sestavit výstupní formuli. Tato metoda se nazývá *částečná cylindrická algebraická dekompozice* (blíže viz [CH91]).

5 Konstrukce výstupní formule

Konstrukce výstupní formule $\bar{F}$ je nejsložitější a časově nejnáročnější fází CAD. Vstupem je zde CAD prostoru volných proměnných s pravdivostní hodnotou v každé její buňce podle formule F a výstupem ekvivalentní formule $\bar{F}$. Zmíníme zde tři metody: prostou, Collinsovu a Hongovu. Zásadním rozdílem těchto metod je, že Collinsova metoda je za cenu vyšších nároku na čas a paměť vždy schopna sestavit výstupní formuli, Hongova metoda se snaží sestavit výstupní formuli v jednodušším tvaru, tato formule však nemusí být vždy ekvivalentní se vstupní formulí.

Nejdříve si popíšeme jednoduchou metodu pro konstrukci výstupní formule, která využívá pouze faktorů z projekční množiny, jejichž pomocí popíše každou buňku pravdivou vzhledem ke vstupní formulí. Definujme pro každou buňku c z CAD prostoru $\mathbb{R}^k$ a pro každý faktor p z projekční množiny $P = P_1 \cup \dots \cup P_k$ atomickou formuli $A(c, p)$ ve tvaru

$$A(c, p) = \left\{ \begin{array}{l} [p < 0] \\ [p = 0] \\ [p > 0] \end{array} \right\} \vee c$$

Nechť T je množina všech buněk, ve kterých je formule F pravdivá, potom formuli $\bigvee_{c \in T} \bigwedge_{p \in P} A(c, p)$ nazveme *projekční formulí*. Taková formule

je pak často výstupní formulí, ale bohužel ne vždy. Jak už plyne z její konstrukce, projekční formule je pravdivá ve všech buňkách, kde je pravdivá vstupní formule F . Může však nastat případ, kdy bude pravdivá i v buňkách, kde F pravdivá není. Tato situace nastane, pokud např. ve dvou buňkách s různou pravdivostní hodnotou má každý polynom z $P = P_1 \cup \dots \cup P_k$ stejné znaménko. Bude-li projekční formule zároveň výstupní formulí, odpovídající CAD nazveme *projekčně určenou*.

Collinsova metoda je pouze rozšířením prosté metody a vychází z Collinsovi rozšířené projekce, a tím na rozdíl od prosté metody vytváří Collinsova metoda atomické formule, které splňují pouze body z c a žádné jiné.

Hongova metoda, stejně jako prostá metoda, vytvoří výstupní formuli pouze v případě, že CAD je projekčně určená. Na druhou stranu však, pokud už výstupní formuli sestojí, je tato formule v mnohem jednodušším tvaru oproti Collinsově metodě. Hong toho dosáhl tím, že převedl problém konstrukce výstupní formule na minimalizaci logické funkce (viz [Hon92]).

Dalším vylepšením CAD, zejména při konstrukci výstupní formule, je tzv. *jednoduchá CAD* (simple CAD, viz [Bro01]). Její jednoduchost spočívá v tom, že projekční množina neobsahuje přebytečné polynomy, jež nemají žádný vliv na pravdivost vzhledem k F (blíže viz [Dav09]).

6 Závěr

Cylindrická algebraická dekompozice je mocný nástroj pro eliminaci kvantifikátorů. Jejím hlavním prostředkem je rozložení prostoru, jehož dimenze je určena počtem proměnných ve vstupní formuli, do disjunktních buněk, v nichž nabývají polynomy ze vstupní formule „konstantní“ (tzn. záporné, nulové nebo kladné) hodnoty. Výsledkem je potom formule, která vznikne sjednocením sousedních buněk, v nichž je vstupní formule pravdivá.

Výhoda i nevýhoda CAD spočívá v tom, že veškeré výpočty, které jsou nutné k nalezení řešení, jsou prováděny symbolicky. Hlavní nevýhodou z toho plynoucí je pak časová i paměťová složitost metody, která je v nejhorším případě dvojnásobně exponenciální vzhledem k počtu proměnných (viz [DH88] nebo [BD07]).

Použití CAD na konkrétních příkladech lze nalézt např. na stránkách programu QEPCAD B (viz <http://www.cs.usna.edu/~qepcad>) nebo v diplomové práci [Dav09], která navíc obsahuje doplnění jednotlivých fází a kroků CAD (jejich variant) o názorné příklady, které umožňují lepší pochopení této problematiky.

Reference

- [BD07] Christopher W. Brown and James H. Davenport. The complexity of quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition. In *ISSAC '07: Proceedings of the 2007 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 54–60, New York, NY, USA, 2007. ACM.
- [Bro99] Christopher W. Brown. *Solution Formula Construction for Truth Invariant CADs*. PhD thesis, University of Delaware, 1999.
- [Bro00] Christopher W. Brown. *Improved Projection for Cylindrical Algebraic Decomposition*. Journal of Symbolic Computation 32, 5, 447-465, 2000.
- [Bro01] Christopher W. Brown. *Simple CAD construction and its applications*. Journal of Symbolic Computation 31, 5, 521-547, 2001.
- [CH91] G. E. Collins and H. Hong. *Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination*. Journal of Symbolic Computation 12, 3, 299-328, 1991.
- [CJ98] B. Caviness and J. R. Johnson. *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*. Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag, 1998.
- [Dav09] Ondřej Davídek. *Cylindrická algebraická dekompozice a její aplikace*. Diplomová práce, Západočeská univerzita, 2009.
- [DH88] James H. Davenport and Joos Heintz. Real quantifier elimination is doubly exponential. *J. Symb. Comput.*, 5(1-2):29–35, 1988.
- [Hon92] Hoon Hong. *Simple Solution Formula Construction in Cylindrical Algebraic Decomposition based Quantifier Elimination*. Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 177-188, 1992.
- [McC98] S. McCallum. *An improved projection operator for cylindrical algebraic decomposition*. In Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition, B. Caviness and J. Johnson, Eds., Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag, 242-268, 1998.
- [Tar51] Alfred Tarski. *A decision method for elementary algebra and geometry*. University of California Press, Berkeley, 1951.

Geostatistika v R-projektu

Martin Dzurov*, Kristýna Kitzbergerová*, Lucie Šindelářová*

Abstrakt

Geostatistika se zabývá odhady a předpovědí spojitých jevů v prostoru za použití dat jen z omezeného počtu míst v tomto prostoru. Geostatistika aplikuje obecné statistické principy na modelování a vyvozování závěrů o geostatistických problémech. R-projekt je volně dostupný open source software pro statistické výpočty a grafiku, který pracuje pod operačními systémy UNIX, Windows a MacOS. Obsahuje celou řadu balíčků včetně balíčků pro geostatistiku. Cílem projektu je vytvoření interaktivního výukového textu, který bude obsahovat úvod do jazyka R a popis jednotlivých funkcí v geostatistických balíčcích, zejména v balíčku geoR. Celý text bude doplněn o příklady zpracování reálných dat.

Úvod

Mnoho informací, se kterými se denně setkáváme a které používáme, má prostorový charakter. Polohově lokalizovaná data, neboli geodata, nesou tematické informace vázané k určitému místu nebo času, jsou určena geometrickým tvarem a polohou na zemském povrchu, popř. časovým údajem.

Vzhledem k tomu, že se prostorová data bezprostředně týkají našeho každodenního života, byly vyvinuty metody, pomocí nichž je možné taková data zkoumat, analyzovat, odhadovat jejich vývoj, řešit problémy, atd.

Analýzou prostorových dat je možné popsat prostorovou variabilitu atributových hodnot v rámci řešeného území, je možné zjistit zajímavé vlastnosti dat, detekovat shluky, vysoké nebo nízké hodnoty a v neposlední řadě také vypočítat odhady atributových hodnot v místech, které neobsahují naměřené hodnoty. Toto vše nám poskytuje obor geostatistika.

Cílem této práce je poskytnout interaktivní učební text zabývající se geostatistikou v prostředí R a to zejména interpolační metodou kriging. k tomuto účelu byl použit balíček geoR, který poskytuje nástroje pro geostatistickou analýzu dat. Data, která jsou v práci použita představují nadmořské výšky na území České Republiky v měřítku 1 : 500 000.

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. OHK1-065/10.

1 Geostatistika

Geostatistika je vědní obor, který se v poslední době velmi rychle rozvíjí a poprvé byla použita v polovině padesátých let 20. století v těžebním průmyslu pro zlepšení výpočtu

*Katedra matematiky, FSv, ČVUT v Praze

zásoby železné rudy. První výpočty byly provedeny v Jižní Africe těžebním inženýrem D.G. Kriegem a statistikem H.S. Sichelem.

Původně vyvinutý obor pro výpočet odhadu zásoby železné rudy se však rozšířil do mnohých odvětví zabývajících se prostorovými daty spolu s rozvojem výpočetní techniky. Dnes je tento obor velmi populární především v průmyslu, kde je zapotřebí vyhodnocovat prostorově nebo časově určená data. Při rozboru problematiky geostatistiky je zapotřebí brát v úvahu tři oblasti:

Popis dat – je nutné vědět, zda se jedná o data prostorově nebo časově určená, o data s více proměnnými, zda se v datech vyskytují odlehlé hodnoty, které mohou zamaslovat skutečnou strukturu dat. Dnešní výpočetní technika nám poskytuje grafická prostředí, která umožňují vytvářet dynamické náhledy na data (histogramy, korelační diagramy, variogramy, ...).

Interpretace dat – grafická zobrazení získaná z numerických informací jsou dále interpretována již definovanými modely, které se nejvíce přibližují daným datům. Tento model lze brát jako interpretaci prostorových dat a vztahů mezi nimi.

Odhad – našli-li jsme nejlepší model dat, dalším krokem je odhad hodnot pod různými měřítky, v různých lokacích, která nejsou součástí měřených dat. Metody vytváření těchto odhadů jsou založeny na metodě nejmenších čtverců.

1.1 Jazyk R

R je software určený pro manipulaci s daty, provádění výpočtů a grafické zobrazení těchto dat. Mimo jiné také:

- je efektivním nástrojem pro zpracování dat
- obsahuje sadu operátorů pro pole, zejména pak pro výpočty s maticemi
- obsahuje velkou kolekci nástrojů pro průběžnou analýzu dat
- je napsán v jednoduchém a efektivním programovacím jazyku, který zahrnuje podmínky, cykly, uživatelem definované rekurzivní funkce a vstupní a výstupní proudy.

R je nástroj pro vývoj nových metod určených k analýze dat. Jeho vývoj rapidně stoupá a je stále rozšiřován pomocí tzv. balíčků. Nicméně většina programů napsaná v R je stále napsána jen pro určitý typ dat a jejich analýzu.

Prostředí R je vhodné pro statistické rozborů dat a obsahuje již naimplementované klasické i moderní techniky. Běžně používané statistické funkce jsou obsažené v základní sadě R, přejeme-li si použít funkci, která není součástí základního balíčku, musíme použít speciální balíček, který danou funkci obsahuje. Existuje okolo 25 balíčků dodávaných k R a lze je rozdělit do dvou hlavních kategorií – *standardní* a *doporučené*. Řada těchto balíčků je dostupná skrze tzv. CRAN rodinu¹.

¹<http://CRAN.R-project.org>

1.2 Balíček GeoR

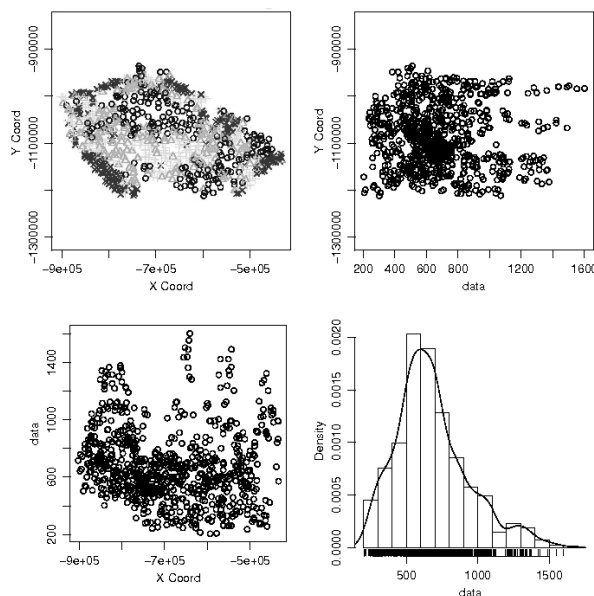
Balíček `geoR` poskytuje funkce pro geostatistickou analýzu dat v prostředí R. Po spuštění softwaru R je nutné balíček nainstalovat.

Data, se kterými chceme pracovat, musí být uložena v objektu typu `geodata`. Objekt tohoto typu obsahuje alespoň jednu souřadnici místa pozorování a hodnotu atributu v tomto místě. Nejčastěji se setkáme s daty uloženými v ASCII formátu, která musíme načíst do R.

Po načtení dat nadmořských výšek a zavoláním funkce `summary()` zjistíme, že datový soubor obsahuje 797 bodů, nejmenší x -ová souřadnice je -902215.0 m a největší -1212091.1 m, nejmenší y -ová souřadnice je -433083.5 m. a největší -935732.4 m. Nejmenší vzdálenost mezi body činí cca 1.2 km a největší vzdálenost mezi dvěma body je 488 km.

Pomocí další vestavěné funkce `plot.geodata()` zobrazíme daná data.

Graf na obrázku č. 1 vykreslený funkcí `plot.geodata(vysky)` zobrazuje 2D polohu bodů s barevným rozlišením hodnot atributu (nadmořských výšek) rozdělených do několika tříd, dále graf hodnot atributu v souřadnicích X a Y a poslední z grafů zobrazuje histogram souboru dat.



Obrázek 1: Grafický výstup funkce `plot.geodata()`

1.3 Variogramy

Variogram je základním geostatistickým nástrojem pro vizualizaci, modelování a prostorovou autokorelaci naměřených hodnot. Variance poté udává míru rozptylu, jak se mění hodnoty proměnné při změně vzdálenosti h z bodu x do bodu $x + h$.

Vzorec pro výpočet variogramu je:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{\infty} [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (1)$$

Vypočteme jej jako součet čtverců eukleidovských vzdáleností mezi každou dvojicí bodů, dělený dvojnásobkem počtu bodů.

V balíčku geoR jsou implementovány dva typy odhadů empirických variogramů:

- **Klasický odhad**

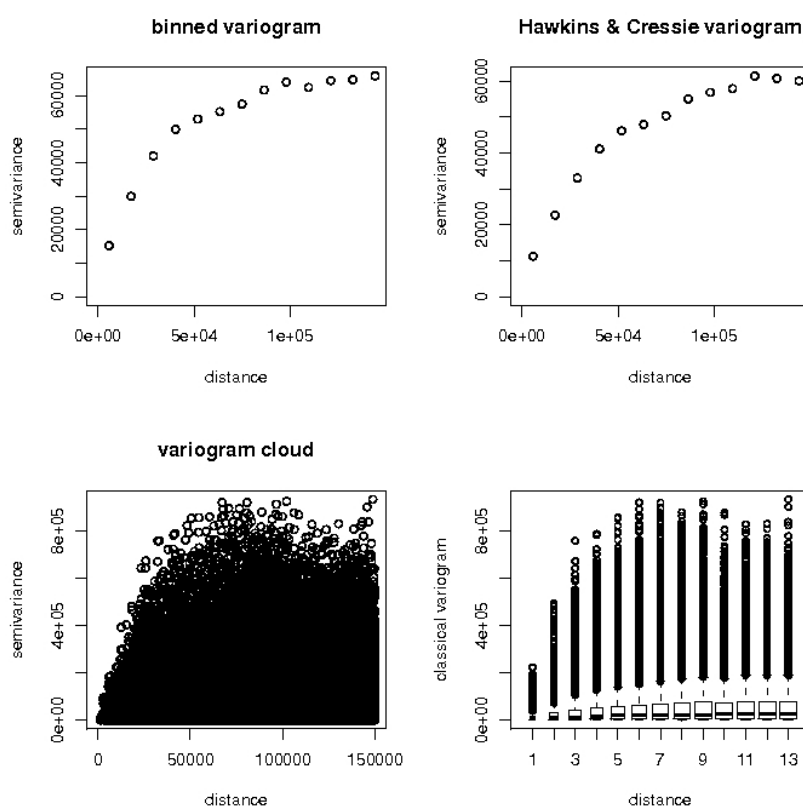
$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{\infty} [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (2)$$

- **Hawkins-Cressieův robustní odhad**

$$\gamma(h) = \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \right]^{\frac{1}{4}}}{0.914 + \frac{0.998}{n}} \quad (3)$$

Algoritmus výpočtu variogramu funguje zjednodušeně následovně:

1. nejdříve vytvoří tzv. mračna bodů (variogram cloud)
2. body v mračnu uspořádá do tříd (bins) podle vzdáleností
3. v každé třídě vypočítá průměr
4. v posledním kroku graficky vykreslí závislost hodnoty variogramu γ na vzdálenosti mezi body, viz obrázek č. 2



Obrázek 2: Variogramy

1.3.1 Odhady parametrů variogramu a kovarianční funkce

Experimentální variogramy jsou nahrazeny variogramy teoretickými a to z důvodu, aby měl model variogramu fyzikální význam. Použití teoretického variogramu zajišťuje, že variance jakékoliv lineární kombinace náhodně vybraných hodnot bude vždy kladná. "Napasování" teoretického variogramu na empirický se většinou děje od oka, protože ani empirický variogram přesně neodpovídá sekvenci naměřených hodnot.

Kovarianční funkce je definována:

$$\begin{cases} Ez(x) = m & \text{pro } x \in \mathcal{D} \\ Ez(x) \cdot z(x+h) - m^2 = C(h) & \text{pro } x, x+h \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (4)$$

Vlastnosti kovarianční funkce:

1. Kovarianční funkce je omezená a její absolutní hodnota není větší než variance

$$|C(h)| \leq C(0) = \text{var}(z(x)) \quad (5)$$

2. sudá funkce

$$C(-h) = C(h) \quad (6)$$

3. kovarianční funkce podělená variancí se nazývá *korelační funkce*

$$\rho(h) = \frac{C(h)}{C(0)}, \quad -1 \leq \rho(h) \leq 1 \quad (7)$$

4. kovarianční funkce je *pozitivně definitní funkce*, což znamená, že použijeme-li kovarianční funkci $C(h)$ pro výpočet variance lineární kombinace $n + 1$ náhodných proměnných $z(x_i)$, je tato variance vždy kladná.

$$\text{var} \left(\sum_{i=0}^n w_i z(x_i) \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_i w_j C(x_i - x_j) = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad (8)$$

Vztah mezi kovarianční funkcí a variogramem je poté následující:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (9)$$

Modely kovariančních funkcí

Pro teoretické variogramy existuje několik modelů, zde uvedeme základní čtyři typy:

1. **Nugget-effekt model** – kovarianční funkce $C(h)$ modeluje nespojitost na počátku – tzv. *nugget* – viz obrázek č. 3.

$$C_{nug}(h) = \begin{cases} b, & h = 0 \\ 0, & h > 0 \end{cases} \quad (10)$$

a platí, že

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = b, \quad b > 0 \quad (11)$$

2. **Exponenciální model** – exponenciální kovarianční funkce klesá exponenciálně s rostoucí vzdáleností bodů a je definována následovně:

$$C_{exp}(h) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{3h}{R}\right), \quad \sigma, R > 0 \quad (12)$$

σ je tzv. *sill* (neboli výška variogramu) – viz obrázek č. 3.

R je tzv. *range* a vyjadřuje, jak rychle klesá kovariance. Pro hodnoty vzdálenosti $h = 3R$ klesne kovarianční funkce o 95% své původní hodnoty. Jinými slovy lze říci, že vyjadřuje, v jak velkém okolí se naměřené hodnoty ještě ovlivňují – viz obrázek č. 3.

Exponenciální model je spojitý a na počátku se asymptoticky blíží nule:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} C_{exp} = 0 \quad (13)$$

3. **Sférický model** – je definován následovně:

$$C_{sph}(h) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{3h}{2R} + \frac{h^3}{2R^3}\right), & 0 \leq h \leq R \\ 0, & h > R \end{cases} \quad (14)$$

4. **Gaussův model** – je definován následovně:

$$C_{gauss}(h) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{3h^2}{R^2}\right) \quad (15)$$

1.4 Cross-validace

Cross-validace je jednoduchý způsob, jak porovnat různé předpoklady, např. o modelu (typ variogramu a jeho parametry, velikost nejbližšího okolí použitého pro následnou interpolaci), o datech (detekce odlehlých hodnot nebo anomálií).

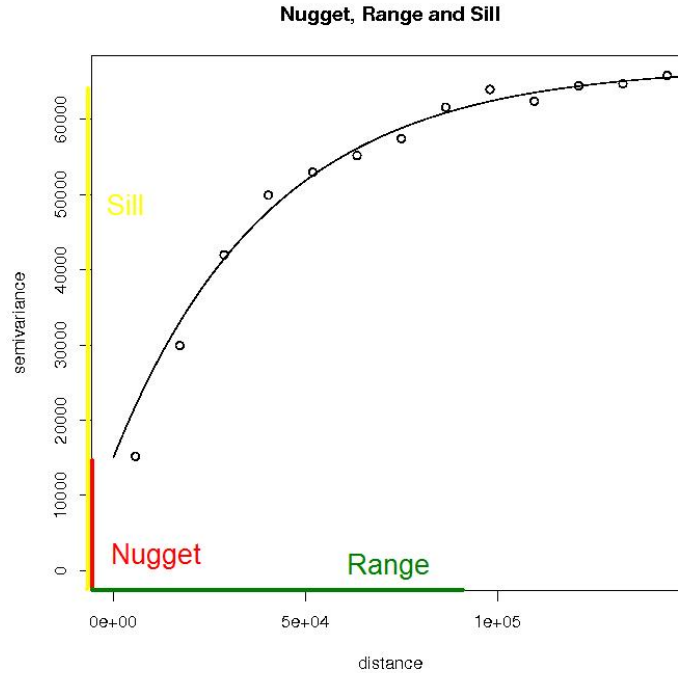
V procesu cross-validace je každá hodnota $z(x_\alpha)$, na které se cross-validace provádí, odstraněna z množiny dat a hodnota v tomto bodě $z^*(x_\alpha)$ je poté odhadnuta pomocí zbývajících $n - 1$ hodnot.

Rozdíl mezi hodnotou naměřenou a hodnotou určenou odhadem poté ukazuje, jak dobře zvolený model odpovídá skutečným naměřeným hodnotám.

$$z(x_\alpha) - z^*(x_\alpha) \quad (16)$$

Pokud je aritmetický průměr chyby cross-validace blízký nule, pak lze tvrdit, že se nejedná o zjevné zkreslení, avšak pokud je tento průměr značně kladný nebo záporný, lze předpokládat, že došlo k systematickému nadhodnocení nebo podhodnocení.

$$\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n (z(x_\alpha) - z^*(x_\alpha)) \cong 0 \quad (17)$$



Obrázek 3: Znázornění parametrů variogramu – nugget, sill a range

Pokud se následující rovná jedné, pak lze tvrdit, že se aktuální chyba odhadu rovná v průměru chybě zvoleného modelu. Pokud je tato podmínka splněna, lze zvolený model a jeho parametry považovat za adekvátní.

$$\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \frac{(z(x_{\alpha}) - z^*(x_{\alpha}))^2}{\sigma_{\alpha}^2} \cong 1 \quad (18)$$

σ_{α} je směrodatná odchylka reprezentující chybu odhadu modelu

V prostředí R je funkce pro cross-validaci již naimplementovaná a lze ji spustit příkazem `xvalid()`. Jako argumenty vstupují měřená data, zvolený model, který má být ověřen a případně logická hodnota, zda se parametry modelu mají znovu odhadnout.

2 Interpolační metoda Ordinary Kriging

Metoda Ordinary Kriging (OK) je nejrozšířenější metodou typu kriging. Slouží k odhadu hodnoty na bodě nebo na celém regionu, pro který známe variogram, za použití dat v blízkém okolí tohoto bodu.

Přejeme-li si odhadnout hodnotu v místě x_0 , kde nemáme provedeno měření, získáme tuto hodnotu lineární kombinací hodnot ze sousedních bodů a vah, které jsou těmto bodům přidělené:

$$\hat{z}(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} z(x_{\alpha}), \quad \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} = 1 \quad (19)$$

Je však nutné dodržet několik předpokladů:

- *pozitivní semidefinitnost*

- Matice A je pozitivně semidefinitní, pokud její kvadratická forma je pozitivně semidefinitní:

$$x^T A x \geq 0, \quad x \neq 0 \quad (20)$$

- *Best Linear Unbiased Predictor (BLUP)* – nejlepší lineární nezávislý prediktor

- $\hat{h}_0 = \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} h_{\alpha} + w_0$ je lineární prediktor podle definice
- $\hat{h}_0$ je nezávislý prediktor, pokud platí $E \{ \hat{h}_0 - h_0 \} = 0$
- $\hat{h}_0$ je nejlepší, pokud platí $E \{ \| \hat{h}_0 - h_0 \|^2 \}$ je minimální

Minimalizací tedy získáme systém rovnic pro metodu kriging:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \gamma(x_1 - x_1) & \cdots & \gamma(x_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(x_n - x_1) & \cdots & \gamma(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_n} \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma(x_1 - x_0) \\ \vdots \\ \gamma(x_n - x_0) \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_n} \quad (21)$$

$\mathbf{C}_n$ vyjadřuje rozdíly mezi naměřenými daty

$\mathbf{w}_n$ obsahuje váhy přiřazené měřením

λ je Langrangův multiplikátor

$\mathbf{d}_n$ vyjadřuje rozdíly mezi měřenými hodnotami a hodnotami odhadnutými

Neznámou v tomto případě je matice vah, kterou snadno vypočítáme a dosadíme do rovnice č. 19.

$$w_n = C_n^{-1} d_n \quad (22)$$

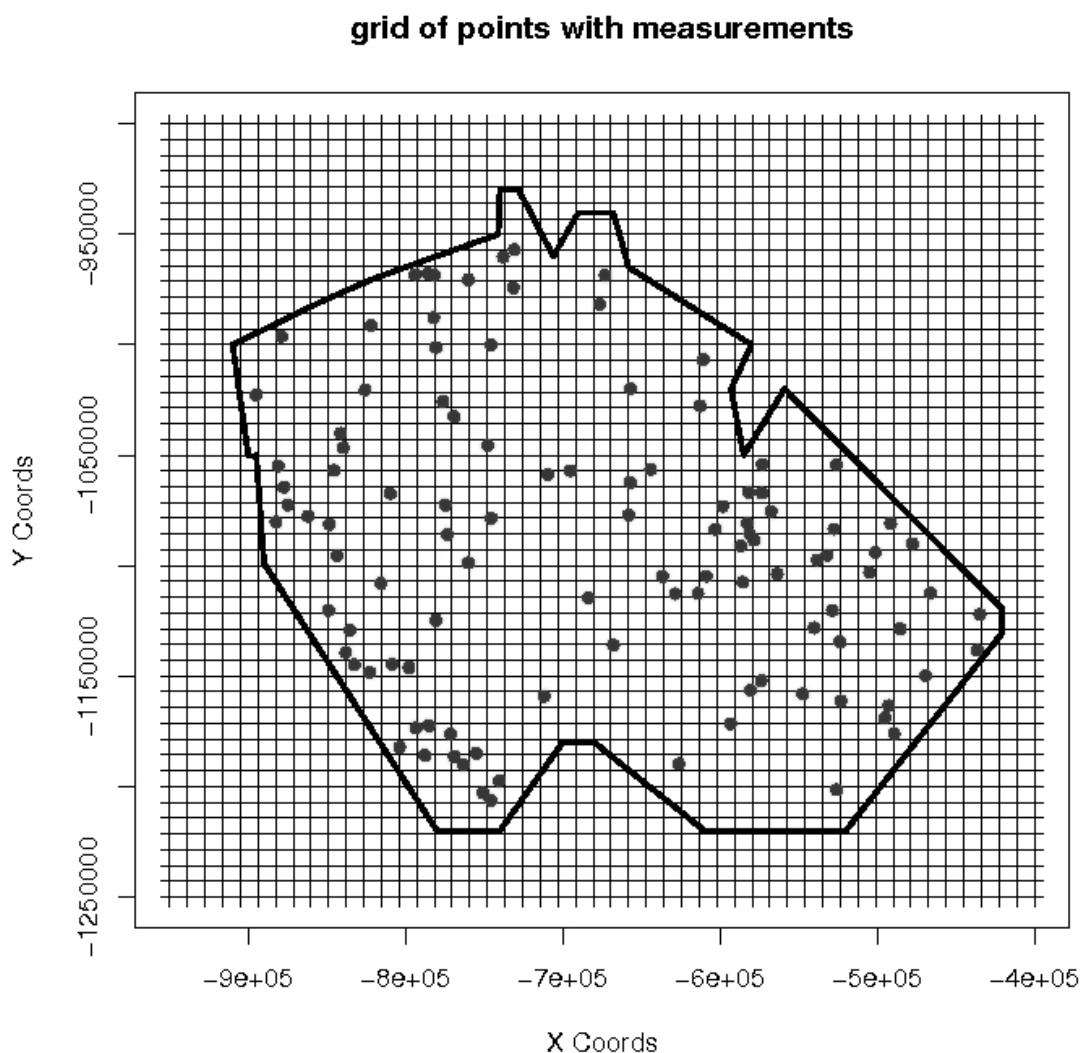
Variance odhadnutých hodnot je pak dána následovně:

$$\sigma^2 = \lambda - \gamma(x_0 - x_0) + \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} \gamma(x_{\alpha} - x_0) \quad (23)$$

Ordinary Kriging je tzv. přesný interpolátor, to znamená, že pokud hodnota x_0 je identická s místem, kde bylo provedeno měření, bude vyinterpolovaná hodnota identická s hodnotou naměřenou:

$$\hat{z}(x_0) = z(x_{\alpha}), \quad x_0 = x_{\alpha} \quad (24)$$

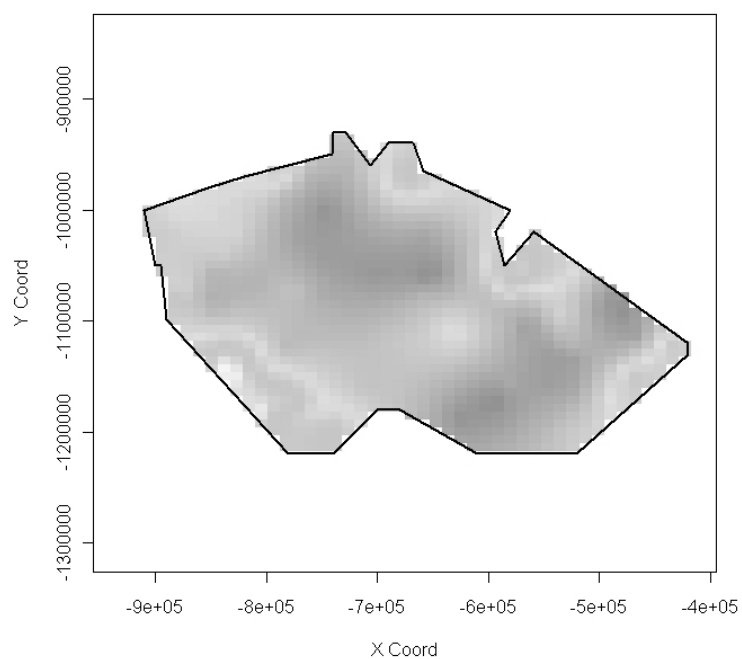
Metodu kriging lze použít jako interpolační metodu pro odhad hodnot na pravidelné mřížce pomocí nepravidelně rozmístěných dat. Tuto metodu jsme využili i pro interpolaci výšek ČR. Obrázek č. 4 zobrazuje pravidelnou mřížku, na které budou odhadnuty hodnot nadmořských výšek, červené body zobrazují 100 náhodně vybraných bodů, na kterých známe hodnotu hledaného atributu. Celý výpočet bude proveden uvnitř polygonu, který lemuje hranice území ČR.



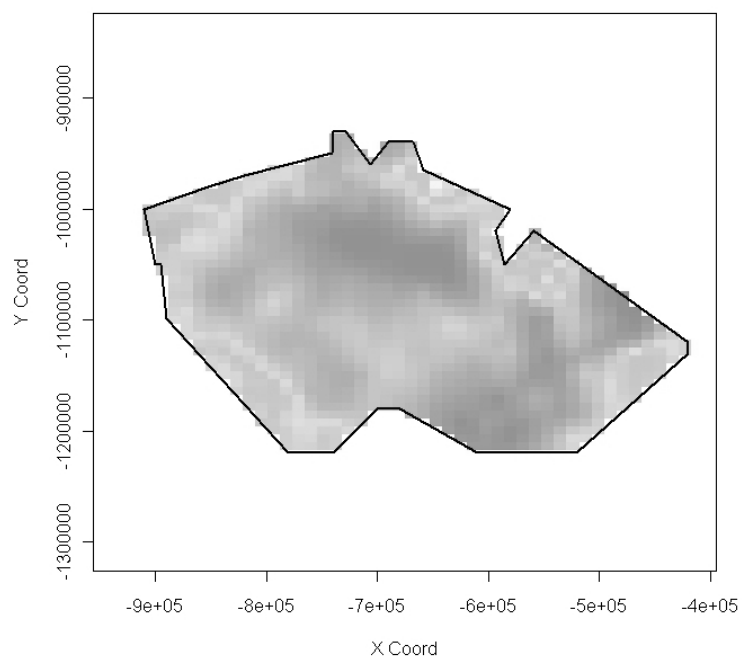
Obrázek 4: Pravidelná mřížka, na které bude proveden výpočet metodou OK

Výsledný graf vyinterpolovaných nadmořských výšek je zobrazen na obrázku č.5, střední chyby interpolace zobrazuje obrázek č. 7. Jako barevná stupnice byla použita stupnice `terrain.colors()`, kde tmavá barva vyjadřuje vysoké hodnoty a světlá naopak hodnoty velmi nízké. Pro vykreslení byla v prostředí R použita funkce `image()`.

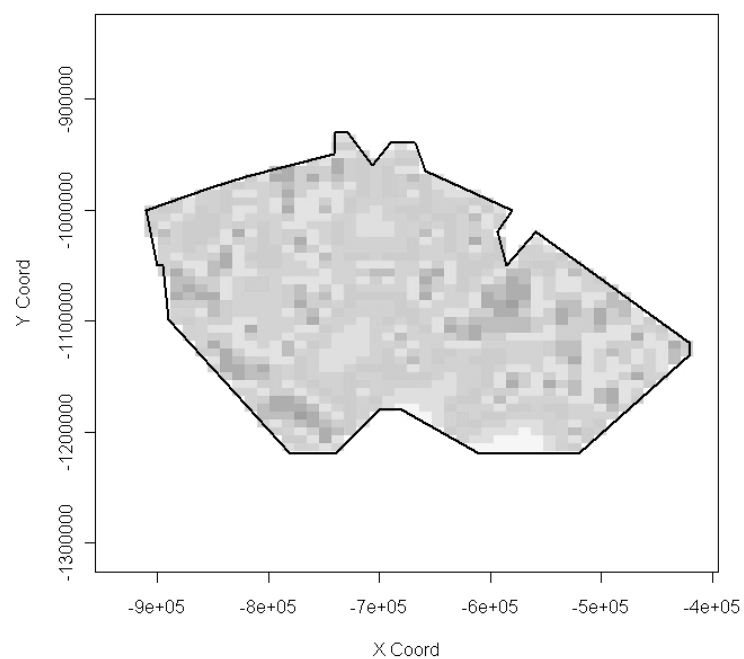
Na obrázku č. 5 a č. 6 lze porovnat výsledek interpolace za použití pouze 100 náhodně vybraných bodů pro interpolaci a za použití celého souboru měření. Stejně porovnání lze provést na grafech č. 7 a č. 8 se středními chybami určení nadmořské výšky.



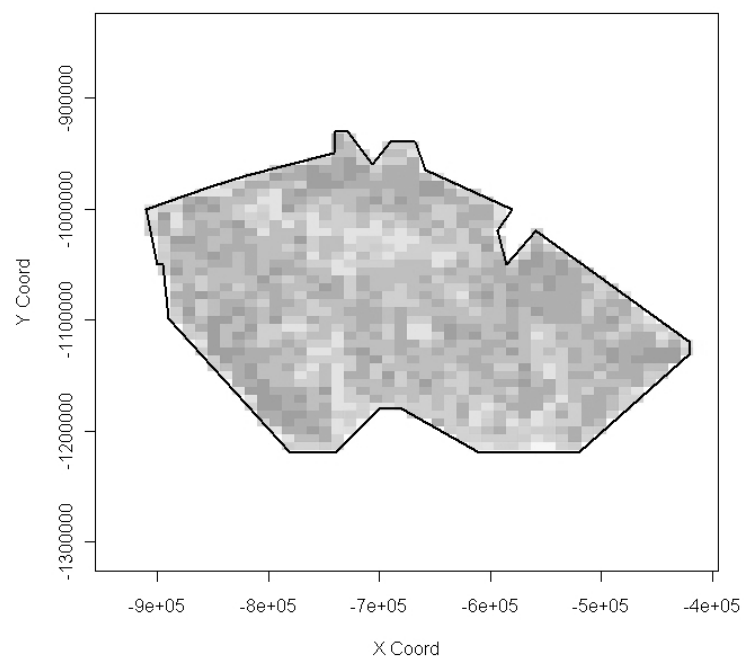
Obrázek 5: Predikce nadmořských výšek pomocí OK ze 100 náhodně vybraných bodů



Obrázek 6: Predikce nadmořské výšky pomocí OK ze všech hodnot měření



Obrázek 7: Směrodatná odchylka odhadnutých nadmořských výšek ze 100 náhodně vybraných bodů



Obrázek 8: Variance odhadnutých nadmořských výšek ze všech hodnot měření

Modelovanie deformácií zemského povrchu

Michal Eliaš (michal.elias@fsv.cvut.cz)¹

Anotácia

Práca modelovanie deformácií zemského povrchu sa zaoberá výpočtom a počítačovým modelovaním deformácií povrchu. Cieľom práce je číselnou hodnotou vyjadriť vplyv zmeny povrchu na konkrétne "pozorované" body. Analýza a modelovanie deformácií elastického povrchu Zeme je jednou z klasických úloh spadajúca do oboru geofyziky. V geodetických aplikáciách sa s týmto problémom v praxi často nestretávame.

1 Riešenie Farrellovho problému

Podľa [1] riešením Farrellovho prípadu sú vzťahy, ktoré sú závislé na zenitovej vzdialenosti vyjadrujúce vertikálny a horizontálny posun $u(\Theta)$, $v(\Theta)$ bodu na povrchu v rámci modelu sférickej Zeme. Ďalej vyjadruje zmenu gravitačného zrýchlenia $g(\Theta)$ a zmenu v odklone lokálnej zvislice (z angl. *tilt effect*) $t(\Theta)$. Platia nasledujúce vzťahy:

$$u(\Theta) = \frac{am_L}{M_{\oplus}} \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(\cos \Theta) \quad (1)$$

$$v(\Theta) = \frac{am_L}{M_{\oplus}} \sum_{n=1}^{\infty} l_n \frac{\partial P_n(\cos \Theta)}{\partial \Theta} \quad (2)$$

$$g(\Theta) = \frac{gm_L}{M_{\oplus}} \sum_{n=0}^{\infty} [n + 2h_n - (n + 1)k_n] P_n(\cos \Theta) \quad (3)$$

$$t(\Theta) = - \left(\frac{m_L}{M_{\oplus}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} [1 + k_n - h_n] \frac{\partial P_n(\cos \Theta)}{\partial \Theta} \quad (4)$$

V predchádzajúcich vzťahoch vystupujú hmotnosť Zeme $M_{\oplus}$, polomer sférickeho modelu Zeme a , gravitačné zrýchlenie g , element hmotnosti zaťaženej alebo odľahčenej zeminy m_L . Súčasťou uvedených vzťahov sú tzv. Loveové bezrozmerné zaťažovacie čísla h_n je pomer výšky prílivu reálnej Zeme a výšky statického prílivu a k_n je pomer potenciálu vyvolaného premiestnením hmôt a slapového potenciálu, ktorý toto premiestnenie spôsobil, viacej v [3]. Podľa [3] Loveové čísla majú jednoduchý fyzikálny význam a každý typ deformácie možno charakterizovať kombináciou týchto čísel. Podľa [2] platí:

¹Katedra speciální geodézie, ČVUT Praha, Thákurova 7/2077, 166 29 Praha 6

$$\begin{bmatrix} U_n(r) \\ V_n(r) \\ \Phi_{1,n}(r) \end{bmatrix} = \Phi_{2,n}(r) \begin{bmatrix} \frac{h_n(r)}{g} \\ \frac{l_n(r)}{g} \\ k_n(r) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

kde konštanta r nahrádza a v prípade ak polomer a nie je známy a $\Phi_{2,n}(r)$, pre ktorý platí

$$\Phi_{2,n} = \frac{ag}{M_{\oplus}}$$

je transformovaný potenciál povrchu bodovej hmotnosti zaťaženia. V (5) je tretí parameter l_n , ktorý sa nazýva *Shidové (Lambertové) číslo* a ktorý tak v kombinácii s Loveovými číslami úplne opisuje elastické javy.

Znalosť Loveových zaťažovacích čísel je v uvedených vzťahoch dôležitá, pretože podľa [4] popisujú elastickú reakciu deformácií Zeme. Loveové čísla sú úzko spojené s Greenovými funkciami a pri ich aplikácii je výhoda použitia čísel väčšieho rádu n (teoreticky až $n \rightarrow \infty$), pretože to značne uľahčuje výpočet, ako sa uvádza v [2] a kde limitné hodnoty

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} h_n \\ nl_n \\ nk_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{\infty} \\ l_{\infty} \\ k_{\infty} \end{bmatrix}$$

sú dostatočne odôvodnené.

Výsledok Farrellovho riešenia je uvádzaný ako súhrn elementárnych výpočtov rovníc (1) až (4) pre *Gutenberg–Bullenov* model Zeme, ($n = 10000$) s jednotkou bodového zaťaženia $1kg$ a veľkosť uhlu $\Theta \in < 0,0001^\circ, \dots, 180^\circ >$.

2 Riešenie Boussinesqovho problému

Boussinesqové riešenie je podľa [2] založené na určení silového účinku na uvažovanú plochu, pričom tento účinok nie je zdrojom gravitačného poľa. Štandardné riešenie pre vertikálne a horizontálne posuny spôsobené vertikálnou silou tlačnou na bodovú jednotku na elastickom povrchu nájdeme v tvare:

$$u(z, r) = -\frac{1}{4\pi\mu R} \left(\frac{\sigma}{\eta} + \frac{z^2}{R^2} \right) \quad (6)$$

$$v(z, r) = -\frac{1}{4\pi\eta r} \left(1 + \frac{z}{R} + \frac{\eta r^2 z}{\mu R^3} \right) \quad (7)$$

V prípade, ak gravitačnú silu v Boussinesqovom probléme zanedbáme, bude $z = 0$, $\phi_2 = 0$ a potom

$$u(0, r) = -\frac{\sigma m_L g}{4\pi\mu\eta r} \quad (8)$$

$$v(0, r) = -\frac{m_L g}{4\pi\eta r}, \quad (9)$$

kde σ a η sú výsledkom kombinácií Lamého parametrov λ a μ , pre ktoré platí

$$\sigma = \lambda + 2\mu,$$

$$\eta = \lambda + \mu,$$

a pre r platí

$$r = 2R \sin \frac{1}{2}\Theta \quad (10)$$

Ako sa uvádza v [2] vzťah Loveových zaťažovacích čísel v rovinnom riešení je vyjadrený v rovniciach

$$\begin{bmatrix} h_\infty \\ l_\infty \\ k_\infty \end{bmatrix} = \frac{gM_\oplus}{4\pi a^2 \eta} \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{\mu} \\ 1 \\ \frac{-3\varrho_L \eta}{2\varrho_\oplus \mu} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

kde

- $\varrho_\oplus$ je priemerná hustota Zeme,
- ϱ_L je hustota zaťaženej hmotnosti.

V Boussinesqueskovom riešení je zmena gravitačného zrýchlenia vyjadrená súčtom dvoch častí, pričom prvá časť vyjadruje zmenu gravitačného zrýchlenia na základe účinku gravitačného potenciálu Φ bodového zaťaženia na deformovanom povrchu

$$g^\Phi(0, r) = \frac{-G\varrho_L m_L g}{2\mu r}, \text{ kde} \quad (12)$$

G je Newtonová gravitačná konštanta.

Druhá časť vyjadruje zmenu gravitačného zrýchlenia vďaka vplyvu zmeny vertikálneho posunu (8), čiže vyjadruje elastický účinok. Potom platí:

$$g^u(0, r) = \frac{2gu(0, r)}{a}. \quad (13)$$

V prípade výpočtu a vyjadrenia zmeny lokálnej zvislice gravitačného zrýchlenia opäť postupujeme súčtom dvoch častí, pričom prvá časť vyjadruje zmenu vertikálneho posunu (8) v závislosti na r

$$t^u(0, r) = \frac{\partial u(0, r)}{\partial r} = \frac{\sigma m_L g}{4\pi\mu\eta r^2}. \quad (14)$$

Druhá časť vyjadruje deriváciu vrtikálneho posunu obsahujúci gravitačný efekt bodového zaťaženia $u^N(0, r) = \frac{-Gm_L}{gr}$ v závislosti na r :

$$t^N(0, r) = \frac{\partial u^N(0, r)}{\partial r} = \frac{Gm_L}{gr^2}. \quad (15)$$

Voľba Lamého parametrov v tomto probléme zohráva dôležitú úlohu, pretože významne reprezentuje geologickú štruktúru skúmanej lokality. Vychádzajúc preto zo vzťahov uvedených v [3], potom:

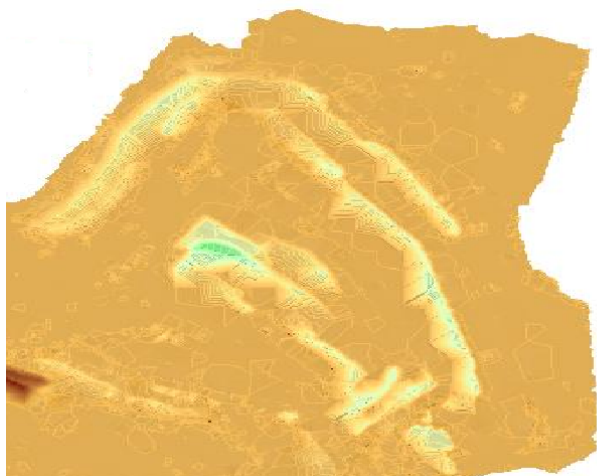
$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}, \quad (16)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \quad (17)$$

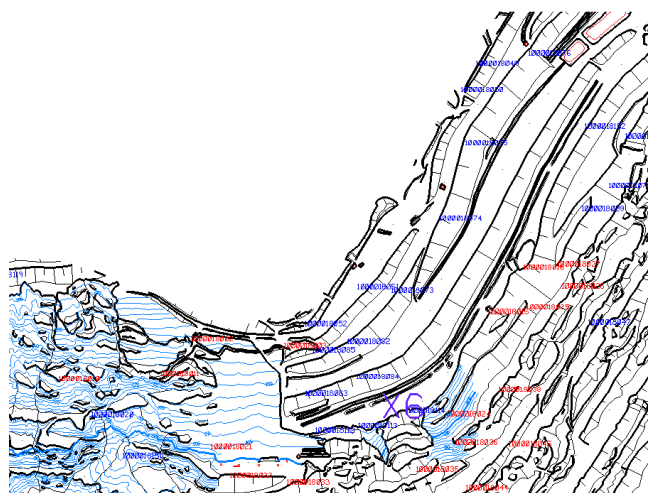
Jedná sa o **longitudinálnu** (16) a **transverzálnu vlnu** (17). Na seizmogramoch sú longitudinálne vlny identické s P vlnami a vlny S s transverzálnymi vlnami. Práve šírenie sa týchto vĺn je svojou hodnotou charakteristické pre jednotlivé geologické vrstvy, resp. nerastné suroviny.

3 Príklad

Ako ilustratívny príklad uvádzam situáciu v hnedouhoľnom lome ČSA. Je zrejmé, že vplyvom ťažby nerastnej suroviny dochádza k značnému zásahu do okolitého terénu a tým pádom k deformáciám. Kvôli bezpečnosti a preventívnym opatreniam sú na svahu stabilizované pozorované body, ktoré si z geodetického hľadiska žiadajú hodinové periodické zameranie. Úlohou je vyjadriť účinok resp. vplyv výkopu (vid' obrázok 1) na spomínané pozorované body (vid' obrázok 2)



Obr. 1: Situácia v skúmanej lokalite



Obr. 2: Stav pozorovaných bodov

4 Postup spracovania

Postup pre Farrellové riešenie

- Využijúc grafické výstupy software DMT Atlas a po definovaní lokalít výkopu, z dostupných súradníc z týchto lokalít, ktoré následne exportujeme, vytvoríme sieť trojuholníkov (Delaunayové trojuholníky).
- Pre každý takto definovaný trojuholník vypočítame obsah, súradnice ťažiska (X_t , Y_t) a element hmotnosti m_L .
- Zo známych súradníc ťažiska a súradníc pozorovaných bodov vypočítame veľkosti vektorov $|r|$.
- Vzťahom (10) pre každý element plochy a s využitím vzdialeností ťažísk trojuholníkov a pozorovaných bodov vypočítame neznáme veľkosti uhlov Θ .
- Pomocou Greenových funkcií a ich známych hodnôt vypočítaných pre G-B model v závislosti na vypočítanom uhle Θ interpolujeme tie hodnoty Greenových funkcií, ktoré odpovedajú veľkostiam uhlov Θ .

Postup pre Boussinesqové riešenie

Z predchádzajúceho postupu, pre modelovanie tohto problému, využijeme informácie týkajúce sa elementov hmotnosti a výsledky výpočtu veľkostí vektorov. V ďalšej úvahe pokračujeme navrhnutím Lamého parametrov. K dispozícii nech je profil zachycujúci rez geologickou štruktúrou lokality. Z konzultácií k tomuto profilu vyplýva nasledujúce:

Tabuľka 1: Priemerné hodnoty rezom geologickej štruktúry v skúmanej lokalite do hĺbky cca 100m

<i>Hornina</i>	$v_p[m/s]$
Uhlie	1,8 – 2,8
Hlina	0,2 – 0,5
Íl	0,3 – 0,9
Ílovec	1,5 – 4,0

Profil samozrejme obsahuje ďalšie horniny, napr. štrk, detrit, lupek, no pre toto modelovanie stačí uvažovať s horninami uvedenými vyššie. Všetky tieto horniny spadajú do kategórie sedimentov. Priemerná hustota sedimentov sa pohybuje v rozmedzí $1,2 - 3,0 g/cm^3$ (v [5] sa uvádza hustota uhlia $1,3 g/cm^3$, pieskovca či bridlice $2,0 g/cm^3$). V ďalšom výpočte uvažujem $\rho = 2,5 g/cm^3$. Rýchlosti P vln uvedené v tabuľke 1 obsahujú pomerne široké rozpätie veľkostí. Problém spočíva v tom, že rýchlosť šírenia vln v sedimentoch je závislá na niekoľkých vlastnostiach napr. na zhutnení, popraskanosti či kompaktnosti. Zrejme bude platiť, že čím je sediment kompaktnější (najmä u starších sedimentov), tým je rýchlosť šírenia vln väčšia a naopak. V práci [5] sa hovorí o analýze seizmických vln pre opustené uhoľné bane. Odtiaľ pre rýchlosť šírenia P a S vln platí: $P \approx 1,6 - 2,4 km/s$, $s \approx 0,7 - 1,4 km/s$.

Vzhľadom k skutočnostiam, že v rámci geologickej štruktúry ílovec zohrával podstatnú úlohu a rovinné riešenie je závislé na viacerých odhadovaných premenných, v ďalšom experimente budem uvažovať $v_p = 5,1 km/s$ a pomer v_p/v_s nech je 1,73, potom $v_s = 2,948 km/s$.

Aplikovaním a úpravou vzťahov (16) a (17) získam hodnoty pre Lamého parametre, pre ktoré platí $\mu = 2,173 \cdot 10^{10} N/m^2$, $\lambda = 2,157 \cdot 10^{10} N/m^2$.

5 Výsledky a interpretácia výsledkov

V nasledujúcich tabuľkách predstavujem výsledky modelovania deformácií pre prípad vstupných hodnôt z etáp 2006(1) – 2006(5). Tabuľka obsahuje čísla pozorovaných bodov, výsledky vplyvu deformácií pre vertikálny a horizontálny smer pre sférické riešenie a rovnako efekt deformácií na spomínané smery pre rovinné riešenie.

Tabuľka 2: Výsledky modelovania deformácií

Farrellové (sférické) riešenie				
<i>c.b.</i>	<i>u</i> [m]	<i>v</i> [m]	<i>g</i> [m * s ⁻²]	<i>t</i> [°]
2	0.0009	0.0003	0.000000002034	-0.00000087
3	0.0011	0.0004	0.000000002515	-0.00000150
10	0.0007	0.0002	0.000000001617	-0.00000051
11	0.0008	0.0003	0.000000001910	-0.00000074
15	0.0023	0.0008	0.000000005448	-0.00002217
16	0.0023	0.0008	0.000000005325	-0.00001349
20	0.0007	0.0003	0.000000001690	-0.00000056
21	0.0009	0.0003	0.000000002049	-0.00000086
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Tabuľka 3: Výsledky modelovania deformácií

Boussinesqueové (rovinné) riešenie				
<i>c.b.</i>	<i>u</i> [m]	<i>v</i> [m]	<i>g</i> [m * s ⁻²]	<i>t</i> [°]
2	0.0014	0.0005	0.000000005032	-0.00000148
3	0.0017	0.0007	0.000000006188	-0.00000255
10	0.0011	0.0004	0.000000004030	-0.00000087
11	0.0013	0.0005	0.000000004734	-0.00000126
15	0.0036	0.0014	0.000000013237	-0.00003771
16	0.0035	0.0014	0.000000012941	-0.00002295
20	0.0011	0.0004	0.000000004206	-0.00000095
21	0.0014	0.0005	0.000000005069	-0.00000146
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Stručnou interpretáciou výsledkov sa dá povedať, že modelovanie deformácií tu má svoj význam a výsledky svojou hodnotou poukazujú na konkrétny vplyv zmeny zemského povrchu vzhľadom na pozorované body. Na prvý pohľad je zrejmé, že sférický a rovinný model sa svojím riešením líši. Zatiaľ čo sférické riešenie má svoj globálny význam a dôraz kladie na elasticitu Zeme vyjadrenú Loveovými parametrami, rovinné riešenie aproximuje časť sférického povrchu, no nezahrňuje komplexné algebraické postupy pre sférický výpočet. Tým pádom nám ponúka detailnejší pohľad na štruktúru Zeme.

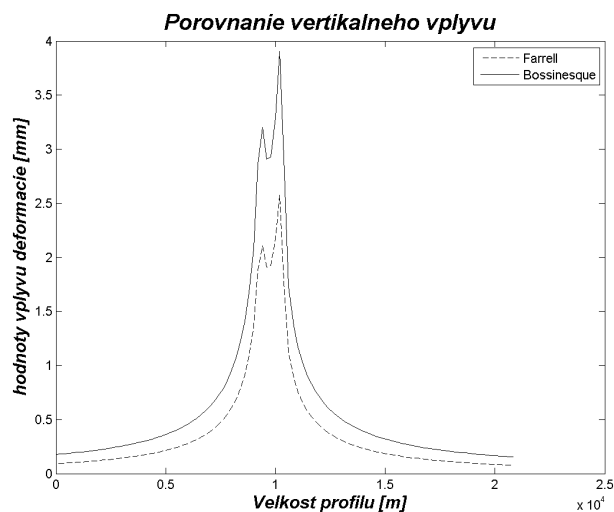
Je dôležité pripomenúť si, že obe riešenia pracujú na základe výpočtu a v našom prípade aj jeho postupu, ktorý zavádza rôzne zjednodušenia. Preto by sa dalo polemizovať o dôveryhodnosti výstupov. Predovšetkým sa jedná o vstupné hodnoty. Lokalizácia výkopových a násypových miest v skúmanej oblasti prebehla vyložene grafickou metódou. To znamená, že na podklade hypsometrického výstupu (viď napr. obrázok 1) sme si definovali miesta predpokladaného výkopu. Vzhľadom k tomu, že Boussinesqové riešenie sa istým spôsobom dotýka geologickej štruktúry povrchu a skúmaná lokalita svojou veľkosťou a rozlohou zaberá len malú plochu, pre náš problém by bolo rozumnejšie upriamiť pohľad na toto riešenie. Na druhej strane Farrellov sférický model sa zdá byť komplexnejší a pre iné účely ma určite väčší význam.

Pre informáciu uvádzame grafické výstupy profilov veľkosti *cca 20 km*, ktorých obsah by mal názorné poukázať na veľkosť vplyvu deformácie v závislosti na vzdialenosti od pozorovaných bodov pre obe riešenia.

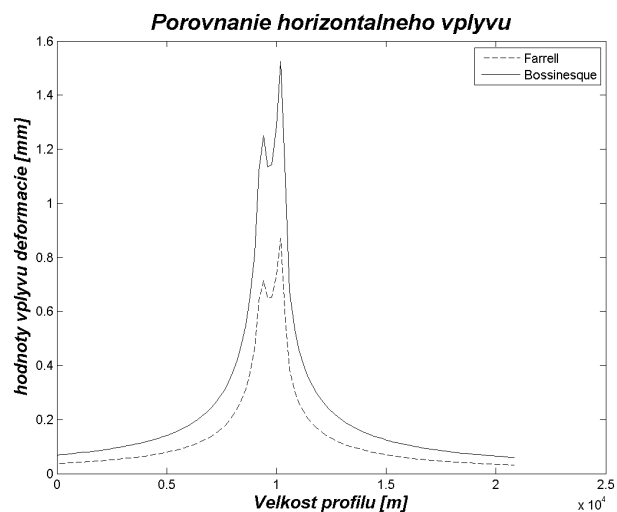
6 Záver

Cieľom tejto práce bolo poukázať na možnosť zapojenia geofyzikálnych a geodynamických metód do bežnej technickej praxe, ktorú predstavuje geodetické zameranie bodov. V kombinácii výsledkov týchto metód je možné získať reálnejšiu predstavu o skutočnom pohybe a mechanizme skúmaných veličín v lokalite.

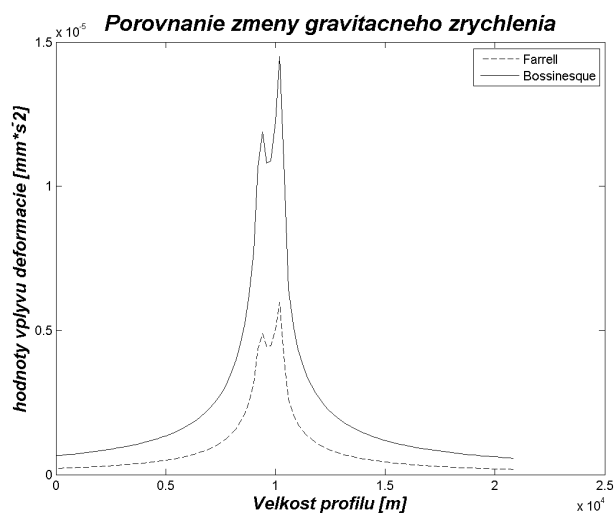
Práce bola venovaná metódam modelovania deformácií a ich vplyvu na zmeny vertikálneho či horizontálneho smeru polohy alebo zmeny gravitačného zrýchlenia apod. Je zrejmé, že tieto metódy predstavujú isté zjednodušenia (najmä po stránke spracovania), no výsledky predstavenej etapy poukazujú na tú skutočnosť, že s týmito metódami treba počítať. Pri nájdení lepšieho postupu spracovania (týka sa to najmä definovania výkopových lokalít, ich zamerania, či získania súradníc (najmä výškových) potrebné k spracovaniu) tak môžu poskytnúť kvalitné informácie pre ďalšie analýzy a postupy.



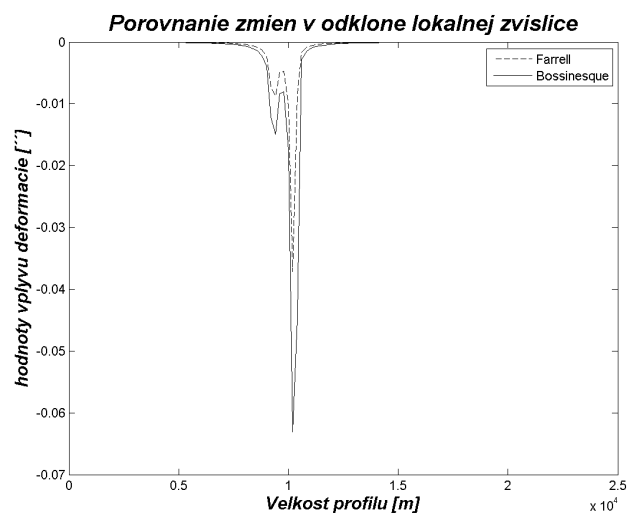
Obr. 3: Vplyv deformácie na vertikálny smer



Obr. 4: Vplyv deformácie na horizontálny smer



Obr. 5: Vplyv deformácie na gravitačné zrýchlenie



Obr. 6: Vplyv deformácie na zmenu v odklone lokálnej zvislice

Literatúra

- [1] Zeman, A.: *Approximate Solutions of the Surface Mass Loading of a Spherical Earth Model*. In: *Studia Geophysica et Geodaetica*, Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography, Zdiby, 1985, pp. 326 - 338.
- [2] Farrell, W., E.: *Deformation of the Earth by Surface Loads*. In: *Reviews of Geophysics and Space Physics*, National Oceanic and Atmospheric Administration, Boulder, Colorado 80302, 1972, pp. 761 - 797.
- [3] Ochaba, Š.: *Geofyzika. Základy fyziky Zeme a jej kozmického okolia*. SPN, Bratislava, 1986, str. 87, 90, 143-144.
- [4] Zeman, A.: *Fyzikální geodézie 10*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1998, str. 69.
- [5] Yancey, D., J.: *Analysis and Application of Coal Seam Seismic Waves for detection of Abandoned Mines*. Thesis for the degree of Master of Science, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2006, pp. 4 - 6.

Pod'akovanie

Práca vznikla za podpory Grantu SGS ČVUT 2010 r.č. OHK1-034/10.

Matematické modelování transportu neutronů

Milan Hanuš *

Abstrakt:

V příspěvku bude představen matematicko-fyzikální model transportu neutronů a oblasti jeho použití. Dále budou stručně zmíněny různé druhy aproximací, které umožňují dostatečně efektivní a zároveň pro konkrétní aplikace dostatečně přesné numerické zpracování. V průběhu přednášky budou také prezentovány výsledky několika počítačových simulací jaderných reaktorů.

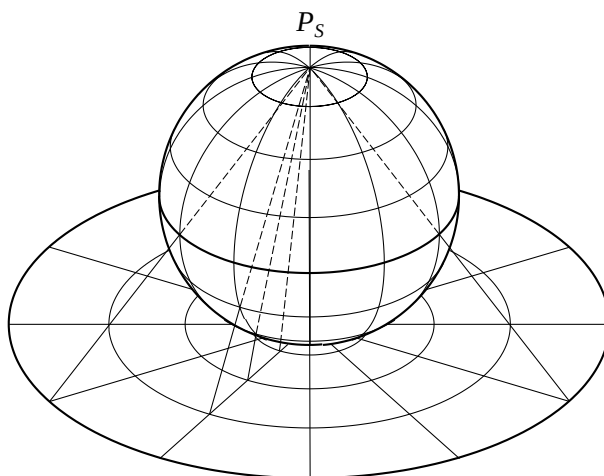
* Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
email: mhanus@kma.zcu.cz

REKONSTRUKCE ASTROLÁBU POMOCÍ STEREOGRAFICKÉ PROJEKCE

Václav Jára¹

1 Stereografická projekce a její vlastnosti

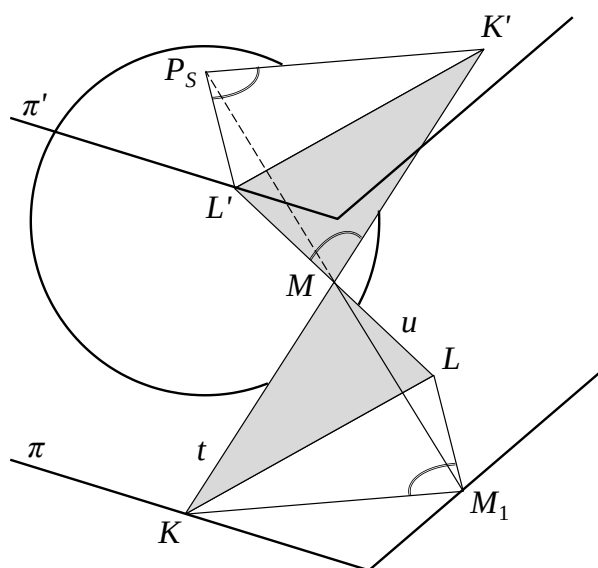
Stereografická projekce kulové plochy je středové promítání z bodu této kulové plochy do tečné roviny dotýkající se sféry v protějším bodě nebo roviny s ní rovnoběžné. Jestliže leží střed projekce v jednom z pólů sféry, mluvíme o azimutální projekci. V ní se rovnoběžky promítají jako soustředné kružnice a poledníky se promítají jako svazek polopřímek se středem ve společném středu rovnoběžkových kružnic (Obr. 1). Stereografická projekce je využívána zejména k zobrazování map polárních oblastí.



Obr. 1 – Kartografická síť

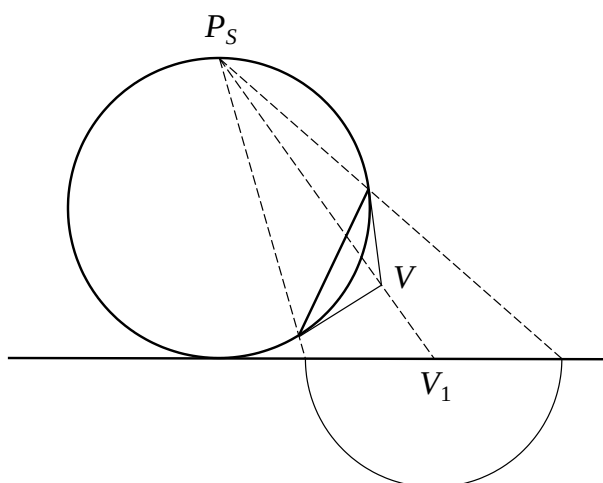
Mezi základní vlastnosti stereografické projekce patří konformita, tedy zachování velikosti úhlů, kde úhel dvou křivek na sféře je určen odchylkou tečen těchto křivek ve společném bodě. Pro ověření této vlastnosti zvolíme na sféře dvě křivky a v jejich společném bodě M sestrojíme jejich tečny t a u (Obr. 2). Tyto tečny společně s bodem M a středem promítání P_s (ležícím v našem případě v severním pólu) určují trojici rovin – tečnou rovinu sféry, a dvě promítací roviny, jež protínají průmětnu π a rovinu π' tečnou ke sféře v bodě P_s v rovnoběžných přímkách $KL' \parallel KL$, $P_sL' \parallel M_1L$ a $P_sK' \parallel M_1K$. Trojúhelníky $P_sK'L'$ a M_1KL jsou tedy podobné. Trojúhelníky $P_sK'L'$ a $M_1K'L'$ shodné, což plyne z rovnosti délek úseček $K'P_s$ a $K'M$ (úseky tečen z bodu K' ke sféře) a obdobně pro úsečky $L'P_s$ a $L'M$. Z toho vyplývá shodnost úhlů $\sphericalangle K'P_sL'$ a $\sphericalangle KM_1L$, a dále shodnost úhlů $\sphericalangle K'ML'$ a $\sphericalangle KM_1L$.

¹ Katedra matematiky, Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 2077/7, 166 29 Praha 6 – Dejvice, vaclav.jara@fsv.cvut.cz

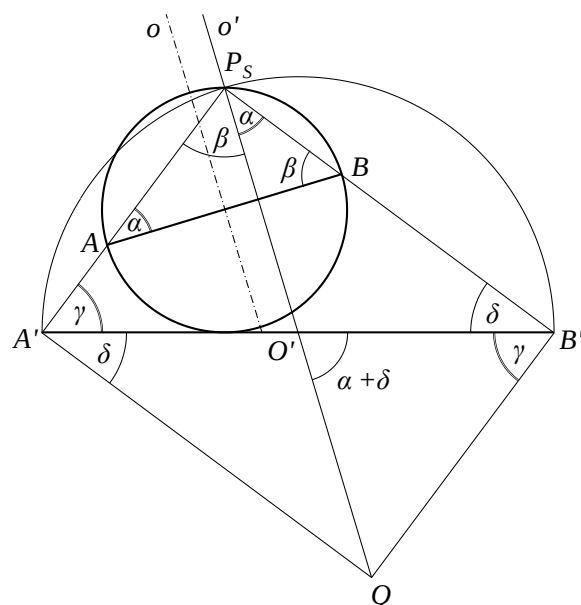


Obr. 2 – Konformita projekce

Dalším důležitým znakem stereografické projekce je zobrazení kružnice (neprocházející středem promítání) na kružnici. V kružnici, která není na sféře hlavní kružnicí, se sféry dotýká kuželová plocha (nárys na Obr. 3). Povrchové přímky tohoto kužele jsou kolmé na tečny zmíněné kružnice. Z konformity projekce plyne zachování tohoto pravého úhlu při promítání – obrazem kružnice je tedy kružnice se středem v bodě V_1 , jenž je průmětem vrcholu tečné kuželové plochy V . Je-li zobrazovaná kružnice hlavní kružnicí, dotýká se kulové plochy v této kružnici válcová plocha (nárys na Obr. 4). Průmětem průměru AB je úsečka $A'B'$. Středem P_s vedeme rovnoběžku o' s osou dotykové válcové plochy o . Její průsečík s úsečkou $A'B'$ označíme O' a dokážeme, že je jejím středem. Trojúhelníky ABP_s a $A'B'P_s$ jsou pravoúhlé, s pravým úhlem při vrcholu P_s . Označíme-li vnitřní úhly v těchto trojúhelnících, jak je znázorněno na Obr. 4 a doplníme-li trojúhelník $A'B'P_s$ na obdélník $A'QB'P_s$, bude platit $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \frac{\pi}{2}$. Z vlastností úhlů při vrcholu O' lze odvodit, že přímka P_sO' je úhlopříčkou obdélníka $A'QB'P_s$ a bod O' je středem průmětu hlavní kružnice, kterým je kružnice o poloměru $A'B'$



Obr. 3 – Obraz kružnice



Obr. 4 – Obráz hlavní kružnice

Souřadnice bodů na referenční sféře jsou udávány pomocí sférické šířky U a sférické délky V , které po řadě udávají odchylku průvodiče od roviny rovníku a roviny zvoleného poledníku. Poloměr stereografického průmětu rovnoběžky sféry o poloměru R lze pak psát ve tvaru

$$\rho = 2R \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2} \right).$$

Zajímavé je ve stereografické projekci také zobrazení loxodromy, tedy křivky, která protíná poledníky pod konstantním úhlem. Na sféře ji lze popsat rovnicí

$$V = \pm \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2} \right) + c,$$

kde znaménko určuje orientaci a konstanta c severojižní posun. Pro jednu z křivek položíme $c = 0$ a můžeme nahradit $\pm \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{a}$. Použitím inverzní funkce k logaritmu získáme vztah pro průvodič bodu na průmětu loxodromy

$$\rho = e^{aV} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2} \right), \quad U \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

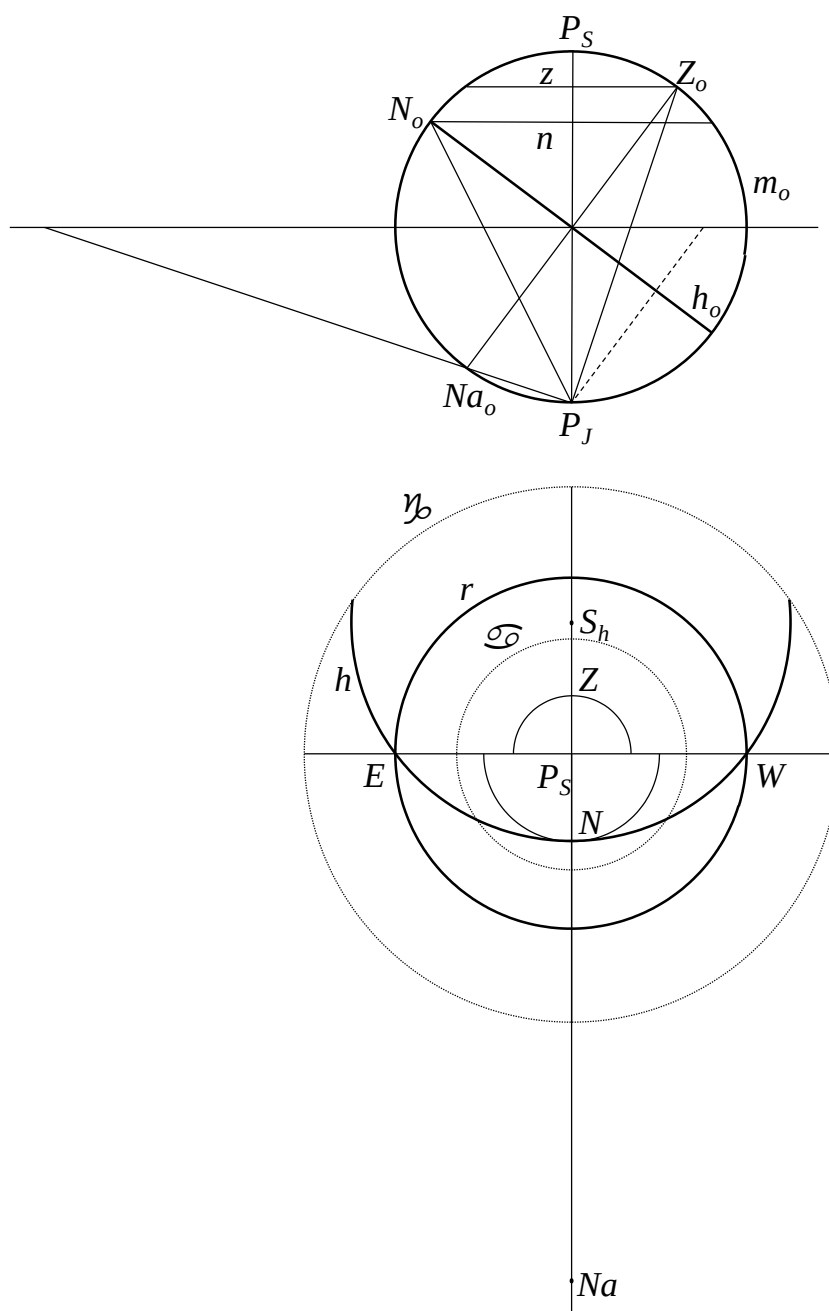
Stereografickým průmětem loxodromy je tedy logaritmická spirála $\rho = e^{aV}$, jejíž vlastností je, že průvodič jejího bodu má konstantní odchylku od tečny v tomto bodě.

2 Astroláb

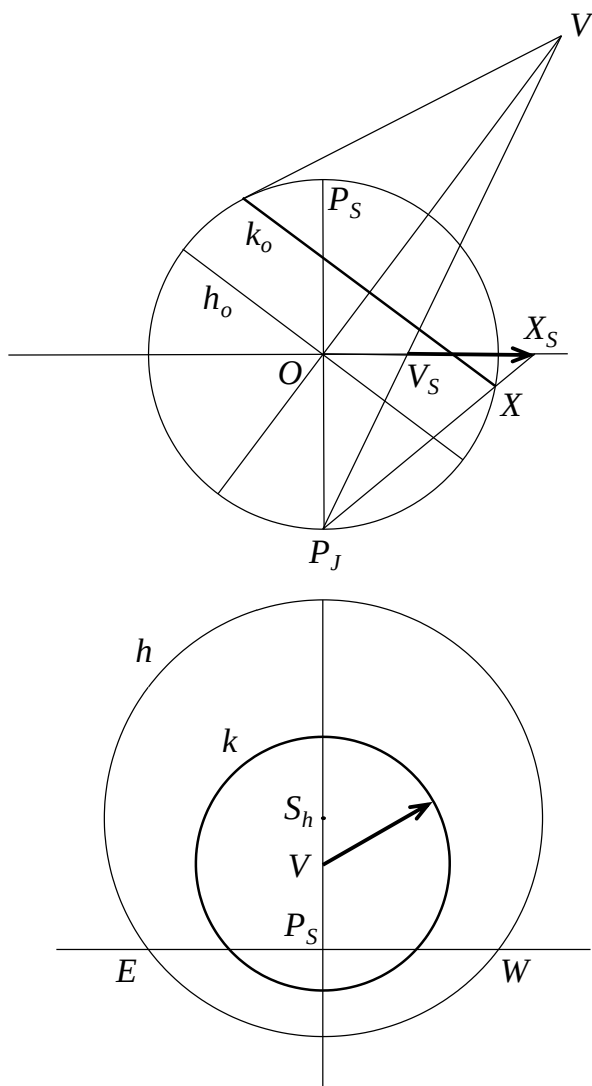
Astroláb, jehož pravděpodobným autorem je řecký astronom Hipparchos (180–125 př. n. l.) se skládá ze dvou důležitých částí – zad a kruhové matky. V našem zájmu bude právě kruhová matka, k jejíž konstrukci byla použita stereografická projekce.

Zemskou geodetickou síť poledníků a rovnoběžek promítneme na nebeskou sféru a její obraz poté sestrojíme ve stereografické projekci, pro niž volíme střed v jižním pólu a promítací rovinou bude rovina rovníku. Nejdříve takto sestrojíme rovník a oba obratníky. Konstrukci geodetické sítě provedeme pro pozorovatele umístěného v Praze. Jejímí póly jsou zenit Z a nadir Na , rovníkem pak horizont h , jenž protíná rovník ve východním (E) a západním (W) bodě. Další body zjistíme v otočení místního poledníku do m_o , severní bod leží na hvězdné rovnoběžce n a zenit na rovnoběžce z a zároveň na polední kružnici. Vše je zakresleno na Obr. 5.

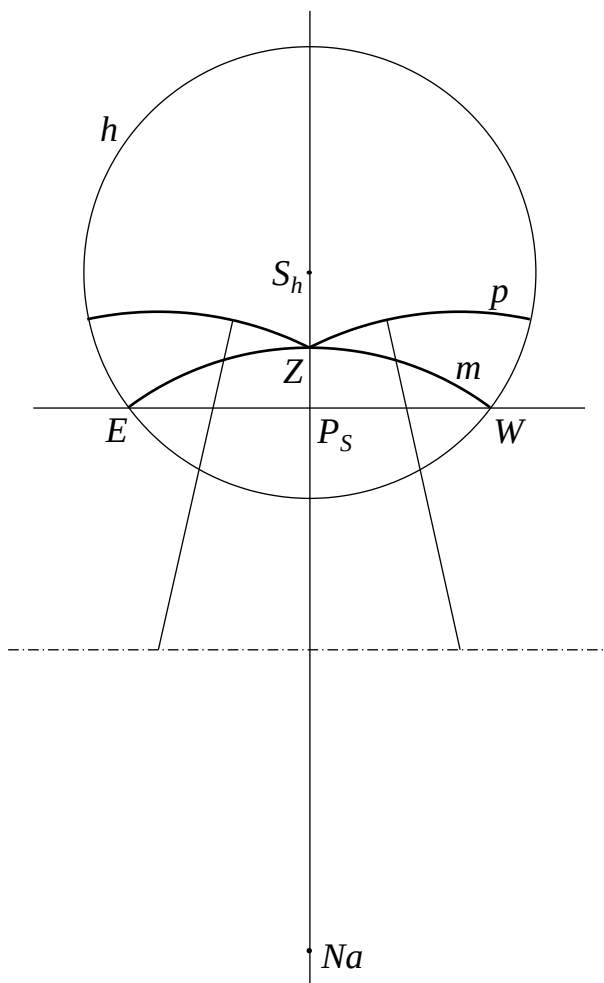
Obrazy rovnoběžek místní sítě zkonstruuujeme podle Obr. 6 – střed rovnoběžky V získáme promítnutím vrcholu tečného kužele, přičemž platí $|OV_S| = |P_S V|$. Poloměrem rovnoběžky je potom vzdálenost $|V_S X_S|$.



Obr. 5 – Geodetická síť vzhledem k pozorovateli



Obr. 6 – Konstrukce rovnoběžky místní sítě



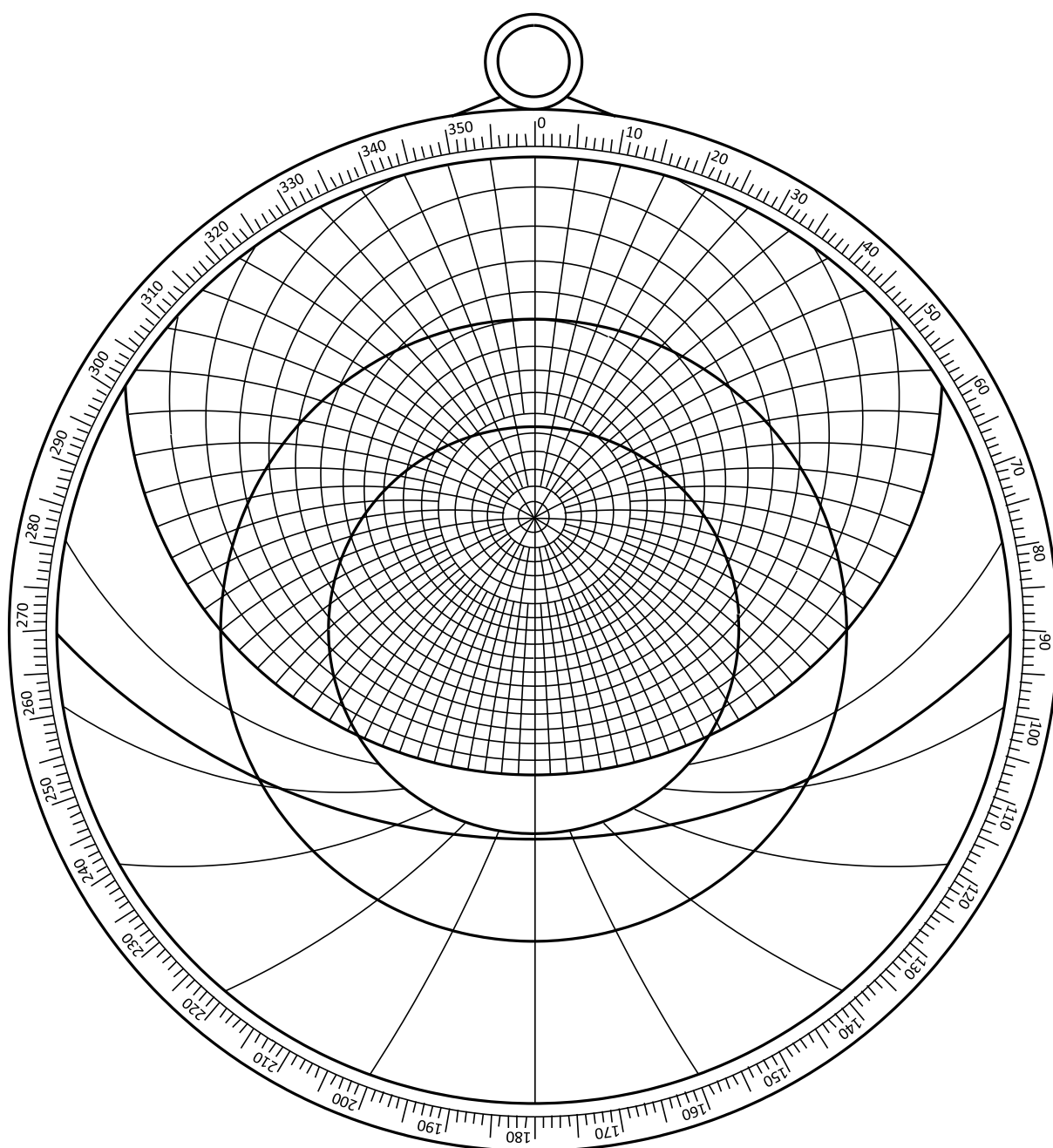
Obr. 7 – Konstrukce poledníku místní sítě

Poledníky procházejí současně zenitem Z a nadírem Na a musí zachovat kolmost k horizontu. Jejich obrazem jsou kružnicové oblouky, jejichž středy leží na ose úsečky ZNa (Obr. 7).

Celková konstrukce kruhové matky astrolábu je zobrazena na Obr. 8.

Literatura

- [1] Kočandrlová, M., Jára, V.: Stereografická projekce a astroláb, *Učitel matematiky*, ročník 18 č. 1, str. 1–13. JČMF, Praha, 2009.
- [2] Mikšovský, M.: *Kartografie pro 4. r. studijního oboru geodézie*. Praha, 1987.
- [3] Křišťan z Prachatic: *Stavba a užití astrolábu*. Academia, 2001.
- [4] Křížek, M., Šolc, J., Šolcová, A.: Pražský orloj a stereografická projekce, *MFI* 17 (2007), str. 129–139.



Obr. 8 – Kruhová matka astrolábu

FREDHOLMOVA ALTERNATIVA

Pavel Jirásek¹

ABSTRAKT. V tomto článku se snažíme shrnout dosavadní výsledky týkající se Fredholmovy alternativy (FA). Postupně zmíníme FA na prostorech konečné dimenze, FA pro kompaktní perturbaci identity, Fredholmovy operátory a FA pro uzavřený operátor. Zároveň ukážeme souvislosti mezi nimi. Tento článek shrnuje výsledky z diplomové práce [1].

1. ÚVOD

Fredholmova alternativa představuje analytický nástroj, který nám umožňuje určit nutné a postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení rovnic. Nepodává ale žádnou informaci o tom, jak toto řešení vypadá. Motivací ke zkoumání Fredholmovy alternativy je zobecnování následující dobře známé věty, která se týká soustavy lineárních algebraických rovnic.

Věta 1. *Pro danou matici $\mathbf{A}$ o rozměrech $m \times n$ platí právě jedna z následujících možností:*

- (1) *Bud' má rovnice $\mathbf{A}u = f$ řešení $u \in \mathbb{R}^n$ pro libovolnou pravou stranu $f \in \mathbb{R}^m$,*
- (2) *nebo existuje nenulové řešení rovnice $\mathbf{A}^T v = 0$. Potom má rovnice $\mathbf{A}u = f$ řešení právě tehdy, když platí $(f, v) = 0$, $\forall v : \mathbf{A}^T v = 0$.*

Matici $\mathbf{A}$ lze chápat jako operátor z prostoru $\mathbb{R}^n$ do prostoru $\mathbb{R}^m$. Tvzení předchozí věty potom můžete zapsat v kompaktní formě $R(\mathbf{A}) \oplus N(\mathbf{A}^T) = \mathbb{R}^m$, kde $R(\mathbf{A})$ je obor hodnot¹ a $N(\mathbf{A})$ je nulový prostor² operátoru $\mathbf{A}$. Má smysl se ptát, jaké vlastnosti musí mít operátor $\mathbf{A}$ definovaný na obecnějších prostorech, aby bylo platné tvrzení předchozí věty (nebo případně nějaké obdobné). V tomto článku se omezíme na Hilbertovy prostory, protože možnost pracovat se skalárním součinem nám výrazně usnadní situaci.

2. FREDHOLMOVA ALTERNATIVA V PROSTORECH KONEČNÉ DIMENZE

V případě, že uvažujeme operátor definovaný na prostoru, který má konečnou dimenzi, je situace poměrně jednoduchá. Tedy, nechť $A : X \rightarrow Y$, $\dim(X) < \infty$ je lineární operátor. Řešíme rovnici

$$Au = f.$$

Zvolíme báze prostorů X a $R(\mathbf{A})$ a rovnici přepíšeme do maticového tvaru

$$\mathbf{A}\hat{u} = \hat{f}.$$

¹Katedra matematiky, Západočeská univerzita, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň,
email: pjirasek@kma.zcu.cz

Key words and phrases. Fredholmova alternativa; Existence a jednoznačnost řešení.

¹ $\{y \in H : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$

² $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Nyní použijeme Fredholmovu alternativu pro matice zmíněnou v úvodu. Není složité ukázat, že pokud $\mathbf{A}$ je maticí operátoru A , potom $\mathbf{A}^T$ je maticí adjungovaného operátoru A^* v duální bázi. Platí tedy následující věta.

Věta 2. *Nechť $A : X \rightarrow Y$, $\dim(X) < \infty$ je lineární operátor. Nastává právě jeden z následujících případů.*

- (1) *Rovnice $Au = f$ má řešení pro libovolnou pravou stranu f .*
- (2) *Homogenní adjungovaná rovnice $A^*v = 0$ má nenulové řešení.*

3. FREDHOLMOVA ALTERNATIVA PRO KOMPAKTNÍ OPERÁTOR

V této kapitole popíšeme první pokus, jak zobecnit FA pro operátory na prosterech, které nemají konečnou dimenzi. V tomto případě již samotná linearita operátoru tvrzení typu FA nezaručuje. Nejprve tedy budeme uvažovat, že operátor A je kompaktní perturbace identity.

Dříve než samotnou FA dokážeme klíčové pomocné tvrzení.

Lemma 1. *Nechť $A : D(A) \rightarrow H$, kde H je Hilbertův prostor, je lineární operátor definovaný na husté podmnožině prostoru H . Potom platí*

$$H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*).$$

Důkaz. $N(A^*)$ je uzavřený, lineární podprostor prostoru H , proto stačí dokázat, že platí rovnost $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$. Nejdříve ukážeme, že $R(A)^\perp = N(A^*)$.

Nechť $x \in R(A)^\perp$, potom platí

$$0 = (Ay, x) = (y, 0) \quad \forall y \in D(A).$$

A z definice adjungovaného operátoru plyne, že $x \in D(A^*)$ a $A^*x = 0$, tedy $x \in N(A^*)$ a $R(A)^\perp \subset N(A^*)$.

Nechť $x \in N(A^*)$, potom platí

$$0 = (y, A^*x) = (Ay, x) \quad \forall y \in D(A).$$

Tedy $x \in R(A)^\perp$ a $N(A^*) \subset R(A)^\perp$.

Ukázali jsme, že $N(A^*) = R(A)^\perp$. Přejdeme-li k ortogonálním doplňkům dostáváme $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$. $\square$

Abychom dokázali Fredholmovu alternativu potřebujeme dokázat následující rozklad.

$$H = R(A) \oplus N(A^*).$$

Potřebujeme tedy ještě dokázat uzavřenost oboru hodnot operátoru A . A to, že tato vlastnost platí pro kompaktní perturbaci identity, plyne z vlastností spektra kompaktních, samoadjungovaných operátorů. Následuje tedy FA tak, jak je známá z klasických učebnic funkcionální analýzy, např. [3].

Věta 3. *Nechť C je kompaktní, samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H .*

- (1) *K tomu, aby rovnice $(C - \lambda I)u = f$ měla pro $\lambda \neq 0$ řešení pro každou pravou stranu $f \in H$, je nutné a stačí, aby rovnice $(C - \bar{\lambda}I)v = 0$ měla pouze triviální řešení (tj. aby λ nebylo vlastní číslo operátoru C). Řešení rovnice $(C - \lambda I)u = f$ je pak určeno jednoznačně.*

- (2) Je-li $\lambda \neq 0$ vlastní číslo operátoru C , je rovnice $(C - \lambda I)u = f$ řešitelná právě tehdy, když její pravá strana f je ortogonální ke všem řešením rovnice $(C - \bar{\lambda}I)v = 0$.

V následujících kapitolách ukážeme, že předpoklad samoadjungovanosti operátoru C není klíčový a je možné ho odstranit.

4. FREDHOLMOVY OPERÁTORY

V této kapitole vyzkoušíme jiný přístup k našemu problému. Místo toho abychom hledali vlastnosti operátoru, které jsou postačující ke splnění FA, zdefinujeme operátor, který FA splňuje, a charakterizujeme ho.

Definice. Omezený, lineární operátor $A : H \rightarrow H$, kde H je Hilbertův prostor, nazveme **Fredholmův**, právě když

$$\dim N(A) = \dim N(A^*) := n < \infty$$

a

$$R(A) = \overline{R(A)}, \quad R(A^*) = \overline{R(A^*)}.$$

První vlastnost nám pomůže operátory dobře charakterizovat. Díky druhé vlastnosti Fredholmovy operátory splňují FA.

Ve článku [5] bylo dokázáno, že operátor A je Fredholmův **právě tehdy, když** existují izomorfismus B^3 a operátor F , jehož obor hodnot je prostor konečné dimenze⁴, takové, že platí rovnost

$$A = B + F.$$

Přestože tento výsledek je velice hezký a srozumitelný, je požadavek na konečnost dimenze nulových prostorů operátorů A a A^* poněkud umělý. Později ukážeme, že charakterizace operátorů, které splňují FA, uvedená v následující kapitole je obecnější a tento požadavek si neklade.

5. FREDHOLMOVA ALTERNATIVA PRO UZAVŘENÝ OPERÁTOR

Výsledky v této kapitole byly motivovány snahou zobecnit FA pro operátory, které nejsou spojitě. Připomeňme si lemma 1, které po operátoru požaduje pouze linearitu a hustý definiční obor. Opět potřebujeme najít třídu takových operátorů, které mají uzavřený obor hodnot.

Věta 4. *Nechť $A : D(A) \rightarrow H$, kde H je Hilbertův prostor, je uzavřený operátor definovaný na husté podmnožině prostoru H a existuje konstanta $c > 0$, pro kterou platí*

$$\|Ax\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in D(A) \cap N(A)^\perp. \quad (1)$$

Potom je $R(A)$ uzavřená množina, tedy $\overline{R(A)} = R(A)$.

Důkaz. Nulový prostor uzavřeného operátoru A je uzavřený podprostor prostoru H . Proto platí

$$H = N(A) \oplus N(A)^\perp.$$

³Nechť X a Y jsou Banachovy prostory. Lineární, omezený operátor $A : X \rightarrow Y$ nazveme izomorfismem, pokud $R(A) = Y$ a $N(A) = \{0\}$

⁴ $\dim(R(A)) < \infty$

Nechť $\{x_n\} \subset D(A)$ je taková posloupnost, pro kterou platí $Ax_n = y_n \rightarrow y$. Prvky x_n můžeme psát ve tvaru

$$x_n = u_n + v_n, \quad \text{kde } u_n \in N(A)^\perp \quad \text{a} \quad v_n \in N(A).$$

Platí tedy $Ax_n = Au_n = y_n$ a

$$\|y_n - y_m\| = \|Au_n - Au_m\| = \|A(u_n - u_m)\| \geq c\|u_n - u_m\|.$$

Dokázali jsme, že posloupnost $\{u_n\}$ je Cauchyovská v prostoru H , a tedy konverguje k nějakému prvku u . Z uzavřenosti operátoru A plyne, že $u \in D(A)$ a $Au = y$. $\square$

Důsledek. Pro operátor A splňující předpoklady předchozí věty platí FA. Tedy

$$N(A^*) \oplus R(A) = H. \quad (2)$$

6. SOUVISLOSTI

Víme tedy, že na prostorech nekonečné dimenze platí FA pro následující tři typy operátorů

- kompaktní perturbace identity
- Fredholmovy operátory
- uzavřené operátory, které splňují nerovnost 1

V této kapitole ukážeme, že libovolná kompaktní perturbace identity je Fredholmův operátor. Ukážeme také, že každý lineární, spojitý operátor, pro který platí Fredholmova alternativa⁵, splňuje nerovnost 1.

Uvažujme lineární, kompaktní operátor $C : H \rightarrow H$, kde H je Hilbertův prostor a dokažme, že $C - \lambda I$, kde λ je nenulové komplexní číslo a I je identita na prostoru H , je Fredholmův operátor. Ukážeme, že operátor $C - \lambda I$ lze zapsat ve tvaru $B + F$, kde B je izomorfismus a F je operátor konečného řádu.

Na Hilbertově prostoru platí, že pro každý kompaktní operátor (C) existuje posloupnost operátorů konečného řádu ($\{F_n\}_{n=1}^\infty$), která k němu konverguje⁶ (např. [4] Proposition 2.2.6). Vybereme z této posloupnosti takový operátor F , aby platilo

$$\|C - F\| < |\lambda|. \quad (3)$$

Označme $E = C - F$. Protože operátory C a F jsou lineární, je lineární i operátor E . Platí tedy

$$C - \lambda I = F + E - \lambda I.$$

Zbývá tedy dokázat, že $E - \lambda I$ je izomorfismus. Nedříve ukažme, že $N(E - \lambda I)$ obsahuje pouze nulový prvek. Předpokládejme, že existuje prvek $u_0 \neq 0$, pro který platí

$$(E - \lambda I)u_0 = 0.$$

Z linearitě $(E - \lambda I)$ plyne, že tuto rovnici řeší i prvek $\tilde{u}_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}$. Platí $\|\tilde{u}_0\| = 1$ a

$$\|(A - F)\tilde{u}_0\| = \|E\tilde{u}_0\| = \|\lambda\tilde{u}_0\| = |\lambda|\|\tilde{u}_0\| = |\lambda|.$$

To je ale spor s (3). $N(E - \lambda I)$ tedy obsahuje pouze nulový prvek.

⁵Tím je myšleno, že pro něj platí rozklad prostoru 2.

⁶Myšlena konvergence vůči standardní operátorové normě $\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\|$

Ještě je třeba ukázat, že $R(E - \lambda I) = H$. Pro libovolný (daný) prvek $v \in H$ musíme najít prvek $u \in H$, pro který platí

$$\begin{aligned}(E - \lambda I)u &= v, \\ Eu - \lambda u &= v, \\ \lambda u &= Eu - v, \\ u &= \frac{Eu - v}{\lambda}.\end{aligned}\tag{4}$$

Označme $K(u) = \frac{Eu - v}{\lambda}$. Pro libovolné dva prvky $u_1, u_2 \in H$ platí

$$\begin{aligned}\|Ku_1 - Ku_2\| &= \left\| \frac{Eu_1 - v}{\lambda} - \frac{Eu_2 - v}{\lambda} \right\| = \left\| \frac{Eu_1 - Eu_2}{\lambda} \right\| = \\ &= \left\| \frac{E(u_1 - u_2)}{\lambda} \right\| \leq \frac{\|E\|}{|\lambda|} \|u_1 - u_2\|.\end{aligned}$$

Protože $\frac{\|E\|}{|\lambda|} < 1$ ⁷, je K kontrahující operátor a rovnice (4) má podle Banachovy věty o kontrakci (např. [2], str. 86) právě jedno řešení pro libovolný prvek v . Tím jsme dokázali, že $E - \lambda I$ je izomorfismus, a tedy $C - \lambda I$ je Fredholmův operátor.

Fakt, že každý lineární, spojitý operátor, pro který platí Fredholmova alternativa, splňuje nerovnost 1 plyne z následujícího důsledku věty o otevřeném zobrazení.

Věta 5. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $A \in L(X, Y)$ ⁸ je prostý. Potom je množina $R(A)$ uzavřená právě tehdy, když existuje konstanta $c > 0$ taková, že platí*

$$\|Ax\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Otevřenou otázkou zůstává následující problém.

Věta 6. *Nechť $A : D(A) \rightarrow H$, kde H je Hilbertův prostor, je lineární, uzavřený operátor a $\overline{D(A)} = H$. Jsou následující dvě vlastnosti jsou ekvivalentní?*

- (1) $\|Ax\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in D(A) \cap N(A)^\perp$
- (2) $N(A^*) \oplus R(A) = H$.

Víme, že pokud bychom zaměnili slovo **uzavřený** slovem **spojitý**, byly by tvrzení ekvivalentní⁹. Pokud ale uvažujeme pouze uzavřené operátory, víme, že z tvrzení (1) plyne tvrzení (2). Bohužel opačnou implikaci se nám ještě nepodařilo dokázat nebo vyvrátit.

⁷Díky (3).

⁸ $L(X, Y)$ je množina všech lineárních, spojitých operátorů z prostoru X do prostoru Y .

⁹To je důsledkem předchozí věty.

REFERENCE

- [1] P. Jirásek: Fredholmova Alternativa (2009)
- [2] A. Kufner, P. Drábek: Úvod do funkcionální analýzy (1993)
- [3] A. Kufner, P. Drábek: Funkcionální analýza (1994)
- [4] P. Drábek, J. Milota: Basic Facts from Linear Analysis (2005)
- [5] A. G. Ramm: A Simple Proof of the Fredholm Alternative and a Characterization of the Fredholm Operators (2001)

Určení odrazného bodu bistatické altimetrie na ploše referenčního elipsoidu

Stanislav Olivík *

Abstrakt:

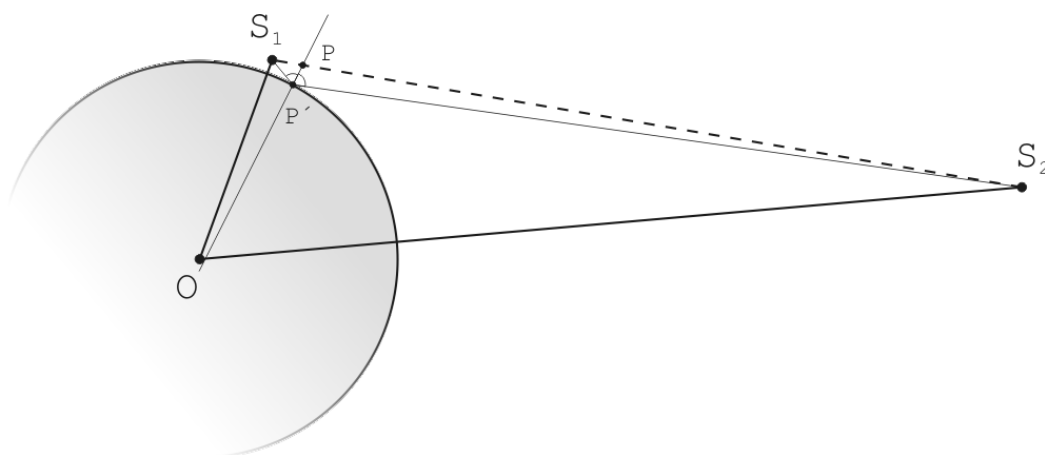
V příspěvku budou představeny dva různé postupy pro určení odrazného bodu bistatické altimetrie na ploše referenčního elipsoidu WGS-84. Postupy se liší podle toho, kolik je k dispozici vstupních informací. Pro úplný soubor vstupních informací hledáme odrazný bod jako průnik tří kvadrik. Pokud máme k dispozici jen minimum vstupních informací, využijeme k hledání bodu zákon odrazu.

1. Satelitní altimetrie

Satelitní altimetrie je metoda určování tvaru geoidu v oblastech moří a oceánů, kde se měří výška družicového nosiče nad vodní hladinou pomocí radarového, případně laserového výškoměru. Vysílač i přijímač jsou na jedné družici. Ze známé polohy družice a vypočítané délky dráhy signálu se určí poloha a nadmořská výška bodu, kde se signál odrazil.

2. Princip bistatické altimetrie

Bistatická altimetrie využívá dvě družice. Jako vysílač je využita družice systému GPS NAVSTAR, jako přijímač pak družice na nízké oběžné dráze (NOD), která zachycuje signál odražený od povrchu Země.



Obr.1: Schematické znázornění poloh družic a referenčního elipsoidu a přibližné polohy odrazného bodu.

Všechny dále zmíněné postupy výpočtu odrazného bodu využívají následující zjednodušení:

- zanedbání vlivu fyzikálních jevů na dráhu signálu
- odrazný bod leží na povrchu referenčního elipsoidu, dochází k ideálnímu odrazu
- družice jsou v okamžiku vyslání i přijetí signálu v klidu (nepohybují se)

* Katedra matematiky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6
email: olivik@mat.fsv.cvut.cz

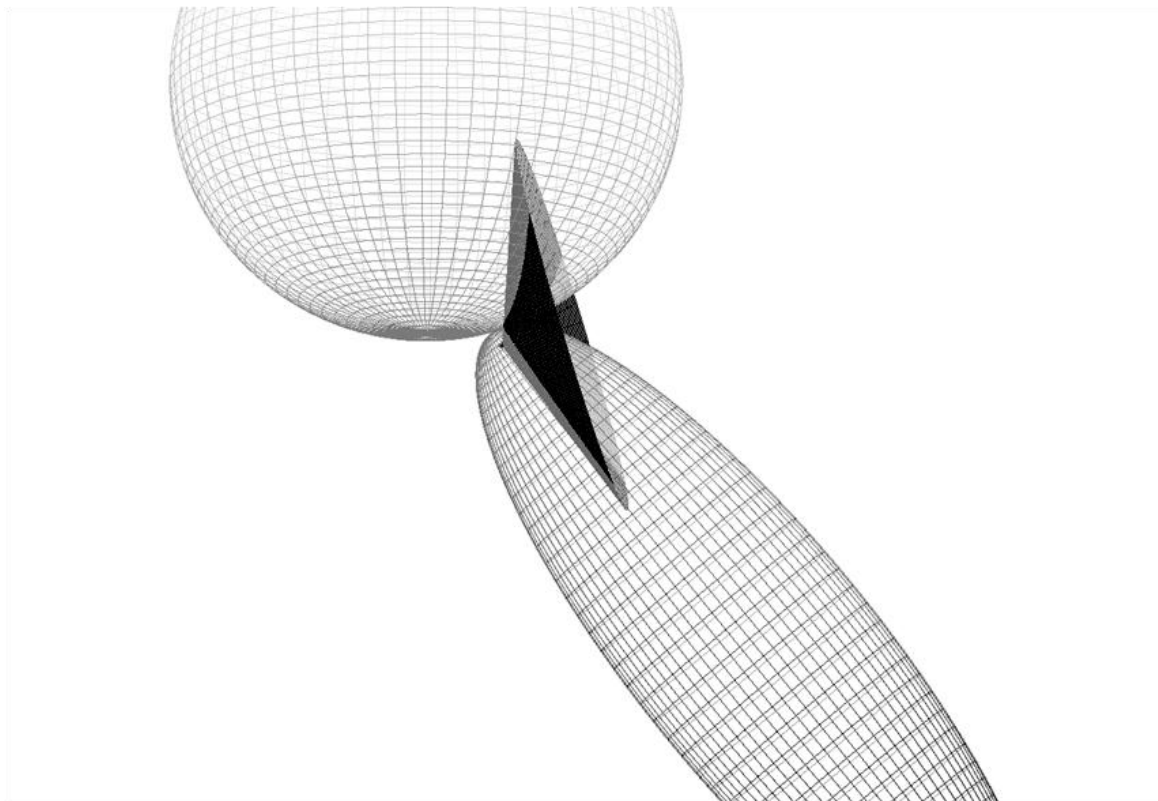
3. Průnik tří kvadrik

Vstupní data, která máme k dispozici jsou následující:

- parametry referenčního elipsoidu
- poloha družice GPS (S_2)
- poloha přijímací družice (S_1)
- vektor rychlosti přijímací družice ($\mathbf{u}$)
- úhel svírající dopadající odražený signál s vektorem rychlosti přijímací družice (θ)
- délka dráhy signálu ($2d$)

V tomto případě hledáme odrazný bod jako průnik tří kvadrik – dvou rotačních elipsoidů a kužele:

- referenční elipsoid WGS-84
- rotační elipsoid daný polohou družic a délkou odraženého signálu
- rotační kuželová plocha určená vektorem rychlosti přijímací družice a úhlem mezi tímto vektorem a směrem přijatého signálu



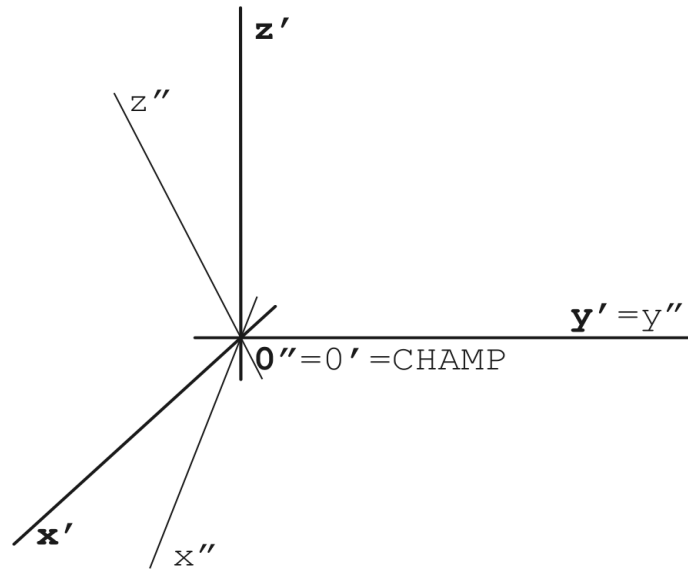
Obr.2: Rotační elipsoidy a kuželová plocha spočítané ze vstupních dat.

Hledání odrazného bodu probíhá v několika krocích:

- průnik elipsoidu odrazných bodů s kuželovou plochou
- testování bodů na průnikové křivce

Pokud bod na průnikové křivce leží na referenčním elipsoidu, výpočet končí. Pokud ne, vybereme další bod na průnikové křivce.

Pro snazší výpočty zavedeme lokální souřadnicové soustavy.



Obr.3: Schematické zobrazení lokálních souřadnicových systémů pro elipsoid odrazných bodů a kuželovou plochu.

Počátek obou lokálních souřadnic je v přijímací družici. Osy jsou pak zvoleny následovně:

- x' – směr spojnice družic S_1S_2
- y' – kolmá k ose x' a směru vektoru rychlosti družice S_1
- z' – určená tak, aby byl souřadnicový systém kladně orientovaný
- x'' – směr vektoru rychlosti družice S_1
- y'' – kolmá k S_1S_2 a ose x''
- z'' – určená tak, aby byl souřadnicový systém kladně orientovaný

Pro body na kuželové ploše pak platí vztahy

$$\begin{aligned} x'' &= r \\ y'' &= r \tan \vartheta \cos \omega \\ z'' &= r \tan \vartheta \sin \omega \end{aligned} \quad (1)$$

kde ϑ je úhel mezi vektorem rychlosti družice S_1 a přijatým signálem.

Pro přímkou na kuželové ploše, na které leží bod K_i , platí vztahy

$$\begin{aligned} x' &= tu \\ y' &= tv \\ z' &= tw \end{aligned} \quad (2)$$

kde u, v, w jsou souřadnice bodu K_i .

Po dosazení vztahů (2) do rovnice elipsoidu odrazných bodů

$$\frac{(x' - x'_F)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

získáme kvadratickou rovnici pro parametr t .

Jejím řešením získáme vztah

$$t_{1,2} = \frac{2ux'_F b^2 \pm \sqrt{(-2ux'_F b^2)^2 - 4((u^2 b^2 + v^2 b^2 + w^2 a^2)(b^2 x'_F - a^2 b^2))}}{2(u^2 b^2 + v^2 b^2 + w^2 a^2)} \quad (4)$$

Pro kladný parametr t získáme průsečík kuželové plochy a elipsoidu odrazných bodů.

Postup hledání odrazného bodu je pak následující:

- i. vybereme kružnici na kuželové ploše
- ii. kružnici rozdělíme na kvadranty
- iii. body, které dělí kružnici na kvadranty, vedeme přímkou z vrcholu kuželové plochy
- iv. vypočteme průsečík přímky s elipsoidem odrazných bodů
- v. pokud průsečík leží na referenčním elipsoidu, ukončíme výpočet, jinak pokračujeme
- vi. vybereme dva průsečíky, které jsou nejbližší referenčnímu elipsoidu (nejbližší ve smyslu součtu vzdáleností bodu od ohnisek referenčního elipsoidu)
- vii. výsek kružnice ohraničený těmito body rozdělíme na půlku a opakujeme proces od bodu iii
- viii. pokud nenalezneme průsečík, který leží na referenčním elipsoidu, ukončíme výpočet, pokud jsou dva následné vypočítané body od sebe blíže než 0,01 m.

Pro následující vstupní data

$$S_1 = [1704270,88; 1037760,88; -6532029,78] \text{ m}$$

$$S_2 = [13438722,08; 7201125,22; -21772472,43] \text{ m}$$

$$2d = 21068077,73 \text{ m}$$

$$a = 6378137 \text{ m};$$

$$b = 6356752,314 \text{ m}$$

$$\mathbf{u} = (7.32877; 0.73153; 2,02837)$$

$$\vartheta = 69,33^\circ$$

jsme vypočetli dva odrazné body

$$P_1 = [1750477,7; 1048847,0; -6022001,7] \text{ m}$$

$$P_2 = [1752534,7; 1026022,2; -6025343,2] \text{ m}$$

Dva body jsme vypočítali díky tomu, že jsou elipsoidy do sebe vnořené.

Rozdíly úhlů dopadu a odrazu v těchto bodech jsou

$$\Delta\alpha_1 = 2^\circ 20' 08''$$

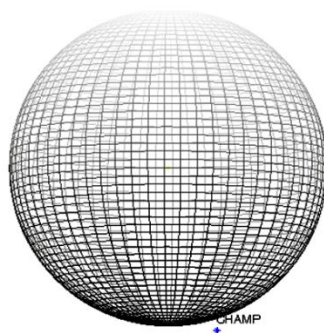
$$\Delta\alpha_2 = 1^\circ 21' 30''$$

4. Jeden (referenční) elipsoid

Výsledky výše popsaného modelu bistatické altimetrie jsou silně závislé na přesnosti vstupních dat, jak dokazují i dva vypočtené odrazné body. Zkoušeli jsme tedy nalézt postup pro minimalistický soubor vstupních dat a přidali jsme podmínku splnění zákona odrazu.

Vstupními daty jsou zde pouze:

- parametry referenčního elipsoidu
- poloha družice GPS (S2)
- poloha přijímací družice (S1)



GPS

Obr.4: Elipsoid WGS-84 a vysílací a přijímací družice.

Pro výpočet odrazného bodu vyjdeme z následujících faktů

- družice S_1 , S_2 a odrazný bod P' leží v rovině
- úsečku S_2P' tvoří dráha vyslaného signálu
- úsečku S_1P' tvoří dráha odraženého signálu
- odraz signálu se řídí zákonem odrazu
- kolmice dopadu tvoří normála elipsoidu v bodě P'
- kolmice dopadu a dopadající paprsek tvoří rovinu, odražený paprsek leží v této rovině
- normála v bodě P' leží v rovině tvořené S_1 , S_2 a P' .

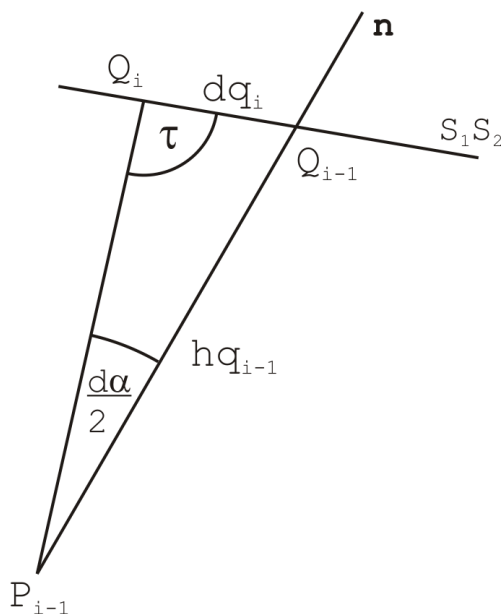
Postup výpočtu odrazného bodu je následující:

- vybereme bod Q_1 na úsečce S_1S_2 pomocí vztahu $Q_1 = S_1 + \frac{h_1}{h_2}(S_2 - S_1)$, kde h_1 a h_2 jsou výšky S_1 a S_2 nad referenčním elipsoidem
- bod Q_1 kolmo promítneme na povrch elipsoidu, čímž získáme bod P_1
- vypočteme úhly $S_2P_1Q_1$ a $S_1P_1Q_1$
- pokud je rozdíl úhlů menší než $1 \cdot 10^{-9}$ rad, prohlásíme vypočtený bod za odrazný bod
- pokud ne, zvolíme bod Q_i pomocí vztahu $Q_i = S_1 + q_i(S_2 - S_1)$

pro body Q_i vypočteme q_i podle vztahu $q_i = q_{i-1} \pm dq_i$, kde $dq_i = \frac{hq_{i-1} \cdot \sin \frac{d\alpha}{2}}{|\sin \tau|}$,

kde hq_{i-1} je výška bodu Q_{i-1} nad elipsoidem, $d\alpha$ je rozdíl úhlů dopadu a odrazu, τ je úhel mezi úsečkami S_1S_2 a $P_{i-1}Q_i$ (viz. Obr.5)

- vi. vypočteme úhly $S_2P_iQ_i$ a $S_1P_iQ_i$
- vii. pokud je rozdíl úhlů menší než $1 \cdot 10^{-9}$ rad, prohlásíme vypočtený bod za odrazný bod
- viii. pokud ne, pokračujeme od bodu v.



Obr.5: Výpočet bodů Q_i na úsečce S_1S_2 .

Body Q_{i+1} promítneme na povrch elipsoidu pomocí převodu geocentrických kartézských souřadnic do geodetických zeměpisných souřadnic. Vyjdeme ze vztahů

$$\begin{aligned} X &= N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= N(1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Výsledné vztahy pak jsou

$$\begin{aligned} N &= \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{Z^2 e^2}{a^2 - 2a^2 e^2 + a^2 e^4 + Z^2 e^2}}} \\ \varphi &= \arcsin \frac{Z}{N(1 - e^2)} \\ \lambda &= \arcsin \frac{Y}{N \cos \varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

Pro následující vstupní data

$$S_1 = [1704270,88; 1037760,88; -6532029,78] \text{ m}$$

$$S_2 = [13438722,08; 7201125,22; -21772472,43] \text{ m}$$

$$a = 6378137 \text{ m};$$

$$b = 6356752,314 \text{ m}$$

jsme vypočetli odrazný bod

$$P' = [1735271,845; 1036118,116; -6029484,018] \text{ m}$$

$$\varphi = -71^\circ 34' 58,378'' ; \lambda = 30^\circ 50' 28,018''$$

Výpočet proběhl v 9 krocích při rozdílu úhlů $-5,82 \cdot 10^{-10}$ rad.

5. Shrnutí

V příspěvku byly představeny dva postupy pro nalezení odrazného bodu bistatické altimetrie na povrchu referenčního elipsoidu. Každý z nich vznikl pro jiný soubor vstupních dat, proto není možno je mezi sebou porovnávat.

I přesto je možno říci, že rozdíly v polohách vypočtených odrazných bodů mezi prvním postupem (průnik tří kvadrik) a postupem pro minimalistický soubor vstupních dat (jeden (referenční) elipsoid) jsou dány absencí tří vstupních dat ve druhém případě. Těmito daty jsou vektor rychlosti přijímací družice, úhel svírající dopadající odražený signál s vektorem rychlosti přijímací družice a délka dráhy odraženého signálu. Především úhel svírající dopadající odražený signál s vektorem rychlosti přijímací družice, který určený jen s přesností na $0,01^\circ$ vnáší do celého výpočtu značnou nejistotu.

Poděkování

Práce byla podpořena grantem SGS ČVUT 2010 OHK1-062/10, Matematické modelování vybraných úloh ve stavebnictví.

Literatura

- [1] Baranová M.: *Multimediální texty k předmětu Matematická kartografie 1* [online],
- [2] Teichmann J.: *GPS Altimetrie Bistatická GPS altimetrie projektu CHAMP, semestrální práce z předmětu Geodynamika*, Technische Universität Dresden, Institut fuer Planetare Geodesie, 2000
- [3] Kočandrlová, M.: *Geometrický model úlohy GPS-altimetrie*, Sborník 27. konference VŠTEZ, JČMF, 2002, str. 110-113
- [4] Wagner, C., Klokočník, J.: *Reflection Altimetry for oceanography and geodesy, presented at 2001: An Ocean Odyssey*, IAPSO-IABO Symp.: Gravity, Geoid and Ocean Circulation as Inferred from Altimetry, Mar del Plata, Argentina
- [5] Olivík, S.: *Odrazný bod GPS altimetrie na ploše elipsoidu*, Sborník Semináře aplikované matematiky, Praha, 2005
- [6] Olivík, S.: *Odrazný bod bistatické altimetrie na ploše elipsoidu*, Sborník Semináře Matematika na vysokých školách (Determinismus a chaos), pobočka JČMF v Praze a ČVUT v Praze, 2005, ISBN 80-01-03269-8, str. 155-156
- [7] Martin-Neira, M.: *A passive reflectometry system: Application to ocean altimetry*, ESA Journal 17, 1993, str. 331-356

Model pro pohyb vozidel poblíž řízené křižovatky založený na Dysonově termodynamickém plynu

Oleg Pasteliak *

Abstrakt

Dysonův termodynamický plyn je jednou z možností, jak simulovat dopravní tok vozidel. Dysonův plyn je představován částicemi umístěnými na přímce nebo kružnici. V průběhu času částice navzájem interagují a mění svoje pozice tak, aby se snížila celková potenciální energie plynu. Vývoj Dysonova plynu při určité teplotě se dá simulovat pomocí Metropolisova algoritmu, který je založen na metodě Monte Carlo. Částice, ze kterých sestává plyn, se dají popsat pomocí určitých statistických charakteristik, např. hustota pravděpodobnosti pro vzdálenost a číselný rozptyl. Tím lze kontrolovat funkčnost konkrétní implementace Metropolisova algoritmu, protože jsou známy analytické předpovědi těchto charakteristik. Zvolením správného potenciálu (způsob, jakým mezi sebou interagují částice) a teploty lze docílit toho, že se částice plynu budou chovat stejně jako vozidla na silnici.

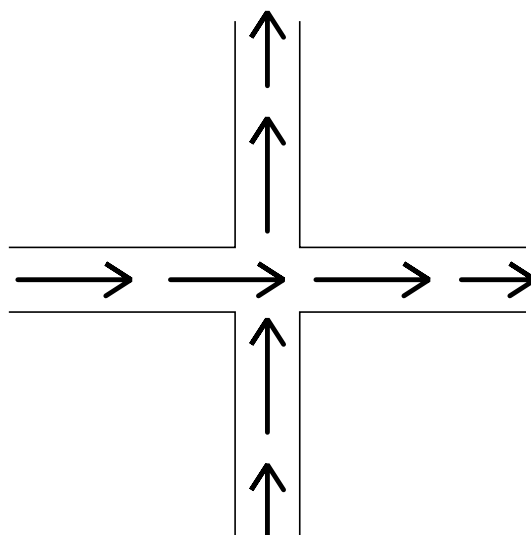
1 Dopravní tok

V širším slova smyslu dopravní tok představuje všechny věci, které se účastní dopravního procesu. Dopravní tok se skládá ze dvou hlavních typů komponent:

- Mobilní - vozidla s řidiči a chodci
- Nemobilní - silnice, semaforey, dopravní značky

Mezi jednotlivými komponentami dopravního toku probíhají neustálé interakce: řidiči reagují na jiná vozidla tak, aby se s nimi nesrazili, snaží se zůstat v mezích silnice, (někteří) se dívají na dopravní značky a semaforey. Naším konečným cílem je vytvořit matematický model, který bude popisovat interakce mezi jednotlivými součástmi dopravního toku. Takový model umožní simulaci dopravní sítě ještě před jejím postavením. Díky tomu bude možné postavit optimální silniční síť, na které se bude vyskytovat minimum dopravních zácp. Naším nejbližším cílem je vytvořit model jednoduché izolované dopravní křižovatky, na které se budou křížit dvě jednosměrné ulice (viz obrázek (1)).

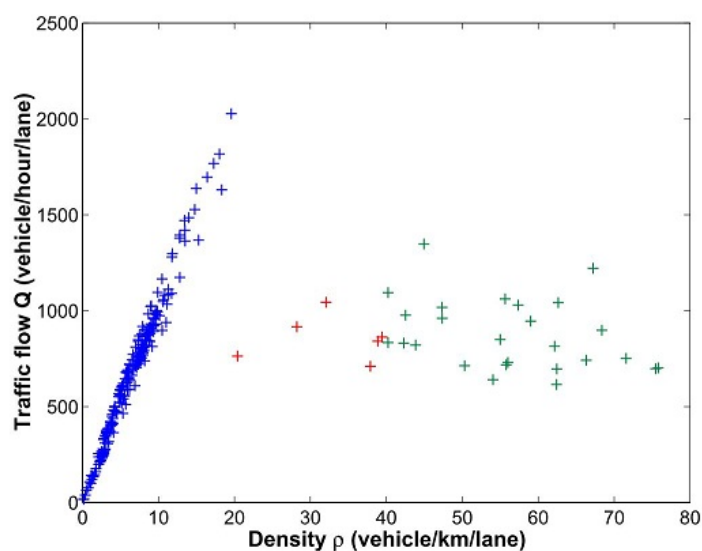
*Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze, Katedra softwarového inženýrství v ekonomii, Skupina aplikované matematiky a stochastiky při katedře matematiky, gibernator@gmail.com



Obrázek 1: Jednoduchá dopravní křižovatka

1.1 Fundamentální diagram a dopravní režimy

V užším slova smyslu se dopravním tokem myslí počet vozidel, která projedou určitým místem za určitý čas. *Fundamentální diagram* je velmi důležitý pojem v teorii dopravního toku. Tento diagram znázorňuje závislost dopravního toku na hustotě vozidel. Jak je vidět z obrázku (2), dopravní tok roste lineárně s hustotou jen do určité míry, při velké hustotě vozidel nám dopravní tok naopak klesne. Proč tomu tak je, si vysvětlíme v následujícím povídání o dopravních režimech.



Obrázek 2: Fundamentální diagram

Existují tři dopravní režimy:

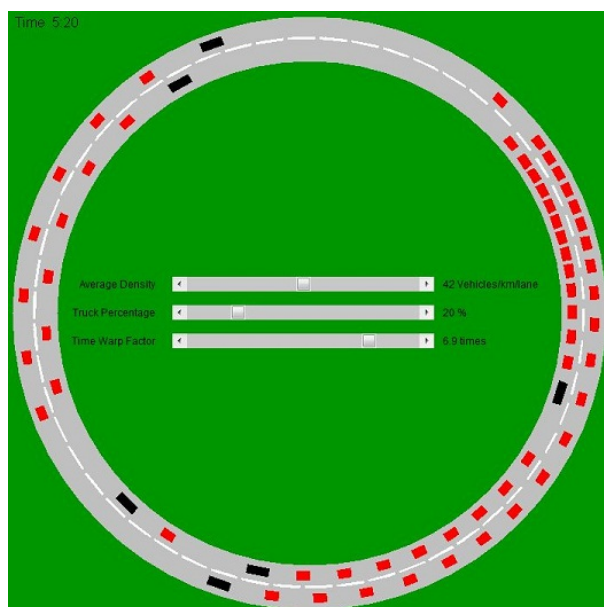
- Volný režim dopravy - hustota 0-20 vozidel na kilometr. Při tomto dopravním režimu dopravní tok roste lineárně s hustotou vozidel. Vozidel je na silnici málo a proto interakce

mezi nimi jsou minimální, proto při zvyšování hustoty dochází i ke zvyšování dopravního toku. Řidič se totiž nemusí ohlížet na ostatní vozidla, ale jede svou optimální rychlostí.

- Synchronizovaný dopravní režim - hustota 20-80 vozidel/km. V tomto režimu už jsou interakce mezi vozidly znatelné a řidiči musí svou jízdu přizpůsobit ostatním vozidlům. Čím větší je hustota provozu, tím pomaleji auta jedou, aby byla jízda bezpečná. Proto dochází ke snížení dopravního toku.
- Stop-and-go režim - od 80 vozidel/km. Tento režim je známý jako dopravní zácpa. Hustota provozu je natolik velká, že kvůli bezpečnosti provozu musí řidiči občas zastavit.

1.2 Dopravní zácpa

Dopravní zácpa vzniká v případě, že hustota vozidel překročí kapacitu silnice. Zácpa může vzniknout i bez zjevné příčiny jako je semafor nebo zúžení silnice. Na stránce www.traffic-simulation.de lze spustit simulaci dopravy a vidět, že zácpa může vzniknout např. na kružnici (viz obrázek (3)).



Obrázek 3: Dopravní zácpa na kružnici

2 Dysonův coulombický plyn

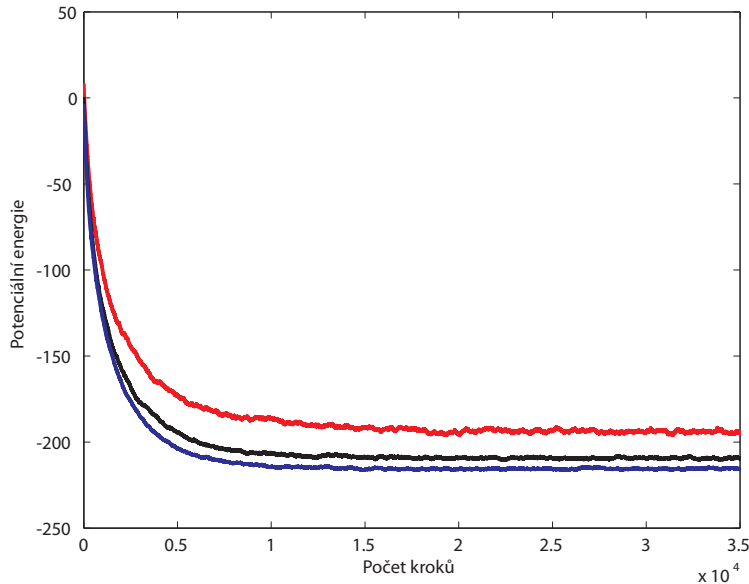
Kruhová varianta Dysonova plynu je reprezentována N bodovými částicemi s úhlovými souřadnicemi $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N < 2\pi$, které se mohou volně pohybovat na jednotkové kružnici. Pro tuto variantu Dysonova plynu je potenciální energie dána následujícím vzorcem:

$$V \equiv V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |e^{i\varphi_i} - e^{i\varphi_j}|, \quad (1)$$

kde argument logaritmu představuje eukleidovskou vzdálenost mezi i -tou a j -tou částicí. Pro tuto variantu Dysonova plynu sestavíme numerický počítačový model.

2.1 Metropolisův algoritmus

Metropolisův algoritmus slouží pro simulaci jednorozměrných statistických plynů s libovolnou potenciální energií $V = V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ pomocí metody Monte Carlo. Tyto simulace pak mohou být použity pro zkoumání mikroskopické struktury vybraných plynů. Simulace vývoje



Obrázek 4: Vývoj potenciální energie Dysonova coulombického plynu po 35000 krocích Metropolisova algoritmu. Je zde ukázán vývoj potenciální energie pro inverzní teplotu $\beta = 1$ (horní čára), $\beta = 2$ (prostřední čára) a $\beta = 3$ (spodní čára). Pro každou inverzní teplotu proběhlo 40 simulací Dysonova plynu o 100 částicích. Po proběhnutí všech 40 simulací byla pro každý krok vypočtena střední hodnota potenciální energie plynu ze všech 40 simulací.

plynu začíná s libovolnými (ovšem různými) počátečními úhlovými souřadnicemi částic na kružnici $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$. Vývoj stavu plynu probíhá po jednotlivých krocích. Každý krok obsahuje tyto úkony:

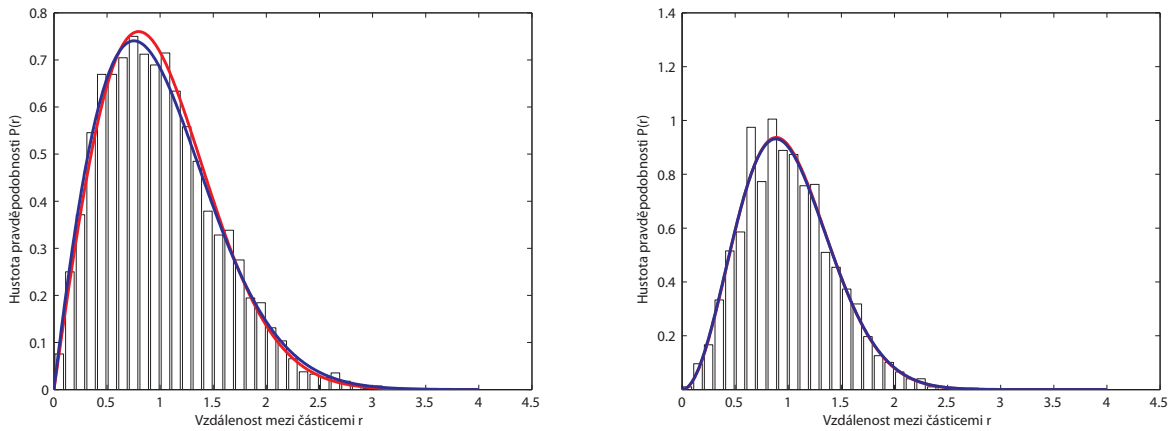
- spočítáme potenciální energii $V = V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ pomocí vzorce (1)
- náhodně vybereme i -tou částici, kde $i \in \{1, 2, \dots, N\}$
- vygenerujeme náhodné číslo ε_i rovnoměrně rozdělené v intervalu $\langle -\varepsilon; \varepsilon \rangle$, kde $\varepsilon = \frac{2\pi}{N}$
- vypočítáme novou pozici i -té částice $\varphi'_i = \varphi_i + \varepsilon_i$. Kvůli logaritmickým výrazům ve V nesmí částice měnit své pořadí. Proto musí platit: $\varphi_{i-1} < \varphi'_i < \varphi_{i+1}$
- vypočítáme novou potenciální energii $V' = V'(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi'_i, \dots, \varphi_N)$. Jestliže $V' \leq V$, pozice i -té částice se změní na novou. Pokud ovšem $V' > V$, pak porovnáme Boltzmannův faktor $q \equiv e^{\beta(V-V')} < 1$ s dalším náhodným číslem, rovnoměrně rozděleným v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Jestliže platí $q > p$, pak se pozice i -té částice také změní. V opačném případě systém zůstává beze změny.

Po určitém počtu kroků tohoto algoritmu se plyn dostane do stavu tepelné rovnováhy, což je vidět na obrázku (4). Tento algoritmus byl naprogramován a testován v prostředí MATLAB.

2.2 Statistické charakteristiky Dysonova plynu

Mikroskopickou strukturu Dysonova plynu budeme zkoumat pomocí dvou statistických charakteristik: hustota pravděpodobnosti pro vzdálenost a číselný rozptyl. Strukturu budeme zkoumat za tepelné rovnováhy plynu. Tyto charakteristiky mají mnoho společného se stejnými charakteristikami vlastních čísel náhodných matic. Díky tomu máme teoretické předpovědi, pomocí kterých můžeme testovat správnost našeho algoritmu.

2.2.1 Hustota pravděpodobnosti pro vzdálenost



Obrázek 5: Hustota pravděpodobnosti pro vzdálenost Dysonova coulombického plynu pro $\beta = 1, 2$. Proběhlo celkem 40 simulací Dysonova plynu s $N = 100$ částicemi. V každé simulaci proběhlo 15000 kroků. Histogram popisuje rozdělení vzájemných vzdáleností mezi částicemi. Křivky představují předpověď hustoty pravděpodobnosti pro odstupy vlastních čísel podle Wignerových předpokladů (3) a podle vzorce odvozeného Felixem Izrailevem (5)

Tato veličina představuje hustotu pravděpodobnosti toho, že vzdálenost mezi dvěma sousedními částicemi Dysonova plynu leží v intervalu $\langle r; r + dr \rangle$. Hustota pravděpodobnosti pro vzdálenost je vyšetřována s doplňujícím požadavkem

$$\langle r \rangle \equiv \int_0^{\infty} r P(r) dr = 1, \quad (2)$$

což znamená, že přenastavíme střední hodnotu vzdáleností mezi částicemi na hodnotu rovnou jedné. Z teorie náhodných matic víme, že pro inverzní teploty $\beta = 1, 2$ jsou hustoty dány následujícími vzorci:

$$P_1(r) \approx \frac{\pi}{2} r e^{-\frac{\pi}{4} r^2} \quad (3)$$

$$P_2(r) \approx \frac{32}{\pi^2} r^2 e^{-\frac{4}{\pi} r^2} \quad (4)$$

Tato rozdělení se nazývají Wignerovými předpoklady. Pro obecné β a pro vzdálenosti částic v celém rozsahu $0 \leq r < \infty$ lze hustota pravděpodobnosti pro vzdálenost aproximovat přesněji pomocí fenomenologického vztahu, který byl publikován Felixem Izrailevem a lze ho vyčíslit např. v [1]:

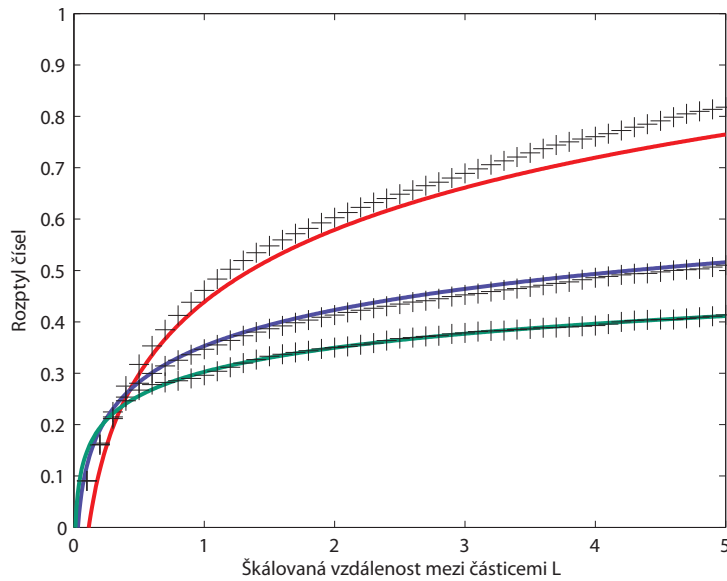
$$P_\beta(r) = A_\beta \left(\frac{\pi r}{2}\right)^\beta e^{-\frac{\beta\pi^2}{16}r^2 - (B_\beta - \frac{\beta\pi}{4})r}, \quad (5)$$

kde konstanty A_β a B_β závisí na β a jejich hodnoty určíme z podmínky normalizace

$$\int_0^\infty P_\beta(r) dr = 1 \quad (6)$$

a ze škálovací podmínky $\langle r \rangle = 1$. Pro $\beta = 1$ a $\beta = 2$ dostaneme křivky, které se nepatrně liší od předpovědi pro hustotu pravděpodobnosti pomocí Wignerových předpokladů. Na obrázku (5) je vidět, že náš algoritmus produkuje správné výsledky.

2.2.2 Číselný rozptyl



Obrázek 6: Číselný rozptyl Dysonova coulombického plynu. Horní, prostřední a spodní křivky představují předpověď číselného rozptylu podle vzorce (8) pro inverzní teploty $\beta = 1, 2, 3$. Křížky představují číselný rozptyl prezentovaného numerického modelu Dysonova plynu pro citované inverzní teploty β .

Čitlivější míra, která měří korelaci mezi seškálovanými částicemi, je *číselný rozptyl*, který je definován takto:

$$\Delta(L) = \langle [n(L) - \langle n(L) \rangle]^2 \rangle. \quad (7)$$

Číselný rozptyl popisuje statistiku n po sobě jdoucích částic. V tomto vzorci $n(L)$ značí počet částic ležících v intervalu délky L . Vzhledem k tomu, že zkoumáme seškálované částice, platí,

že $\langle n(L) \rangle = L$. Číselný rozptyl v souvislosti s náhodnými maticemi byl numericky vyšetřován v [2] a je popsán přibližným vzorcem:

$$\Delta_\beta(L) \approx \frac{2}{\beta\pi^2} \ln(L) - 0.1237 \ln(\beta) + 0.4386, \quad (8)$$

který platí pro $L \gg 1$ a $\beta \gtrsim \frac{1}{2}$. Pro β blízké nule se logaritmický tvar číselného rozptylu mění a konverguje k přímce. Na obrázku (6) snadno nahlédneme, že i podle číselného rozptylu náš algoritmus funguje správně.

2.3 Dysonův plyn s krátkodosahovým logaritmickým potenciálem

Dává celkem smysl, že v reálném dopravním provozu řidiči reagují hlavně na vozidla kolem sebe. Dysonův plyn proto upravíme tak, aby i částice interagovaly jen se svými sousedy. Toho dosáhneme změnou potenciálu následujícím způsobem:

$$V = - \sum_{i=1}^N \ln |\varphi_{i+1} - \varphi_i|, \quad (9)$$

kde $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$ opět představují úhlové souřadnice částic plynu na kružnici. Pro průběh simulace Dysonova plynu s krátkodosahovým potenciálem budeme opět používat Metropolisův algoritmus. Jediné, co je potřeba změnit, je právě potenciál. Stejně jako v případě dlouhodosahového Dysonova plynu, byly i zde provedeny testy správného fungování algoritmu pomocí srovnání teoretických předpovědí hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost a číselného rozptylu s naměřenými hodnotami. Z důvodu nedostatku místa to zde nebudeme podrobně rozepisovat, ale nedůvěřivý čtenář se může přesvědčit v bakalářské práci [3].

3 Dopravní model

Algoritmus pro simulaci termodynamického plynu byl tedy odladěn a testován na potenciálech uvedených v předchozí kapitole. Teď lze plyn modifikovat a přiblížit se tak modelování reálného dopravního toku.

3.1 Dysonův plyn s krátkodosahovým mocninným potenciálem

Bylo ukázáno, že reálný dopravní tok se nedá modelovat pomocí plynu s logaritmickým potenciálem (i když podle tohoto modelu funguje např. autobusová doprava v mexických městech). Mnohem vhodnější je krátkodosahový mocninný potenciál, který vypadá takto:

$$V \equiv V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\varphi_i - \varphi_{i-1}|^\alpha}, \quad (10)$$

kde $\alpha > 0$ je parametr a $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$ (pro změnu) představují úhlové souřadnice částic plynu na kružnici. Jak plyne z dizertační práce [2], chování částic tohoto plynu pro $\alpha = 1$ velmi dobře odpovídá dopravnímu provozu na skutečných silnicích.

3.2 Dopravní data

Data, se kterými budeme pracovat, představují vzdálenosti mezi jednotlivými auty od nárazníku k nárazníku. Tato data se v technické literatuře označují jako Red light data. Celkem máme k dispozici 5022 vzdáleností mezi za sebou stojícími auty. Naším nejbližším cílem je vytvořit takový model Dysonova plynu s dopravním potenciálem, který bude generovat data se stejnými statistickými charakteristikami, jako mají data naměřená v reálném provozu.

3.2.1 Měření dopravních dat

Dopravní data, která máme k dispozici, byla naměřena studenty FJFI ČVUT v průběhu letního semestru akademického roku 2006/2007 na různých místech v Praze. Spolu s kolegy Petrem Fialou a Jiřím Švarcem jsem měřil vzdálenosti mezi vozidly v ulici Žitné před světelně řízenou křižovatkou se Sokolskou. V průběhu jednoho odpoledne jsme fotografovali vozidla stojící na červenou ze čtvrtého patra budovy na výše uvedené křižovatce. Ulice má v tomto místě 4 jízdní pruhy a ve špičce je zaručen dostatek aut. Výsledkem této činnosti byly fotografie vozidel z ptáčího pohledu, což bylo velmi vhodné pro měření vzdáleností (skoro žádné zkreslení). Vlastní měření vzdáleností mezi vozidly poté bylo provedeno v programu Corel PhotoPaint. Další data byla naměřena jinými studenty FJFI na různých místech v Praze. Způsoby měření dat se také lišily (vyskytovalo se i pobíhání mezi auty a ruční měření).

3.3 Generování vzdáleností mezi vozidly pomocí simulace Dysonova plynu

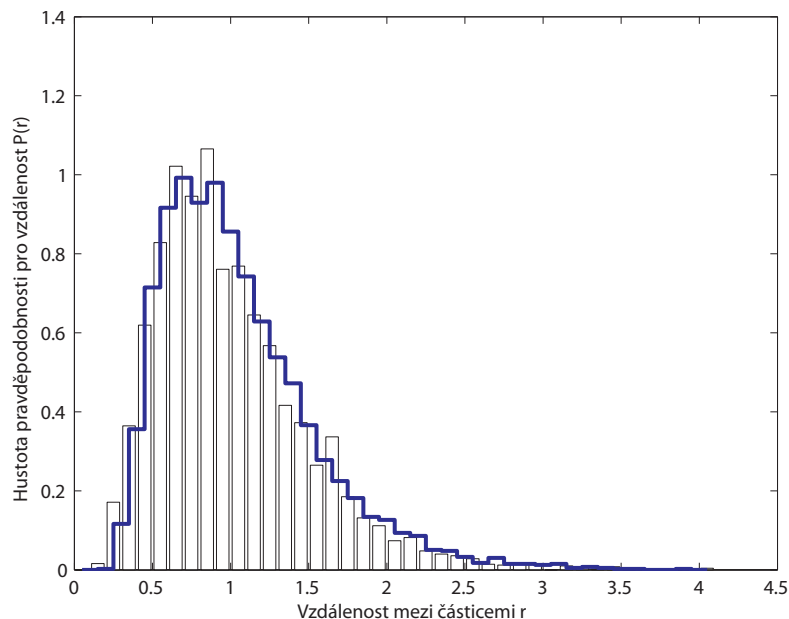
Necháme proběhnout určitý počet simulací Dysonova plynu s dopravním potenciálem (pro stejnou inverzní teplotu β a počet částic) tak, aby se plyn dostal do tepelné rovnováhy. Tím získáme vzdálenosti mezi částicemi plynu. Vzdálenost mezi prvními dvěma auty získáme pomocí aritmetického průměru ze vzdáleností mezi prvními dvěma částicemi ve všech proběhnutých simulacích. Stejným způsobem získáme ostatní vzdálenosti. Proběhnutí jedné simulace totiž nezaručuje dostatečný počet dat pro statistickou analýzu. Proto je nutné nechat simulaci proběhnout vícekrát a získat tak dostatečné množství dat, u kterých lze zjišťovat hustotu pravděpodobnosti, popř. číselný rozptyl $\Delta(L)$. Stejný postup byl použit i při testování Dysonova coulombického plynu s dlouhodosahovým a krátkodosahovým potenciálem.

3.4 Nalezení nejlepší inverzní teploty

Zbývá nám jedna veličina, se kterou můžeme variovat, a to je inverzní teplota plynu β . Naším úkolem tedy je zvolit takovou teplotu plynu, aby po dosažení tepelné rovnováhy vzdálenosti mezi částicemi plynu měly stejné statistické charakteristiky jako vzdálenosti mezi auty v reálném světě. Podle hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost reálným datům nejlépe odpovídá inverzní teplota $\beta = 1.42$. Podle rozptylu čísel reálným datům nejlépe odpovídá inverzní teplota $\beta = 1.46$.

3.4.1 Která inverzní teplota je správná?

Jak je vidět, dostali jsme dvě nepatrně odlišné nejlépe odpovídající inverzní teploty: jednu ze srovnání hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost: $\beta = 1.42$ a druhou ze srovnání číselného



Obrázek 7: Porovnání hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost reálných dat a dat vygenerovaných simulací Dysonova plynu pro inverzní teplotu $\beta = 1.42$. Histogram představuje hustotu pravděpodobnosti pro vzdálenost zjištěnou z reálných dopravních dat, zatímco křivka zobrazuje stejnou charakteristiku pro vzdálenosti vygenerované Metropolisovým algoritmem. Pro numericky získaná data je vykreslena křivka místo obdélníků proto, aby obě charakteristiky bylo možné porovnat.

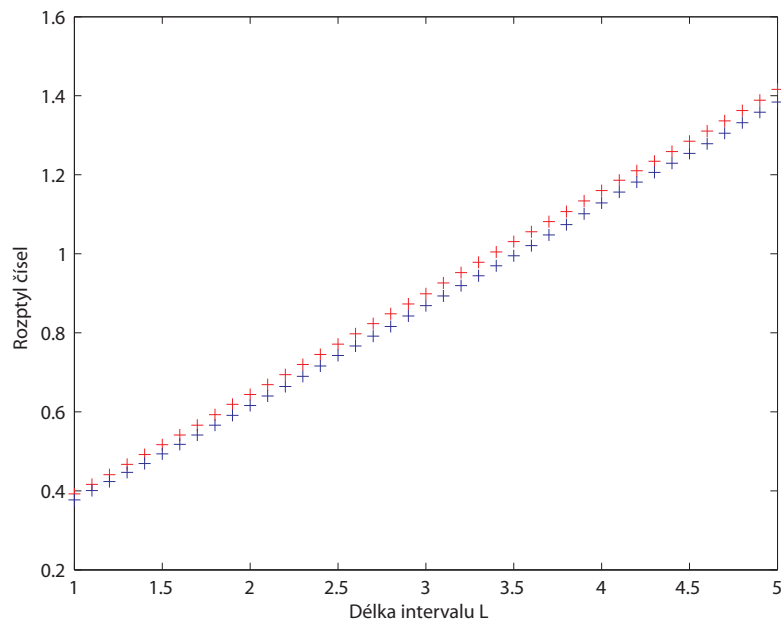
rozptylu $\beta = 1.546$. Přesnost výpočtu je v obou případech 0.01. Při výběru právě jedné inverzní teploty bych se přiklonil spíše k výsledku vycházejícímu z číselného rozptylu. Důvod je ten, že hustota pravděpodobnosti pro vzdálenost zkoumá vztah jen dvou sousedních částic plynu na kružnici, zatímco rozptyl čísel zkoumá všechny částice na daném intervalu. Rozptyl čísel má tedy větší vypovídací schopnost.

3.5 Model generující stavy na křižovatce

Pro generování vzdáleností použijeme Dysonův termodynamický plyn na kružnici délky N (počet částic) s dopravním potenciálem (viz vzorec (10)) a inverzní teplotou $\beta = 1.46$. Necháme proběhnout určitý počet simulací Dysonova plynu pomocí Metropolisova algoritmu s takovým počtem kroků, aby plyn dospěl do tepelné rovnováhy. Zjistíme vzdálenosti mezi částicemi pro všechny proběhnuté simulace a spočítáme střední hodnotu ze všech prvních vzdáleností, druhých vzdáleností, atd. Tím získáme N vzdáleností, které nám budou reprezentovat zkoumaný stav vozidel na křižovatce.

4 Závěr

Máme k dispozici model, který generuje vzdálenosti mezi auty se stejnými charakteristikami jako v reálném provozu na křižovatce. Je to dobrý základ pro další činnost. Tento model je



Obrázek 8: Porovnání rozptylu čísel reálných dat a dat vygenerovaných simulací Dysonova plynu pro inverzní teplotu $\beta = 1.46$. Horní křížky představují rozptyl čísel reálných vzdáleností, zatímco spodní ukazují rozptyl čísel vzdáleností vygenerovaných Metropolisovým algoritmem.

třeba dále rozvíjet, aby skutečně simuloval celou křižovátku. Práce se tedy dál bude ubírat tímto směrem: diskretizace modelu, změny potenciálů (interakce tří a více sousedních částic), nasazení více kružnic a zefektivnění běhu algoritmu. Veškré podrobnosti ohledně tvorby tohoto modelu, které se nevešly do článku, lze najít v bakalářské práci [3].

Reference

- [1] SHARF, R., IZRAILEV, F. *Dyson's Coulomb gas on a circle and intermediate eigenvalue statistics*. J. Phys. A: Math. Gen. 23. 1990, s. 963-977.
- [2] KRBÁLEK, Milan. *Traffic systems - particle gases in thermal equilibrium (Random Matrix Theory approach)*. Praha: ČVUT. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská. Katedra matematiky, 2003. 88 s. Dizertační práce.
- [3] PASTELIAK, Oleg. *Modelování dopravního proudu v blízkosti řízené křižovatky*. Praha: ČVUT. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská. Katedra Softwarového inženýrství v ekonomii, 2009. Bakalářská práce.

Duální kvaterniony a jejich aplikace

Jitka Prošková*

Abstrakt: Příspěvek je zaměřen na kvaterniony, duální kvaterniony a jejich schopnost popsat přímé shodnosti. Výhodou je jednoduchost reprezentace rotace a translace v jedné prostorové operaci tj. jejich složení. Využívají se například tam, kde klasický maticový přístup naráží na své specifické problémy. Dále budou zmíněny některé vhodné aplikace duálních kvaternionů (robotika, počítačová grafika, kybernetika).

1 Úvod

Práce je zaměřena na vyjádření rotace a posunutí duálními kvaterniony. Zavedený jednotkový kvaternion je využíván k popisu rotace. Dále jsou popsána duální čísla, která vznikla rozšířením reálných čísel duální jednotkou. Kvaterniony a duální čísla jsou využívány k zavedení duálních kvaternionů. Analogicky zavedený jednotkový duální kvaternion se používá k popisu přímé shodnosti ve speciální euklidovské grupě. Další část práce je věnovaná použití duálních kvaternionů v praxi.

2 Kvaterniony

Kvaterniony jsou zobecněním komplexních čísel v trojrozměrném prostoru. U zrodu kvaternionů stál Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Nalezl vztah pro násobení čtyř základních jednotek, pro něž platí $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Přišel na to, že je zapotřebí zavést jednu reálnou a tři imaginární složky, aby byla správně vytvořena algebra kvaternionů. Nyní zavedeme některé důležité pojmy.

Definice 2.1 *Nechť $i^2 = k^2 = j^2 = ijk = -1$, $ij = k$ a $ji = -k$. Kvaternion q můžeme napsat jako:*

$$\begin{aligned} q &= [a, \mathbf{v}], \quad a \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \\ &= [a, (b, c, d)], \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ &= a + i b + j c + k d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definice 2.2 *Množinu všech kvaternionů budeme značit $\mathbb{H}$.*

*Katedra matematiky, ZČU v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, jproskov@kma.zcu.cz

Definice 2.3 Necht $q \in \mathbb{H}$. Pak $\bar{q} = \overline{[a, \mathbf{v}]} = [a, -\mathbf{v}]$ nazýváme **konjugovaným kvaternionem** s kvaternionem q .

Definice 2.4 Necht $q \in \mathbb{H}$, $q = [a, \mathbf{v}] = [a, (b, c, d)]$. **Norma** $\|q\|$ kvaternionu q je dána vztahem

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{q\bar{q}}. \quad (1)$$

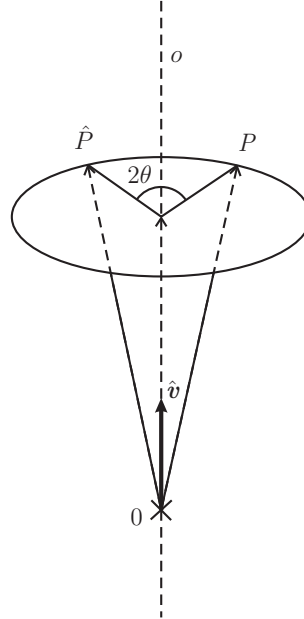
Jednotkové kvaterniony $\|q\| = 1$ jsou významné pro počítačovou grafiku, tento kvaternion se dá zapsat jako $q = [\cos \theta, \hat{\mathbf{v}} \sin \theta]$, kde $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$. Množinu všech jednotkových kvaternionů budeme označovat $\mathbb{H}_1$. Kvaternion popisuje rotaci v trojrozměrném prostoru, a to rotaci kolem jednotkového vektoru $\hat{\mathbf{v}}$ o úhel 2θ (viz [2]).

Věta 2.1 Necht $q \in \mathbb{H}_1$, $q = [\cos \theta, \sin \theta \hat{\mathbf{v}}]$. Necht $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a $p = [0, \mathbf{r}] \in \mathbb{H}$. Pak

$$\hat{p} = qp\bar{q} \quad (2)$$

je obrazem p v rotaci o úhel 2θ kolem osy, která je daná směrovým vektorem $\hat{\mathbf{v}}$, viz Obr. 1.

Důkaz: Viz [6]. □



Obrázek 1: Otočení bodu P o úhel 2θ kolem osy o , která je daná směrovým vektorem $\hat{\mathbf{v}}$.

Reprezentace rotace pomocí kvaternionů je výhodnější než pomocí matic, protože kvaterniony obsahují pouze čtyři složky, zatímco matice typu 3×3 mají složek devět. Pro rotaci dostáváme vztah $\hat{p} = qp\bar{q}$, kde q je jednotkový kvaternion. Tento vztah je důležitý, protože jej budeme aplikovat i na rotace spojené s duálními kvaterniony, více např. v [6].

3 Duální čísla

Duální kvaterniony vznikly složením kvaternionů a duálních čísel. Duální čísla poprvé v pravém významu uvedl William Kingdon Clifford (1845–1879). Tento anglický matematik se také podílel na vzniku duálních kvaternionů¹.

Duální čísla se podobají komplexním číslům – v podstatě si je můžeme i podobně představit. Základní odlišností je duální jednotka ε , pro kterou platí vztah $\varepsilon^2 = 0$. Algebra duálních čísel tvoří komutativní, asociativní okruh s jednotkovým prvkem. Pomocí duálních čísel můžeme zavést duální vektor případně duální úhel, který je používán v souvislosti s duálními kvaterniony. V této algebře neexistují inverzní prvky k ryzím duálním číslům čímž se odlišují od komplexních čísel. Množinu všech duálních čísel budeme značit $\mathbb{D}$.

Definice 3.1 *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ $a_\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^2 = 0$. Duální číslo z můžeme napsat jako*

$$z = a + \varepsilon a_\varepsilon. \quad (3)$$

4 Duální kvaterniony

Nyní již můžeme říci, že duální kvaternion je kombinace duálního čísla a duálního vektoru. Můžeme si jej také představit jako součet dvou kvaternionů, kdy jeden z nich je násoben duální jednotkou. Tato algebra má podobné vlastnosti jako algebra kvaternionů, netvoří těleso, ale asociativní okruh s jednotkovým prvkem.

Definice 4.1 *Nechť $a_d, b_d, c_d, d_d \in \mathbb{D}$. Duální kvaternion q_d definujeme vztahem*

$$q_d = a_d + b_d \mathbf{i} + c_d \mathbf{j} + d_d \mathbf{k}, \quad (4)$$

kde a_d je skalár (duální číslo), (b_d, c_d, d_d) je vektor (duální vektor) a $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou čtyři základní kvaternionové jednotky z Definice 2.1.

Poznámka 4.1

1. Duální jednotka ε je komutativní s kvaternionovými jednotkami, např. $\mathbf{i}\varepsilon = \varepsilon\mathbf{i}$.
2. Duální kvaternion můžeme zapsat následujícím způsobem $q_d = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + \varepsilon a_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon \mathbf{i} + \varepsilon c_\varepsilon \mathbf{j} + \varepsilon d_\varepsilon \mathbf{k}$ nebo jako součet dvou kvaternionů $q_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$, kde $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ a $q_\varepsilon = a_\varepsilon + b_\varepsilon \mathbf{i} + c_\varepsilon \mathbf{j} + d_\varepsilon \mathbf{k}$.

Definice 4.2 *Množinu všech duálních kvaternionů budeme značit $\mathbb{H}_d$.*

Definice 4.3 *Nechť $q_d \in \mathbb{H}_d$, pak duální kvaternion $\overline{q_d^*}$ nazýváme duálně konjugovaným duálním kvaternionem s duálním kvaternionem q_d , jestliže platí*

$$\overline{q_d^*} = \bar{q} - \varepsilon \bar{q}_\varepsilon. \quad (5)$$

¹V literatuře bývají duální kvaterniony rovněž označovány jako bi-kvaterniony nebo komplexní kvaterniony.

Definice 4.4 *Nechť $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$, $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + \varepsilon a_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon\mathbf{i} + \varepsilon c_\varepsilon\mathbf{j} + \varepsilon d_\varepsilon\mathbf{k}$. Norma $\|\mathbf{q}_d\|$ duálního kvaternionu $\mathbf{q}_d$ je dána vztahem*

$$\|\mathbf{q}_d\| = \sqrt{(a + \varepsilon a_\varepsilon)^2 + (b + \varepsilon b_\varepsilon)^2 + (c + \varepsilon c_\varepsilon)^2 + (d + \varepsilon d_\varepsilon)^2} = \sqrt{\overline{\mathbf{q}_d} \mathbf{q}_d}. \quad (6)$$

Pro jednotkový duální kvaternion opět platí $\|\mathbf{q}_d\| = 1$. Množinu všech jednotkových duálních kvaternionů budeme značit $\mathbb{H}_{d1}$. Hlavní výhodou duálních kvaternionů je fakt, že dokáží jednoduše reprezentovat rotaci a translaci v jedné prostorové operaci. Právě duální kvaterniony se využívají v grafice, kde nepomáhají maticové reprezentace. Takovými technikami, kde je lze využít, je například skinnig² (viz [5]).

Věta 4.1 *Nechť je dán polohový vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ bodu P , vektor posunutí $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ a jednotkový kvaternion $q \in \mathbb{H}_1$. Pak posunutí a otočení bodu P do bodu $\hat{P}$ můžeme vyjádřit jako*

$$\hat{\mathbf{p}}_d = \mathbf{q}_d \mathbf{p}_d \overline{\mathbf{q}_d}^*, \quad (7)$$

kde $\mathbf{p}_d$ je jednotkový duální kvaternion odpovídající vektoru $\mathbf{p}$, který je ve tvaru

$$\mathbf{p}_d = 1 + \varepsilon(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}), \quad (8)$$

a $\mathbf{q}_d$ je jednotkový duální kvaternion, pro který platí

$$\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon = q + \varepsilon \frac{tq}{2}, \quad t = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}. \quad (9)$$

Důkaz: Viz [7].

5 Aplikace duálních kvaternionů

Duální kvaterniony se využívají v mnoha odvětvích. Najdeme je také například v kinematice, fyzice nebo geometrickém modelování. Zde jsou uvedené vybrané aplikace, další např. viz [7].

5.1 Hand–eye kalibrace

Další uplatnění duálních kvaternionů nalezneme v robotice. V dnešní době se můžeme s roboty setkat také v lékařství [4]. Tomuto odvětví se říká robotická chirurgie. Výhodou je šetrný přístup k lidské tkáni, kdy se operuje jen přesně ohraničené místo a snižují se následné komplikace (např. infekce). Robotický systém se skládá z ramen, kdy je jedno rameno vybaveno speciální kamerou s trojrozměrným obrazem. Chirurg může vnímat mimo obrazu i hloubku a určit tak přesně pohyb chirurgických nástrojů, jenž jsou pevně připevněné k ramenům robota.

Hand–eye systém bychom mohli přeložit do češtiny jako systém ruka–oko. Oko představuje kamera, která je pevně připevněná na pohyblivém úchopu a snímá okolí. Hand–eye kalibrace je vypočtení vzájemné pozice a nastavení mezi úchopem robota a kamerou pevně připevněnou k

²Metoda v počítačové grafice, která se používá k animaci deformace složitějších objektů.

úchopu. Zahrnuje tedy počítání přímých shodností mezi nimi, respektive mezi pozicí v obraze a polohou úchopu. Problém se týká všech senzorů, které jsou připevněné na mechanických spojích. Jedná se například o kameru namontovanou na binokulární hlavě s mechanickými stupni volnosti nebo kameru připevněnou na nějakém přístroji.

S pomocí kamery, kterou připevníme na úchop, můžeme odhadnou pozici uchopení nebo získat pozici kamery. Řídící pokyny robota jsou zadány v souřadnicovém systému úchopu. Dokonce, když změníme souřadnice kamery, měli bychom poznat, jak se změní obraz snímáný kamerou robota. Pomocí kamery umístěné na úchopu také můžeme provést stereoskopickou rekonstrukci tak, že kameru nastavíme do několika poloh sdílejících stejný pohled. K rekonstrukci trojrozměrné pozice musíme znát vzájemnou korelaci z kamerového souřadnicového systému. Ovšem známe pouze jednu transformaci a ta je v souřadnicích robota. Podobný postup bychom použili i pro připojení kamery na binokulární hlavě. Pokud je kamera ručně připevněná, tak je nutná tato kalibrace, protože může dojít k naklonění kamerového systému.

Obvykle můžeme popsat hand-eye kalibraci pomocí několika homogenních transformačních matic. Označme X jako matici transformace z kamery do úchopu, A_i jako transformační matici z kamery do bazového systému souřadnic a B_i jako transformační matici ze základny robota do úchopu v i -té pozici. Platí

$$AX = XB, \quad (10)$$

kde A, B, X jsou matice typu 4×4 , které mají tento tvar:

$$A = \begin{pmatrix} R_A & \mathbf{t}_A \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} R_B & \mathbf{t}_B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} R_X & \mathbf{t}_X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

kde $R_A, R_B, R_C \in \mathbf{SO}(3)^3$ a $\mathbf{t}_A, \mathbf{t}_B, \mathbf{t}_X \in \mathbb{R}^3$ jsou vektory popisující posunutí. Nechť A_1 a A_2 jsou transformační matice z kamery do bazového systému souřadnic ve dvou pozicích, dostáváme:

$$A = A_2 A_1^{-1}. \quad (12)$$

Matici B popisuje pohyb úchopu z jedné pozice do druhé, a opět pokud jsou B_1 a B_2 transformační matice ze základny robota do úchopu, dostáváme:

$$B = B_2^{-1} B_1. \quad (13)$$

Ze vztahu (10) vyplývá základní rovnice pro popis vztahu mezi kamerou a úchopem:

$$R_A R_X = R_X R_B \quad (14)$$

$$(R_A - I) \mathbf{t}_X = R_X \mathbf{t}_B - \mathbf{t}_A. \quad (15)$$

Obvykle se postupuje tak, že se vyřeší R_X ze vztahu (14) a poté $\mathbf{t}_X$ ze vztahu (15). K vyřešení neznámých se využívá nelineární optimalizace.

Nyní se pokusíme úlohu formulovat pomocí duálních kvaternionů, které využijeme pro interpretaci rotace a translace. Nechť $\mathbf{p}_d$ označuje šroubový pohyb kamery a $\mathbf{r}_d$ označuje šroubový pohyb úchopu. Kamera a úchop jsou pevně spojené. Přímá shodnost mezi nimi není známá a budeme ji označovat jednotkovým duálním kvaternionem $\mathbf{q}_d$. Složením tedy dostáváme:

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{q}_d \mathbf{r}_d \bar{\mathbf{q}}_d. \quad (16)$$

³Speciální ortogonální grupa, tj. podgrupa ortogonálních matice, jejichž determinant je roven 1.

Skalární části duálních kvaternionů $\Re(\mathbf{p}_d)$ a $\Re(\mathbf{r}_d)$ se rovnají, proto se vztah (16) zjednoduší. Šroubový pohyb tedy popíšeme následujícím vztahem:

$$\mathbf{v}_{d_p} \sin \frac{\theta_{d_p}}{2} = \mathbf{q}_d (\mathbf{v}_{d_r} \sin \frac{\theta_{d_r}}{2}) \bar{\mathbf{q}}_d. \quad (17)$$

Vztah (17), který jsme získali použitím duálních kvaternionů, a vztah (14) jsou ekvivalentní. K dokončení výpočtu můžeme použít např. lineární metodu SVD rozkladu viz [3]. Výhoda duálních kvaternionů je hlavně v tom, že dokáží popsat přímou shodnost.

5.2 Segmentace objektů z ultrazvukového obrazu

Ultrasonografie je diagnostická zobrazovací technika, která využívá ultrazvukové vlny. Používá se například pro zobrazování svalů nebo vnitřních orgánů. Následně se zkoumá jejich velikost, struktura nebo poškození.

V kybernetice se můžeme setkat s tzv. *segmentací objektů* z ultrazvukového obrazu vytvořeného ultrasonografií. Segmentace, viz [1], je využívána právě ke zpracování a analýze obrazových dat, při které se dělí obraz na určité oblasti. Vlastnosti těchto oblastí jsou v nějakém ohledu stejnorodé. Obvykle se pokoušíme odlišit určité objekty od pozadí.

Segmentace je složitý problém. Při snímání se do obrazu může přidat šum nebo může dojít k tvarovým deformacím, a proto je těžké rozpoznat hledané objekty. Důležité je mít nějaké informace o problému, např. tvar objektu nebo pozice ve scéně.

Jednou z nejčastějších metod segmentace je *prahování*. Jedná se o transformaci obrazu na obraz binární. Tato metoda dobře funguje pro objekty, které se výrazně liší od pozadí. V ultrazvukových snímcích jsou si velmi podobné textury objektu a pozadí. Je složité hledaný objekt oddělit a prahování zde nelze použít. Hledá se tedy metoda, která dokáže přesně ohraničit objekty ze snímků, jenž jsou špatně rozeznatelné.

Soustředíme se nyní na rozpoznávání tvaru ledvin v ultrazvukovém snímku. Nejprve se popíše textury, které jsou v hledané oblasti, tedy v ledvinách. Poté se zjišťuje podobnost mezi texturou ledvin a texturou snímku. Chceme tak určit tvar ledviny. To ovšem není snadné. Potřebujeme ještě získat obecný tvarový model ledviny. Vezmeme tedy co nejvíce různých tvarů ledvin a z nich získáme model průměrného tvaru ledviny a vektory deformací. Vektor deformací uvádí, jak a kde se ledviny mohou deformovat. Sestaví se kritérium, které obsahuje tyto míry deformací. Poté se tvarový model ledviny otáčením a posouváním aplikuje na snímek, kde se dle kritéria vypočítávají míry deformací. Postupnou aplikací bychom měli získat přesný tvar ledviny na ultrazvukovém snímku.

O problém segmentace objektů z ultrazvukového obrazu se začala zajímat katedra kybernetiky na ZČU. Díky nedostatku lékařských dat se tento problém snaží řešit pro segmentaci javorových listů. Na část celé úlohy můžeme aplikovat duální kvaterniony. Jedná se tedy o otočení, posunutí a zvětšení resp. zmenšení daného objektu.

Předně se zpracuje snímek javorového listu v programu Matlab. Převeďte se na jednotlivé body, chybějící body se dopočítají a javorový list se vykreslí. Dostáváme potřebné body objektu, s kterými budeme dále pracovat. List musíme posunout do požadované polohy a dále s ním otáčíme. Celý proces otáčení a posouvání slouží k pozdější aplikaci porovnávání,

kdy daný obecný list porovnáváme s tím, který chceme rozpoznat, zjišťujeme jeho vektory deformace a hledáme optimální kritérium.

K řešení použijeme funkci pro otočení a posunutí bodu duálními kvaterniony v prostoru, podrobněji viz podkapitola 5.3. Zadaná data jsou pouze dvojrozměrná, a proto se celý algoritmus zjednoduší.

5.3 Výpočet otočení a posunutí ploch, křivek a bodů v trojrozměrném prostoru

Vytvoříme funkci pro výpočet otočení plochy, resp. křivky okolo zadané osy o úhel φ a posunutí o vektor $\mathbf{t}$ v programu matlab (dále jen otočení a posunutí plochy). Uvedeme pouze algoritmus, dle kterého program pracuje.

Využijeme získaných poznatků o duálních kvaternionech. Použijeme vztah pro otočení a posunutí bodu duálním kvaternionem (7).

Algoritmus 1

Vstup: Zadávány jsou tyto parametry: bod, který chceme transformovat: $P = [p_x, p_y, p_z]$; body určující osu otočení: $A = [a_x, a_y, a_z]$, $B = [b_x, b_y, b_z]$; vektor posunutí: $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$, úhel otočení φ .

Výpočet:

- Nejprve posuneme bod P o vektor $\mathbf{a} = (-a_x, -a_y, -a_z)$ tak, aby osa otočení procházela počátkem. Souřadnice posunutého bodu jsou:

$$\hat{P} = P + \mathbf{a} = \begin{bmatrix} p_x - a_x \\ p_y - a_y \\ p_z - a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Po přepsání bodu $\hat{P}$ do jednotkového duálního kvaternionu $\hat{\mathbf{p}}_d$ dostáváme:

$$\hat{\mathbf{p}}_d = [1, 0, 0, 0, 0, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z] = [a_2, 0, 0, 0, 0, f_2, g_2, h_2].$$

- Určíme směrový vektor osy otočení, tj. $\mathbf{s} = B - A$. Po normování směrového vektoru dostáváme jednotkový vektor $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$.
- Rotační část q duálního kvaternionu $\mathbf{q}_d = [a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1]$, získáme jako:

$$q = [\cos \theta, (n_x \sin \theta, n_y \sin \theta, n_z \sin \theta)] = [a_1, b_1, c_1, d_1], \quad \text{kde } \theta = \varphi/2.$$

- Translační část q_ε duálního kvaternionu $\mathbf{q}_d$, získáme ze vztahu $q_\varepsilon = \frac{tq}{2}$. Přičemž bod posuneme o vektor $\mathbf{t}$ a vektor $-\mathbf{a}$. Dostáváme $t = [0, t_x + a_x, t_y + a_y, t_z + a_z] = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ a translační část, s použitím násobení, můžeme vyjádřit jako:

$$q_\varepsilon = \begin{bmatrix} (-t_2 b_1 - c_1 t_3 - d_1 t_4)/2 \\ (t_2 a_1 + d_1 t_3 - c_1 t_4)/2 \\ (-t_2 d_1 + a_1 t_3 + b_1 t_4)/2 \\ (t_2 c_1 - b_1 t_3 + a_1 t_4)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \\ h_1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Duálně konjugovaný kvaternion $\overline{\mathbf{q}}_d^*$ k duálnímu kvaternionu $\mathbf{q}_d$ má následující tvar:

$$\overline{\mathbf{q}}_d^* = [a_1, -b_1, -c_1, -d_1, -e_1, f_1, g_1, h_1] = [a_4, b_4, c_4, d_4, e_4, f_4, g_4, h_4].$$

- Postupujeme podle rovnosti (7) s použitím násobení. Nejprve vypočítáme vztah $\mathbf{a}_d = \mathbf{q}_d \hat{\mathbf{p}}_d$, tj.:

$$\mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 c_1 \\ a_2 d_1 \\ -b_1 f_2 - c_1 g_2 - d_1 h_2 + e_1 a_2 \\ a_1 f_2 + c_1 h_2 - g_2 d_1 + a_2 f_1 \\ a_1 g_2 - b_1 h_2 + f_2 d_1 + a_2 g_1 \\ a_1 h_2 + b_1 g_2 - f_2 c_1 + a_2 h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \\ e_3 \\ f_3 \\ g_3 \\ h_3 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

- Nyní vynásobíme duální kvaternion $\mathbf{a}_d$ zprava duálním kvaternionem $\overline{\mathbf{q}}_d^*$. Dostaneme jednotkový duální kvaternion $\tilde{\mathbf{p}}_d = [1, 0, 0, 0, 0, \tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z]$, pro jehož souřadnice platí tento vztah:

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 f_4 + e_4 b_3 + c_3 h_4 - g_4 d_3 + e_3 b_4 + a_4 f_3 + g_3 d_4 - c_4 h_3 \\ a_3 g_4 - b_3 h_4 + e_4 c_3 + f_4 d_3 + e_3 c_4 - f_3 d_4 + a_4 g_3 + b_4 h_3 \\ a_3 h_4 + b_3 g_4 - f_4 c_3 + e_4 d_3 + e_3 d_4 + f_3 c_4 - b_4 g_3 + a_4 h_3 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Výsledný bod $\tilde{P}$ po otočení a posunutí má souřadnice $\tilde{P} = [\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z]$.

Získali jsme tak algoritmus pro otočení bodu P o nějaký úhel φ okolo libovolné osy otočení a posunutí o nějaký vektor $\mathbf{t}$. Chceme-li otočit a posunout plochu, resp. křivku, budeme postupovat obdobně. Pro transformaci objektu vypočteme jednotlivé body, které následně otočíme a posuneme. Celý kód s příklady je k nahlédnutí v [7]. Výstup algoritmu může být následující:

Příklad 5.1 Vykreslení otočené a posunuté plochy *hyperbolického paraboloidu* viz Obr. 2.

Parametrické zadání: $P(T1, T2) = (T1, T2, T1^2 - T2^2)$.

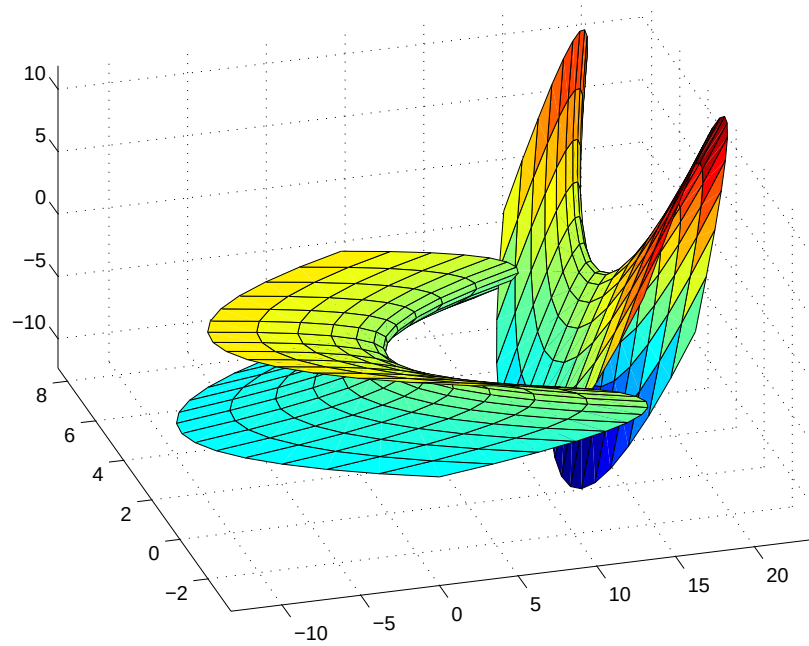
Body osy otočení: $A = [0, 10, 0]$, $B = [1, 2, 3]$.

Úhel otočení: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

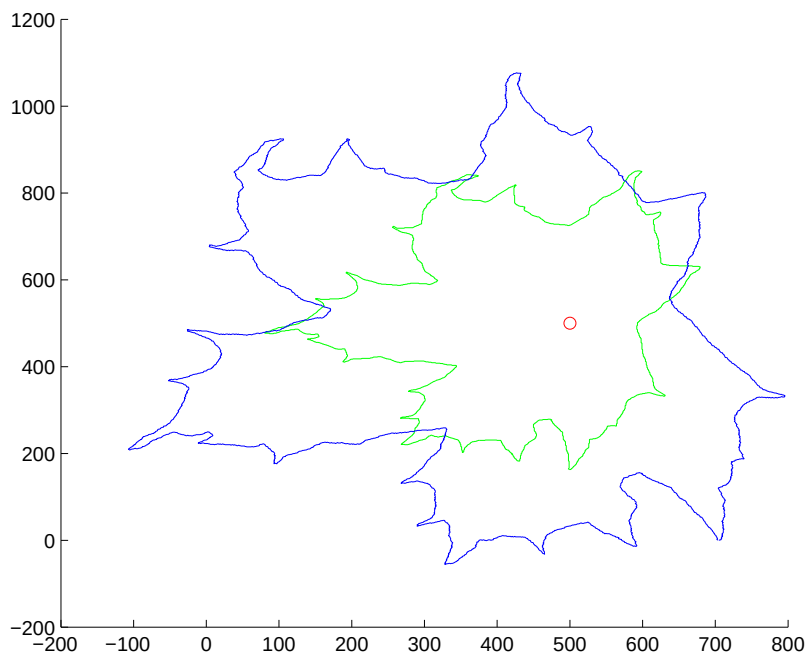
Vektor posunutí: $\mathbf{t} = [12, 2, 0]$.

Uvedený algoritmus pro otočení a posunutí se výrazně zjednoduší, pokud ho upravíme pro rovinu. V rovině otáčíme objekt pouze kolem bodu. Rotační část duálního kvaternionu $\mathbf{q}_d$ přejde do tvaru: $\mathbf{q} = [\cos \theta, 0, 0, \sin \theta]$ a zjednoduší se i tvar pro translační část duálního kvaternionu $\mathbf{q}_\varepsilon$, tj.: $\mathbf{q}_\varepsilon = [0, (a_1 t_2 + t_3 d_1)/2, (-d_1 t_2 + t_3 a_1)/2, 0]$. Duální kvaternion $\mathbf{a}_d = \mathbf{q}_d \hat{\mathbf{p}}_d$, viz vztah (20), upravíme:

$$\mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ 0 \\ 0 \\ a_2 d_1 \\ 0 \\ a_1 f_2 - g_2 d_1 + a_2 f_1 \\ a_1 g_2 + f_2 d_1 + a_2 g_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$



Obrázek 2: Hyperbolický paraboloid v základní poloze (vlevo) a po transformaci (vpravo).



Obrázek 3: Původní javorový list (zelený) a po otočení o úhel $\frac{\pi}{8}$ okolo bodu $A = [500, 500]$ a zvětšený $s = 1,6$ (modrý).

Souřadnice výsledného bodu $\tilde{P}$ jsou tvaru:

$$\tilde{P} = [a_3f_4 - g_4d_3 + a_4f_3 + g_3d_4, a_3g_4 + f_4d_3 - f_3d_4 + a_4g_3]. \quad (23)$$

Zvětšení bodu získáme tím, že přenásobíme příslušné souřadnice bodu konstantou s . Algoritmus pro otočení, posunutí a zvětšení bodu najdeme v [7]. Výstup kódu můžeme nalézt na Obr. 3. Funkce také dokáže vypočítat hodnotu zpětné transformace.

6 Závěr

V práci byla zpracována základní teorie týkající se kvaternionů, duálních čísel a duálních kvaternionů. Duální kvaterniony dokáží popsat přímé shodnosti. Výhodou je, že mohou jednoduše reprezentovat rotaci a translaci v jedné prostorové operaci. Využívají se například tam, kde není možné využít reprezentaci rotace a posunutí pomocí matic. V dnešní době mají široké využití. Můžeme je využít v robotice. Dokáží řešit například problém hand-eye kalibrace. Duální kvaterniony popisují pozici mezi úchopem robota a kamerou, která je k úchopu připevněna. Robotický systém se skládá z několika ramen, přičemž je jedno rameno vybaveno speciální kamerou. Lékař tak může přesně určit pohyb chirurgických nástrojů.

V práci je nastíněná aplikace duálních kvaternionů pro aktuální problém. Katedra kybernetiky na ZČU se v této době zabývá segmentací z ultrazvukových snímků. Technika, která z ultrazvukových snímků dokáže přesně oddělit požadovaný objekt od pozadí, má velký potenciál pro aplikaci v lékařství.

Reference

- [1] ANDRET, L. Automatická volumetrie patologických ložisek parenchymatosních orgánů v USG obraze. *Bakalářská práce*. Plzeň, 2008.
- [2] CONWAY, J. H., SMITH, D. A. *On quaternions and octonions: theory, arithmetic and symmetry*. 1. vyd, USA : Springer, 2003.
- [3] DANIILIDIS, K. Hand-Eye Calibration using dual quaternions. *The International Journal of Robotics Research*. 1999, 3 číslo, s. 286–298.
- [4] *Hospimed -Robotický systém*. [online]. [cit. 2009-04-19]. Dostupný na WWW: <<http://www.inovace.cz/for-high-tech/inovace-v-oborech/clanek/roboticky-system-da-vinci/>>.
- [5] KAVAN, L., COLLINS, S., ŽÁRA, J., O'SULLIVAN, C. Skinning with Dual Quaternions. *ACM Transaction on Graphics*., 2008, 27(4).
- [6] PROŠKOVÁ, J. Kvaterniony a jejich užití v geometrii. *Bakalářská práce*. Plzeň, 2006.
- [7] PROŠKOVÁ, J. Kvaterniony, duální kvaterniony a jejich aplikace. *Diplomová práce*. Plzeň, 2009.

Aplikace numerické matematiky na dynamiku tekutin

Martin Ptáček *

Abstrakt:

Pro řešení hyperbolické rovnice, která popisuje dynamiku tekutin, využijeme dvojkrokovou Laxon-Friedrichovu metodu 1. a 2. řádu, kompozitní a kinematickou metodu. Získaná řešení pak porovnáme s exaktním řešením daného problému.

* Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
email: heky@students.zcu.cz

ZPRACOVÁNÍ KÓDOVÝCH MĚŘENÍ GLOBÁLNÍCH NAVIGAČNÍCH SYSTÉMŮ

Tomáš Tichý¹

1 Úvod

Tento projekt slouží ke zpracování kódových měření GNSS. Kódové měření měří s přesností v řádech metrů a využívají ho především turistické navigace, auto navigace a navigace v telefonech. Pro přesnější měření, např. v geodézii, se využívá fázové měření. Fázové měření se při vhodných podmínkách (2 přijímače, přičemž jeden stojí na bodě o známých souřadnicích) se přesnost zlepší na řádově *cm*, tímto se ale tento projekt nezabývá. Tento projekt vznikl v rámci předmětu teoretická geodézie 2 na katedře vyšší geodézie. Hlavní náplň tohoto předmětu je seznámit studenty s GNSS a pochopit principy určování polohy.

2 Globální navigační satelitní systémy

Globální družicový (navigační) polohový systém (anglicky Global Navigation Satellite System, zkratkou GNSS) je služba umožňující za pomoci družic autonomní prostorové určování polohy s celosvětovým pokrytím. Uživatelé této služby používají malé elektronické rádiové přijímače, které na základě odeslaných signálů z družic umožňují vypočítat jejich polohu s přesností na desítky až jednotky metrů. Přesnost ve speciálních nebo vědeckých aplikacích může být až několik centimetrů až milimetrů.

V roce 2008 je jediný plně funkční systém provozovaný armádou USA NAVSTAR GPS. Ruská vláda schválila znovuoobnovení GNSS GLONASS do plného operačního stavu. Vývoj probíhá na evropském GNSS Galileo, čínském Compass a s jejich uvedení do provozu se počítá po roce 2012. Mimo GNSS existují i regionální autonomní družicové polohové systémy jako je existující čínský Beidou-1 a vyvíjený indický IRNSS a japonský QZSS.

Některá literatura se zmiňuje o dvou generacích GNSS:

- GNSS-1 Do první generace jsou zařazovány GPS a GLONASS s podpůrnými systémy SBAS, GBAS a LAAS. Tyto systémy byly prioritně vyvinuty pro vojenskou sféru a sekundárně zajišťují stálé globální pokrytí službou pro civilní sektor.
- GNSS-2 Do druhé generace se řadí vyvíjené GNSS jako GPS-III, Galileo, Compass. Zajišťují vysokou přesnost a spolehlivost pro aplikace Safety of Life plnohodnotné pro všechny uživatele.

Zjednodušeně lze družicové polohové systémy popsat jako družicový rádiový dálkoměrný systém:

- Dálkoměrný systém je takový, kdy se poloha nějakého objektu určuje ze vzdáleností od bodů se známou polohou. Např. v krajině lze určit polohu pomocí mapy a dalekohledu, který umí změřit vzdálenost od pozorovaného objektu. Dalekohledem změříme vzdálenost ke dvěma význačným objektům a kružtkem na mapě nakreslíme kolem každého objektu kružnici o změřeném poloměru. Zjišťovaná poloha je v jednom z průsečíků obou kružnic.

¹Katedra vyšší geodézie, Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze, Tháškova 7, 166 29 Praha 6 - Dejvice tomas.tichy@fsv.cvut.cz

- Rádiový systém pro měření určitého parametru využívá rádiových vln. "Rádiový dálkoměrný" systém k měření vzdálenosti využívá rádiových vln takto: Do bodu se známou polohou je umístěn vysílač, který vysílá rádiové vlny s časovými značkami. V bodě, jehož poloha se měří, umístíme přijímač, který porovnává časové značky se svými "hodinami". Tím je možno změřit zpoždění, tj. jak dlouho trvalo rádiové vlně, než k přijímači dorazila. Protože se rádiové vlny pohybují známou rychlostí, stačí pro výpočet požadované vzdálenosti vynásobit změřené zpoždění touto rychlostí.
- Družicový je systém označován proto, že body se známou polohou jsou družice obíhající Zemí. Aby bylo možno určit polohu družic, musí být v jejich vysílání nejen časové značky, ale i parametry dráhy dané družice

2.1 Americký systém NAVSTAR GPS

Navigation Signal Timing and Ranging Global Positioning System dále jen NAVSTAR GPS. Americký systém je nejstarší ze všech systémů určování polohy, který je od roku 1996 pokračovatelem projektu GNSS Transit. Systém se skládá ze tří uživatelských segmentů a to z kosmického, řídicího a kontrolního a uživatelského.

2.1.1 Kosmický segment GPS

Kosmický segment se skládá z 32 družic ve výšce 20200 km nad Zemí, se sklonem roviny dráhy 55°. Minimální počet družic je 24, na který byl systém projektován. Pro další rozšiřování by bylo třeba změnit vysílaný signál. Družice se pohybují na 6 kružnicových drahách, kde na každé kružnici je nepravidelně rozmístěno 5-6 družic (dříve 4 pravidelně). Oběžná doba jednotlivé družice rychlostí $3,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ je přibližně 11 hodin a 58 minut.

Družice váží necelé dvě tuny a obsahuje troje až čtvery velmi přesné atomové hodiny s cesiovým či rubidiovým oscilátorem, 12 antén RHCP pro vysílání rádiových kódů v pásmu L (2000-1000 MHz), antény pro komunikaci s pozemními kontrolními stanicemi v pásmu S (2204,4 MHz), antény pro vzájemnou komunikaci družic v pásmu UHF, optické, rentgenové a pulzní-elektromagnetické detektory senzory pro detekci startů balistických raket a jaderných výbuchů a solární panely a baterie jako zdroj energie.

Družice vysílají v pásmech, která jsou zvolena záměrně tak, aby byla minimálně ovlivněna meteorologickými vlivy. Přiděleno je několik frekvencí a každé frekvenci odpovídá jeden vysílací kanál:

- L1 (1575,42 MHz), kde je vysílán C/A kód je dostupná pro civilní uživatele, dále je šířen vojenský P(Y) kód, který je šifrovaný a přístupný pouze pro autorizované uživatele. Družice bloku IIR-M a novější jsou připraveny vysílat vojenský M kód.
- L2 (1227,62 MHz), kde je vysílán vojenský P(Y) kód. Družice bloku IIR-M a novější jsou připraveny vysílat vojenský M kód a civilní C kód.
- L3 (1381,05 MHz) od bloku družic IIR vysílá signály, které obsahují data monitorování startů balistických raket, detekci jaderných výbuchů a dalších vysokoenergetických zdrojů. Program náleží k The United States Nuclear Detonation (NUDET) a United States Nuclear Detonation Detection System (USNDS).
- L4 (1841,40 MHz) se využívá pro měření ionosférické refrakce. Průchod signálu ionosférou způsobuje zpoždění rádiového signálu, která se promítá do chyb při určení polohy. Toto ionosférické zpoždění lze eliminovat, jestliže měříme zpoždění na dvou kmitočtech, nebo získáním korekcí.

- L5 (1176,45 MHz) se plánuje jako civilní Safety-of-life (SoL) signál. Tato frekvence spadá do mezinárodně chráněné oblasti letecké navigace, ve které je malé nebo žádné rušení za všech podmínek. S vypuštěním první družice bloku IIF, který bude poskytovat tento signál se počítá na rok 2009.

Družice jsou několikrát do roka, obvykle plánovaně, odstaveny pro údržbu atomových hodin a korekci dráhy družice. Údržba trvá přibližně 12-24 hodin. Průměrná životnost družice je asi 10 let, obměna kosmického segmentu trvá přibližně 20 let.

Pro popis stavu kosmického segmentu jsou definovány dva stavy implementace:

- plná operační schopnost (FOC, Full Operational Capability) - označení stavu, kdy je nejméně 24 družic plně funkčních, podporující novou technologii. Poprvé byl vyhlášen 17. července 1995 po vypuštění a zprovoznění 24 družic Bloku II a IIA.
- částečná operační schopnost (IOC, Initial Operational Capability) - označení stavu, kdy je nejméně 18 družic plně funkčních, podporující novou technologii. Poprvé byl vyhlášen 8. prosince 1993 po vypuštění a zprovoznění 18 družic Bloku I, II a IIA.

2.1.2 Řídící a kontrolní segment

Operátorka řídicího střediska na letecké základně Schriever, monitorující stav kosmického segmentu.

Segment se skládá z několika částí:

- velitelství - Navstar Headquarters na letecké základně Los Angeles v Californii v USA.
- řídicí středisko (MSC, Master Control Station), na letecké základně Schriever USAF v Colorado Springs, 2nd Space Operations Sq. Záložní řídicí středisko (BMCS, Backup Master Control Station) umístěné v Gaithersburg (Maryland, USA) přebírá cvičně 4x do roka řízení systému, v nouzi je připravena do 24hodin.
- 3 povelové stanice (Ground Antenna), které jsou umístěny na základnách USAF: Kwajalein, Diego Garcia, Ascension Island případně i Cape Canaveral.
- 18 monitorovacích stanic (Monitor Stations), které jsou umístěny na základnách USAF: Havaj, Colorado Springs, Cape Canaveral, Ascension Island, Diego Garcia, Kwajalein a dále stanice spravující NGA: Fairbanks (Aljaška), Papeete (Tahiti), Washington DC (USA), Quito (Ekvádor), Buenos Aires (Argentina), Hermitage (Anglie), Pretoria (Jižní Afrika), Manama (Bahrain), Osan (Jižní Korea), Adelaide (Austrálie) a Wellington (Nový Zéland)

Řídící a kontrolní segment komunikuje s uživateli také prostřednictvím zpráv GPS NANU (Notice Advisory to NAVSTAR Users), kde zveřejňuje plánované odstávky družic, jejich stažení a uvedení do provozu nebo i zpětně informace o nezdravé družici.

Pokud by došlo k zničení pozemních vojenských stanic řídicího a kontrolního segmentu, přechází družice do režimu AUTONAV (Autonomous Navigation Mode), ve kterém jsou schopny dále pracovat až 6 měsíců. V tomto režimu spolu družice komunikují a porovnávají vzájemně mezi sebou své efemeridy a stav palubních hodin. Výsledky poskytují uživatelskému segmentu v navigační zprávě. Tento režim však nikdy nenastal, nejsou ani známy výsledky jeho případných testů.

2.1.3 Uživatelský segment

Uživatelé pomocí GPS přijímače přijímají signály z jednotlivých družic, které jsou v danou chvíli nad obzorem. Na základě přijatých dat (časových značek z jednotlivých družic a znalosti jejich polohy) a předem definovaných parametrů přijímač vypočítá polohu antény, nadmořskou výšku a zobrazí přesné datum a čas. Komunikace probíhá pouze od družic k uživateli, GPS přijímač je tedy pasivní.

Rozdělení přijímačů podle přijímaných pásem:

- jednofrekvenční
- dvoufrekvenční
- více frekvenční (připravují se pro pásmo L5)

Rozdělení přijímačů podle kanálů:

- jednokanálové (používané v raných fázích projektu GPS)
- vícekanálové

Rozdělení přijímačů podle principu výpočtů:

- kódová
- fázová a kódová

Tento projekt se zabývá zpracováním pouze kódových měření. Uživatelé využívající systém GPS můžeme rozdělit do dvou skupin:

- autorizovaní uživatelé (vojenský sektor USA a vybrané spojenecké armády) využívající službu Precise Positioning Service (PPS) mající k dispozici dekodovací klíče k P(Y) kódu na frekvencích L1 a L2. Tito uživatelé mají zaručenou vyšší přesnost systému. Uplatňují se především v aplikacích:
 - podpora velení a vojáků v poli
 - doprava
 - navádění zbraňových systémů
 - vojenská geodézie a mapování
 - přesný čas (<10-7s)
- ostatní uživatelé (především civilní sektor) mohou využívat Standard Positioning Service (SPS) a mají k dispozici C/A kód na frekvencích L1. Přijímače vyrobené v USA nesmějí být exportovány, pokud nemají nastavená omezení výšky do 18 km (60 000 ft) a rychlosti do 515 m/s (1 000 knots). Tyto limity vychází z prevence možného zneužití jako systému orientace v prostoru ve zbraních obdobných balistickým raketám nebo střelám s plochou dráhou letu. Typickými profesemi a odvětvími civilních uživatelů jsou:
 - doprava (pozemní doprava, letectví, námořnictvo, kosmické lety)
 - geologie a geofyzika
 - geodézie a geografické informační systémy
 - archeologie
 - lesnictví a zemědělství
 - turistika a zábava
 - přesný čas (<10-6s)

2.2 Ruský systém GLONASS

GLONASS (tr.: Globalnaja navigacionnaja sputnikovaja sistěma) je globální družicový polohový systém (GNSS) vyvinutý v SSSR a nyní provozovaný ruskou armádou. S jeho pomocí je možno určit polohu a přesný čas kdekoli na Zemi nebo nad Zemí. Část služeb tohoto systému s omezenou přesností je volně k dispozici i civilním uživatelům. Je obdobou amerického vojenského GNSS GPS.

V letech 1996-2001 byla kosmická část systému GLONASS v úpadku. Od roku 2001 (do 2012) je prováděno jeho znovuoobnovení do plného operačního stavu.

Vývoj GLONASS byl zahájen v roce 1970 vytvořením dokumentu Ministerstva obrany SSSR, Sovětské akademie věd a Sovětského námořnictva o vývoji jednotného systému pro navigaci na zemi, na vodě i ve vzduchu, který byl v roce 1976 přijat a první testovací družice byla vypuštěna v roce 1982.

V současnosti (březen 2010) Rusko spolupracuje při použití tohoto systému s Indií

2.3 Evropský systém Galileo

Navigační systém Galileo je plánovaný autonomní evropský Globální družicový polohový systém (GNSS), který by měl být obdobou americkému systému Navstar GPS a ruskému systému GLONASS. Jeho výstavbu zajišťují státy Evropské unie a jejich instituce. Spuštění GNSS Galileo je stále oddalováno a původně měl být provozuschopný od roku 2010, podle nových plánů je nejbližší rok spuštění 2014. Projekt byl pojmenován podle italského vědce Galilea Galileo, který se mimo jiné zajímal i o problémy námořní navigace.

Kromě těchto systému existuje ještě francouzský Doris a čínský Compass. Jejich význam je však zatím velmi malý.

3 Kódové měření

Používá se u většiny levnějších přístrojů. Měření probíhá na C/A kódu nosné L1 vlny. Měření vzdáleností je nahrazeno měřením doby τ_{di} , potřebné k tomu, aby signál z družice dosáhl přijímače. Doba τ_{di} se v GPS určuje z rozdílu času přijetí signálu přijímačem t_k a čtení družicových hodin t_i v okamžiku odeslání signálu. Z tohoto rozdílu je možné vypočítat vzdálenost mezi družicí a přijímačem pomocí vztahu

$$D_k^i = c \cdot (t_k - t_i) = c \cdot \tau_{mi} \quad (1)$$

kde $c = 299792458.0 \text{ m/s}$ je rychlost světla, t_k je čtení hodin přijímače v okamžiku přijetí signálu, t_i je čtení hodin družice v okamžiku odeslání signálu a τ_{mi} je tedy měřená doba přenosu signálu. Tato vzdálenost je však zatížena mnoha chybami, nazývá se tedy pseudovzdáleností (pseudorange) nebo také zdánlivou vzdáleností. Nejvýznamnější chybou je nesynchronnost časové základny systému (družice) a uživatele (přijímače). Časová základna přijímače (tzv. hodiny) je totiž posunuta o neznámý časový interval δ_k (tzv. chyba hodin přijímače), který můžeme přepočítat na vzdálenost $b = c \cdot \delta_k$. Pro určení polohy musíme tedy přidat do rovnic chybu hodin přijímače δ_k jako čtvrtou neznámou, zčehož vyplývá nutnost příjmu signálu od nejméně 4 družic současně.

$$\tau_{di} \cdot c = \sqrt{p(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2} = d_i^k = (\tau_{mi} + \delta_k) \cdot c = D_i^k + b, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

4 Zpracování dat

4.1 RINEX

Pro pozdější zpracování měřených dat (tzv. postprocessing) bylo vyvinuto několik formátů. Mezi nejpoužívanější patří RINEX (Receiver INdependent EXchange format). Používají se dvě formy tohoto formátu - navigační (informace o poloze družic, koncovka .XXn17) a observační (měřená data - pseudovzdálenosti a fázová měření, koncovka .XXo). Pro ukládání zpřesněných souřadnic družic je určen formát SP3. V ručních GPS přijímačích se používá textový protokol NMEA. Ukázka souborů se stručným popisem je v příloze na konci této zprávy.

4.2 Zadání

Například v adresáři /pub/igs/data/2009/099/ protokolu FTP na [ftp://igs.ensg.ign.fr/] si stáhněte dle numerického zadání soubor ve formátu RINEX obsahující data měřená přijímačem GNSS stanice sítě EUREF EPN v rozmezí jednoho dne v GPS týdnu 1526. Na soubory je použita jak komprese pomocí SW compress (.Z), tak komprese Hatanaka (.RRd místo .RRO). WinZip formát .Z rozbalit neumí, ve Windows použijte program compress.exe (návod, decompr.bat), nebo gzip.exe. O kompresi Hatanaka se více dočtete zde [ftp://terras.gsi.go.jp/software/RNXCMP], kde je také odkaz na SW na dekompresi pro různé OS (i pro Windows). Kompresi .tar umí rozbalit např. TotalCommander.

Využijte dat z tohoto souboru a spočítejte polohu stanice pomocí pseudovzdáleností získaných z P2-kódu na druhé nosné vlně. Použijte data pro epochy v časech t_1, t_2, t_3 a využijte všechna měření na družice systému GPS. Kromě polohy stanice určete také opravu hodin přijímače pro každou epochu. Jako apriorní přibližné souřadnice stanice využijte souřadnice zadané v souboru RINEX. Polohu družic a opravu družicových hodin spočítejte na základě souboru formátu SP3 obsahujícího přesné efemeridy družic. Výpočet polohy družice v okamžiku vyslání signálu vypočítejte pomocí kvadratické interpolace ze třech etap souboru SP3, časově nejbližších zadaným epochám t_1, t_2, t_3 .

Soubory SP3 dohledejte na internetových stránkách sítě EUREF EPN [www.epncb.oma.be/] nebo na stránkách služby IGS [http://igscb.jpl.nasa.gov/] (pomůcka - oproti měřeným datům - observačním souborům, se soubory SP3 nacházejí v adresáři *products*, ne *data*, a jsou řazeny ne podle roků a dnů v roce, ale podle čísla GPS týdne).

Jako rychlost světla použijte hodnotu $c = 299792458.0 \text{ m/s}$.

Podrobný popis formátu RINEX a SP3c naleznete v dokumentech: .

4.3 Osobní zadání:

clar0990.09o - soubor RINEX s naměřenými daty.

Epochy: V časech: $t_1 = 12.15$, $t_2 = 12.30$, $t_3 = 12.45$

4.4 Výpočty

4.4.1 Výpočet polohy přijímače z nediferencovaných kódových měření

Výpočet polohy přijímače z kódových měření je klasickou aplikací systému GPS a jde o úlohu, která je řešená v každém jednoduchém přijímači sloužícím pro navigační účely. Vstupními daty jsou kódová měření z jednoho nebo více okamžiků, a výstupem souřadnice přijímače. Princip výpočtu je popsán v následujících odstavcích.

Kódový přijímač je schopen měřit časový posun mezi okamžikem vyslání a okamžikem příjmu signálu, přesněji je schopen měřit rozdíl časů

$$\Delta t = t_R - t^S \quad (3)$$

Zavedeme *opravu hodin přijímače* $\delta_R(T_R)$ v čase T_R a *opravu hodin družice* $\delta^S(T^S)$ v čase T^S

$$\delta_R(T_R) = t_R - T_R \quad (4)$$

$$\delta^S(T^S) = t^S - T^S \quad (5)$$

Rovnici (3) můžeme tedy přepsat do následujícího tvaru:

$$\Delta t = [T_R + \delta_R(T_R)] - [T^S + \delta^S(T^S)] = \Delta T + \delta_R(T_R) - \delta^S(T^S) \quad (6)$$

kde ΔT je *správný tranzitní čas*.

Vztah popisující pseudovzdálenost mezi přijímačem a družicí dostaneme vynásobením rovnice (6) rychlostí světla c .

$$R_R^S = c\Delta t = c\Delta T + c \cdot (\delta_R - \delta^S) = \varrho_R^S(T_R, T^S) + c\delta_R(T_R) - c\delta^S(T^S) \quad (7)$$

kde $\varrho_R^S(T_R, T^S) = c\Delta T$ je skutečná vzdálenost přijímače R v okamžiku příjmu signálu (T_R) a družice S v okamžiku vyslání signálu (T^S). R_R^S je pseudovzdálenost s promítnutím chyb hodin přijímače a družice.

Rovnici pro pseudovzdálenost přepíšeme do tvaru:

$$R_R^S = \sqrt{(X_R - X^S(T^S))^2 + (Y_R - Y^S(T^S))^2 + (Z_R - Z^S(T^S))^2} + c\delta_R(T_R) - c\delta^S(T^S) \quad (8)$$

S využitím symboliky má rovnice pozorování pro k -tou družici a i -tou epochu v čase T_i tvar:

$$R_p^k(T_i) = \varrho_p^k(T_i) + c \cdot \varrho_p(T_i) - c \cdot \varrho^k(T_i^k) \quad (9)$$

$$R_p^k(T_i) = \sqrt{(X_p - X^k(T_i^k))^2 + (Y_p - Y^k(T_i^k))^2 + (Z_p - Z^k(T_i^k))^2} + c \cdot \varrho_p(T_i) - c \cdot \varrho^k(T_i^k) \quad (10)$$

Pro parciální derivace geometrické vzdálenosti ρ v i -té epoše pro k -tou družici zavedeme následující substituce:

$$\begin{aligned} a_p^k(T_i^k) &= \left. \frac{\partial \varrho_p^k(T_i)}{\partial X} \right|_{(X_{p0}, Y_{p0}, Z_{p0})} = \frac{X_{p0} - X^k(T_i^k)}{\varrho_{p0}^k(T_i)} \\ b_p^k(T_i^k) &= \left. \frac{\partial \varrho_p^k(T_i)}{\partial Y} \right|_{(X_{p0}, Y_{p0}, Z_{p0})} = \frac{Y_{p0} - Y^k(T_i^k)}{\varrho_{p0}^k(T_i)} \\ c_p^k(T_i^k) &= \left. \frac{\partial \varrho_p^k(T_i)}{\partial Z} \right|_{(X_{p0}, Y_{p0}, Z_{p0})} = \frac{Z_{p0} - Z^k(T_i^k)}{\varrho_{p0}^k(T_i)} \end{aligned} \quad (11)$$

kde (X_{p0}, Y_{p0}, Z_{p0}) jsou přibližné souřadnice přijímače a

$$\varrho_{p0}^k(T_i) = \sqrt{(X_{p0} - X^k(T_i^k))^2 + (Y_{p0} - Y^k(T_i^k))^2 + (Z_{p0} - Z^k(T_i^k))^2}$$

hodnota geometrické vzdálenosti spočtená z těchto souřadnic.

Potom matice $\mathbf{A}$ má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} a_p^1(T_1^1) & b_p^1(T_1^1) & c_p^1(T_1^1) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_p^2(T_1^2) & b_p^2(T_1^2) & c_p^2(T_1^2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_p^3(T_1^3) & b_p^3(T_1^3) & c_p^3(T_1^3) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p^{m1}(T_1^{m1}) & b_p^{m1}(T_1^{m1}) & c_p^{m1}(T_1^{m1}) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_p^1(T_2^1) & b_p^1(T_2^1) & c_p^1(T_2^1) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_p^2(T_2^2) & b_p^2(T_2^2) & c_p^2(T_2^2) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_p^3(T_2^3) & b_p^3(T_2^3) & c_p^3(T_2^3) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p^{m2}(T_2^{m2}) & b_p^{m2}(T_2^{m2}) & c_p^{m2}(T_2^{m2}) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline a_p^1(T_n^1) & b_p^1(T_n^1) & c_p^1(T_n^1) & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_p^2(T_n^2) & b_p^2(T_n^2) & c_p^2(T_n^2) & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_p^3(T_n^3) & b_p^3(T_n^3) & c_p^3(T_n^3) & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p^{mn}(T_n^{mn}) & b_p^{mn}(T_n^{mn}) & c_p^{mn}(T_n^{mn}) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

a vektor $\mathbf{l}$

$$l = \begin{pmatrix} \varrho_{p0}^1(T_1) - R_p^1(T_1) - c \cdot \delta^1(T_1^1) \\ \varrho_{p0}^2(T_1) - R_p^2(T_1) - c \cdot \delta^2(T_1^2) \\ \vdots \\ \varrho_{p0}^{m1}(T_1) - R_p^{m1}(T_1) - c \cdot \delta^{m1}(T_1^{m1}) \\ \hline \varrho_{p0}^1(T_2) - R_p^1(T_2) - c \cdot \delta^1(T_2^1) \\ \varrho_{p0}^2(T_2) - R_p^2(T_2) - c \cdot \delta^2(T_2^2) \\ \vdots \\ \varrho_{p0}^{m1}(T_2) - R_p^{m1}(T_2) - c \cdot \delta^{m1}(T_2^{m1}) \\ \hline \vdots \\ \hline \varrho_{p0}^1(T_n) - R_p^1(T_n) - c \cdot \delta^1(T_n^1) \\ \varrho_{p0}^2(T_n) - R_p^2(T_n) - c \cdot \delta^2(T_n^2) \\ \vdots \\ \varrho_{p0}^{m_n}(T_n) - R_p^{m_n}(T_n) - c \cdot \delta^{m_n}(T_n^{m_n}) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Výpočet přírůstku souřadnic

$$\mathbf{X} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (14)$$

kde matice $\mathbf{P}$ je jednotková, a tak se nemusí s ní dále počítat. (Váha všech měření je stejná.)

4.5 Výsledky

4.5.1 Vypočtené hodnoty

	X	σ_{xyz}	Δ_{xyz}
X_{p0}	-2458194.191 m	3.3286 m	24.283 m
Y_{p0}	-4680505.985 m	2.3572 m	-38.534 m
Z_{p0}	3556793.532 m	7.8223 m	35.0361 m

Tabulka 1: Výsledné souřadnice, střední chyby a rozdíl od přibližných souřadnic.

T_i	a_i	$\Delta_{T_i} = \frac{a}{c}$	σ_{T_i}
T_1	16.998	$5.66996 \cdot 10^{-8}$	11.6725
T_2	27.097	$9.03859 \cdot 10^{-8}$	7.8533
T_3	20.818	$6.94425 \cdot 10^{-8}$	7.8377

Tabulka 2: Výsledná oprava hodin přijímače a střední chyby.

4.6 Závěr zpracování

Vypočtené souřadnice se liší od přibližných o cca. 40 metrů, družice číslo čtyři měla ve třetí epoše poruchu, a tak nemohla být do měření zahrnuta.

5 Závěr

Tento projekt měl posloužit k seznámení s principem fungování zpracování C/A signálu z GNSS. Projekt počítá data naměřená stanicí Nancy King americké geologické služby. Tato stanice měří nepřetržitě a data jsou k dispozici na internetu. Jediná výhoda tohoto projektu oproti určování polohy v reálném čase, je ta, že projekt počítá s daty o přesné poloze družic, kterou vydává NASA zpětně na internetu. Pokud by data byly k dispozici v reálném čase i ruční přístroje, jejich přesnost by se zvýšila. Stále by ale nejpřesnější bylo fázové měření.

Reference

- [1] MERVART Leoš, LUKEŠ Zdeněk, Adjustemt Calculus, Praha: ČVUT, 2007. 165 s. Fakulta stavební. ISBN 978-80-01-03593-1
- [2] CIMBÁLNÍK Miloš, ZEMAN Antonín, KOSTELECKÝ Jan, Základy vyšší a fyzikální geodézie, Praha: ČVUT, 2008. 218 s. Fakulta stavební. ISBN 978-80-01-03605-1
- [3] TESAŘ Pavel, Úvod do GNSS, Praha: ČVUT, 2007 19 s. dostupný on-line
- [4] LUKEŠ Zdeněk, Zpracování kódových měření systému GPS, Praha: ČVUT, 2007 13 s. dostupný on-line
- [5] LUKEŠ Zdeněk, Pohyb umělých družic v tíhovém poli Země, Praha: ČVUT, 2007 12 s. dostupný on-line
- [6] Česká verze wikipedie, <http://cs.wikipedia.org>, dostupná on-line

Číselné soustavy se záporným základem

Tomáš Vávra *

Abstrakt:

Budeme se zabývat teorií číselných soustav se záporným základem, které zavedli S. Ito a T. Sadahiro. Nejprve budou představeny známé výsledky týkající se soustav s kladným základem, zejména jejich aritmetické vlastnosti a jako analogie bude představena teorie soustav se záporným základem s nově dosaženými výsledky, zejména v aritmetice v těchto soustavách.

* Katedra matematiky, FJFI, ČVUT v Praze, Břehová 7, 115 19 Praha 1
email: t.vavra@seznam.cz

Věty o existenci a jednoznačnosti řešení Plateauova problému

Jana Vecková*

Abstract

Tento článek je souhrnem vět o řešitelnosti a jednoznačnosti problému, který byl pojmenován po belgickém fyzikovi J. A. F. Plateauovi. Problém byl formulován dříve již Lagrangem a Meusnierem a zabývá se hledáním plochy s nejmenším plošným obsahem uvnitř dané uzavřené hranice. V 19. století byl tento problém řešen pro různé typy hraničních křivek. Dostatečně obecné řešení uvedli v roce 1930 současně americký matematik J. Douglas a maďarský matematik T. Radó, i když jejich přístupy k důkazu byly odlišné.

1 Úvod

Vytvarujeme-li z drátku uzavřenou křivku a ponoříme-li ho do mýdlové vody, po jeho vytáhnutí se zformuje plocha (mýdlová membrána nepraskne), která je z fyzikálního hlediska v rovnováze a můžeme tedy usuzovat, že existuje minimální plocha pro danou hranici. Z matematického hlediska nemá takový pokus žádnou výpovědní hodnotu. Je potřeba zformulovat vstupní údaje, které matematicky popisují zadanou hranici (tvarovaný drátek) a definovat podmínky, které splňuje výsledná minimální plocha.

S nejednoznačností se setkáváme již na samém počátku formulace úlohy, kdy se můžeme dívat na minimální plochu jako na plochu s nulovou střední křivostí nebo jako na plochu, s nejmenším plošným obsahem.

2 Formulace úlohy

V této části zavedeme potřebné definice pojmů z diferenciální geometrie a matematické analýzy, matematicky zformulujeme danou úlohu i její řešení.

Definice 1 *Mějme množiny*

$$\omega = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2; \theta_1^2 + \theta_2^2 < 1\}$$

a

$$\partial\omega = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2; \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1\}.$$

Uzavřená Jordanova křivka Γ v $\mathbb{R}^3$ je podmnožina $\mathbb{R}^3$, která je homeomorfní (tj. existuje mezi nimi spojitě a ryze monotónní zobrazení zobrazení na) s $\partial\omega$.

Řekneme, že $\mathbf{X} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ je řešením Plateauova problému pro hranici Γ , pokud jsou splněny následující podmínky

*ČVUT, Fakulta stavební, Katedra matematiky, veckova@mat.fsv.cvut.cz.

- $\mathbf{X} \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\omega, \mathbb{R}^3)$,
- zobrazení $\mathbf{X}$ splňuje v ω následující rovnosti

$$\Delta \mathbf{X} = 0, \quad (1)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\|^2, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} = 0, \quad (2)$$

- restrikce $\mathbf{X}|_{\partial\omega}$ je homeomorfismus $\partial\omega$ na Γ .

Parametrizaci $\mathbf{X}$ plochy $\mathbf{X}(\omega)$ nazveme konformní, pokud splňuje rovnosti (2).

Poznámka:

1. Omezení na zobrazení z otevřeného jednotkového kruhu ω do $\mathbb{R}^3$ neubírá na obecnosti.
2. $C^k(\omega, \mathbb{R}^3)$ značí prostor spojitých funkcí z ω do $\mathbb{R}^3$, které mají spojitě derivace až do řádu k . V tomto případě se jedná o spojitost vektorových funkcí, kterou rozumíme spojitost jednotlivých souřadnicových funkcí.
3. $\bar{\omega}$ je uzávěr množiny ω a $\partial\omega$ její hranicí.
4. Δ značí Laplaceův operátor.
5. $\|\cdot\|$ je klasickou normou vektoru a tečka mezi vektory skalárním součinem.

◁

Definice 2 Pro výše uvedené vektorové funkce $\mathbf{X}$ definujeme plošný funkcional

$$A(\mathbf{X}) = \int_{\omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\| d\theta_1 d\theta_2$$

a Dirichletův funkcional

$$D(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\|^2 \right) d\theta_1 d\theta_2.$$

Definice 3 $W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$ je standardní Sobolevův prostor. Pro uzavřenou Jordanovu křivku Γ řekneme, že zobrazení $\mathbf{X} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ je třídy $\mathcal{C}(\Gamma)$, pokud $\mathbf{X} \in W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$ a pokud můžeme restrikci $\mathbf{X}|_{\partial\omega}$ vyjádřit spojitým monotónním (ne nutně ryze monotónním) zobrazením $\Psi : \partial\omega \rightarrow \Gamma$ z $\partial\omega$ na Γ (tj. každá $L_2(\partial\omega)$ -reprezentace $\mathbf{X}|_{\partial\omega}$ je shodná s Ψ až na množinu Hausdorffovy 1-dimenzionální míry nula).

3 Klíčové věty o existenci

Plošný funkcional $A(\mathbf{X})$ můžeme shora omezit funkcionallem Dirichletovým $D(\mathbf{X})$:

$$A(\mathbf{X}) \leq D(\mathbf{X}), \quad (3)$$

protože pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2.$$

V případě, že $\mathbf{X}$ je konformní parametrizace nastává v (3) rovnost. Podle Lichtensteinovy věty můžeme pro každou regulární (pro každé $(\theta_1, \theta_2) \in \omega$ existuje jediná tečná rovina plochy $\mathbf{X}(\omega)$ v $\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2)$) hladkou plochu takovou parametrizaci najít. Dále tedy dokazujeme věty o Dirichletově funkcionálu pro konformní parametrizaci plochy.

Uvedeme dvě věty, které zaručí existenci minima Dirichletova funkcionálu. Toto minimum za určitých podmínek splňuje předpoklady (2) a je tedy zároveň minimem plošného funkcionálu i řešením Plateauova problému.

Věta 1 (*Existence minima Dirichletova funkcionálu*) Pokud je $\mathcal{C}(\Gamma)$ neprázdná, pak existuje $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}(\Gamma)$ taková, že

$$D(\tilde{\mathbf{X}}) = \inf \{D(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{C}(\Gamma)\},$$

která je spojitá na $\bar{\omega}$ a harmonická (splňuje (1)) na ω . Speciálně, pro každou Jordanovu křivku konečné délky taková $\tilde{\mathbf{X}}$ existuje.

Důkaz: Uvedeme pouze stěžejní kroky důkazu. Podrobněji je důkaz popsán např v [1], kapitola 4.

1. Pomocí Fourierova rozvoje homeomorfní reprezentace Γ odvodíme postačující podmínku (nikoliv nutnou), že pro každou Jordanovu křivku konečné délky je množina $\mathcal{C}(\Gamma)$ neprázdná.
2. Ukážeme, že problém hledání minima $D(\mathbf{X})$ v $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ je ekvivalentní problému hledání minima v $\mathcal{C}^*(\Gamma)$, která obsahuje funkce z $\mathcal{C}(\Gamma)$, jež navíc splňují podmínku tří pevných bodů, tj.

$$\mathbf{X}(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = Q_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

kde $(\theta_{1,i}, \theta_{2,i})$ jsou tři různé body na $\partial\omega$ a Q_i jsou tři různé body na Γ .

3. Vybereme posloupnost $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^\infty$ zobrazení $\mathbf{X}_n \in \mathcal{C}^*(\Gamma)$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\mathbf{X}_n) = \inf \{D(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{C}^*(\Gamma)\},$$

$$\mathbf{X}_n \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\omega, \mathbb{R}^3),$$

$$\Delta \mathbf{X}_n = 0 \quad \text{v } \omega.$$

4. Pomocí Courantova-Lebesgueova lemmatu ukážeme, že okrajové hodnoty $\mathbf{X}_n|_{\partial\omega}$ každého členu minimalizující posloupnosti $\{\mathbf{X}_n\}$ jsou stejnoměrně spojitě na $\partial\omega$.
5. Tím jsou splněny předpoklady Arzelàovy-Ascoliovy věty, jejímž důsledkem je stejnoměrná konvergence posloupnosti $\mathbf{X}_n|_{\partial\omega}$ k nějakému zobrazení $\Psi \in C^0(\partial\omega, \mathbb{R}^3)$ na $\partial\omega$, které je navíc monotónní z $\partial\omega$ na Γ .
6. Protože jsou funkce $\mathbf{X}_n$ spojitě na $\bar{\omega}$ a harmonické v ω , posloupnost konverguje stejnoměrně k nějaké funkci $\mathbf{X}^*$, která je spojitá na $\bar{\omega}$, harmonická v ω a splňuje podmínku třech pevných bodů. Platí $\mathbf{X}^* \in \mathcal{C}^*(\Gamma)$ a

$$\inf \{D(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{C}^*(\Gamma)\} \leq D(\mathbf{X}^*).$$

7. Protože posloupnost i její limita jsou harmonické funkce dostáváme i obrácenou nerovnost. Tedy $D(\mathbf{X}^*) = \inf \{D(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{C}^*(\Gamma)\}$.

□

Věta 2 (*Existence řešení Plateauova problému*) Za předpokladů věty 1 navíc platí, že minimum $\mathbf{X}^* \in \mathcal{C}(\Gamma)$ Dirichletova funkcionálu $D(\mathbf{X})$ je konformní a zobrazuje topologicky $\partial\omega$ na Γ .

Důkaz: Pro přehlednost rozdělíme důkaz do několika částí a uvedeme zde pouze jejich hlavní myšlenky.

1. Zavedeme vnitřní variaci $\partial D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ Dirichletova funkcionálu pro libovolné vektorové pole $\mathbf{Y}(Y_1(\theta_1, \theta_2), Y_2(\theta_1, \theta_2)) = \mathbf{Y} \in C^1(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$ předpisem

$$\begin{aligned} \partial D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega} \left[\left(\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\|^2 \right) \left(\frac{\partial Y_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial Y_2}{\partial \theta_2} \right) + 2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial Y_2}{\partial \theta_1} \right) \right] d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

2. Ukážeme, že pokud je plocha $\mathbf{X} \in W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{Y} \in C^1(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$ je libovolné vektorové pole a $\partial D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$, pak $\mathbf{X}$ splňuje rovnosti (2) téměř všude v ω . Obráceně platí, že pokud jsou splněny rovnosti (2) téměř všude v ω pro nějakou $\mathbf{X} \in W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$, pak $\partial D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$.
3. S použitím vnitřní variace $D(\mathbf{X})$ odvodíme invariantnost Dirichletova funkcionálu vzhledem ke konformnímu zobrazení, a každé řešení $\mathbf{X}^*$ variačního problému v $\mathcal{C}(\Gamma)$ je minimální plocha.
4. Protože $\mathbf{X}^* \in \mathcal{C}(\Gamma)$ je spojitá v $\bar{\omega}$, harmonická v ω a konformní, můžeme ukázat, že určuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\partial\omega$ na Γ , které je topologickým zobrazením $\partial\omega$ na Γ .

□

4 Klíčové věty o jednoznačnosti

Věta 3 Pokud existuje vzájemně jednoznačná rovnoběžná projekce křivky Γ na rovinnou konvexní Jordanovu křivku γ , pak existuje nejvýše jedna minimální plocha až na změnu parametrizace.

Důkaz: Bez újmy na obecnosti, můžeme provést rotaci soustavy souřadné tak, že směr promítání je rovnoběžný se směrem osy z a rovinou, do níž promítáme, je rovina (x, y) .

1. x ová a y ová složka minimální plochy $\mathbf{X} \in \mathcal{C}(\Gamma)$ určují difeomorfismus ϕ z ω na konvexní oblast Ω uvnitř γ .
2. Označíme

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \circ \phi^{-1}, \quad \mathbf{Z} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

neparametrickou reprezentaci plochy $\mathbf{X}(\omega)$, která je řešením rovnice minimální plocha, ale nemá nutně spojitě okrajové hodnoty.

3. Důkaz jednoznačnosti provedeme sporem. Předpokládáme, že existují dvě různá řešení $\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{X}}$ Plateauova problému pro křivku Γ . Jim odpovídají neparametrické reprezentace $\mathbf{Z}$ a $\tilde{\mathbf{Z}}$. Pokud je projekce vzájemně jednoznačné zobrazení, pak ϕ je homeomorfismus z $\bar{\omega}$ na $\bar{\Omega}$. Důsledkem toho a důsledkem spojitosti $\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{X}}$ na $\bar{\omega}$, $\mathbf{Z}$, $\tilde{\mathbf{Z}}$ na $\bar{\Omega}$ a spojitosti rozdílu $\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}$ na $\partial\Omega$ je tento rozdíl nulový.
4. $\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}$ splňuje lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu, pro kterou platí princip maxima. Na $\bar{\Omega}$ nastává shodnost obou zobrazení.
5. Protože $\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{X}}$ jsou konformní a invertibilní, $\mathbf{X}^{-1} \circ \tilde{\mathbf{X}}$ je konformní z ω na ω . podmínka třech pevných bodů zaručuje jejich shodnost.

□

Poznámka:

1. Podmínky na vzájemně jednoznačné zobrazení lze zmírnit. Přestože křivka Γ obsahuje např. úsečku ve směru promítání, která se zobrazí do jediného bodu na γ , existuje nejvýše jedna minimální plocha.
2. Obecnější je i Nitscheova věta, která říká, že pro každou regulární analytickou křivku, jejíž celková křivost je menší než 4π existuje právě jedna minimální plocha. Její důkaz je velmi obsáhlý a můžeme ho nalézt v [4].

◁

5 Závěr

Práce byla podpořena grantem SGS ČVUT 2010 OHK1-062/10, Matematické modelování vybraných úloh ve stavebnictví.

Literatura

- [1] Dierkes U., Hildebrandt S., Küster A., Wohlrab O.: Minimal surfaces 1, Boundary value problems, Springer, Berlin, 1992.
- [2] Monterde J.: The Plateau-Bézier Problem. Mathematics of Surfaces. Lecture Notes In Computer Science, vol. 2768, Springer, 2003.
- [3] Monterde J.: Bézier surface of minimal area: The Dirichlet approach. Computer Aided Geometric Design, vol. 21, is. 2, 2004.
- [4] Nitsche J. C. C.: A New Uniqueness Theorem for Minimal Surfaces. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 52, is. 3, Springer, Berlin, 1973.
- [5] Oprea J.: The Mathematics of Soap Films: Exploration with Maple[©]. American Mathematical Society, 2000.
- [6] Vecková J. Minimal surfaces. Creative Mathematics and Informatics, vol. 16, 2007. ISSN 1584-286X.

Spektrální vlastnosti negaussovských náhodných matic

Martin Veselý *

Abstrakt

Ústředním tématem tohoto pojednání jsou spektrální vlastnosti náhodných matic. Je známo, že pravděpodobnostní rozdělení normalizovaných vlastních čísel obecných gaussovských matic je popsáno Girkovým kruhovým zákonem, jenž říká, že vlastní čísla matice leží v jednotkovém kruhu se středem v počátku komplexní roviny. Jsou-li náhodné matice symetrické, je rozdělení vlastních čísel popsáno Wignerovým polokruhovým zákonem. Dále zavádíme veličinu zvanou vzdálenost uspořádaných vlastních čísel. Tato veličina je náhodná a její hustota pravděpodobnosti je popsána tzv. Izrailevovou formulí. Článek se zabývá zobecněním zmíněných zákonů pro matice s rovnoměrným, exponenciálním a gamma rozdělením. Numerickými testy, provedenými v programu MATLAB bylo zjištěno, že vlastnosti vlastních čísel reálných negaussovských matic se odvíjejí pouze od rozptylu prvků matice, a nijak nesouvisejí s typem jejich pravděpodobnostního rozdělení. Dále je představena hypotéza o zobecnění Girkova kruhového zákona pro náhodné matice s libovolným rozdělením prvků.

1 Úvod

Jak již napovídá název, náhodné matice jsou takové matice, jejichž prvky jsou náhodné veličiny.

První zmínky o náhodných maticích se objevují ve 30. letech 20. století. Tehdy však zůstávají na okraji zájmu, jelikož neexistovala výkonná výpočetní technika, která by umožňovala studium jejich vlastností. Většímu zájmu se náhodné matice těší od 50. let v souvislosti s pracemi Eugena Wignera v oblasti matematické fyziky. Ten využívá spekter náhodných matic pro aproximaci spekter hamiltoniánu (diferenciální operátor používaný v kvantové fyzice pro popis energetických stavů částic) jader těžkých prvků. V letech osmdesátých byla objevena vazba mezi náhodnými maticemi a teorií chaosu. Od této chvíle se náhodné matice používají jako podklad pro simulaci chaotických jevů ve fyzice, ekonomii, biologii, dopravě a mnoha dalších oborech. Není bez zajímavosti, že existuje spojení mezi náhodnými maticemi a pravděpodobnostním rozdělením imaginárních částí netriviálních nul Riemannovy zeta funkce za předpokladu platnosti Riemannovy hypotézy.

2 Typy náhodných matic

Existuje několik typů náhodných matic se specifickými vlastnostmi. Podívejme se na některé z nich.

*Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze, Katedra softwarového inženýrství v ekonomii, Skupina aplikované matematiky a stochastiky při katedře matematiky

- **Obecné gaussovske matice**

Prvky těchto matic jsou náhodné veličiny se standardním normálním rozdělením (tj. $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$). Matice nevykazují žádnou specifickou strukturu, proto jsou jejich vlastní čísla obecně komplexní.

- **Matice GOE - Gaussian orthogonal ensemble**

Jedná se o symetrické matice s prvky z normálního rozdělení, přičemž pro rozdělení prvků platí následující pravidla:

$$\begin{aligned} - a_{ij} &\sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{pro } i \neq j \\ - a_{ij} &\sim N(\mu, 2\sigma^2) \quad \text{pro } i = j \end{aligned}$$

Matice jsou dále invariantní vůči transformaci ortogonální maticí $\mathbf{U}$, tzn.

$$\mathbf{A} \in \text{GOE} \Rightarrow \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \in \text{GOE}$$

- **Matice GUE - Gaussian unitary ensemble**

Jde o skupinu hermitovských matic s prvky s normálním rozdělením. Pro parametry rozdělení reálných částí prvků platí stejná pravidla jako v případě matic GOE. Imaginární části diagonálních prvků jsou nulové díky hermiticitě matice. V případě mimodiagonálních prvků, mají jejich imaginární části stejné rozdělení jako reálné. Matice jsou dále invariantní vůči transformaci unitární maticí $\mathbf{U}$, tzn.

$$\mathbf{A} \in \text{GUE} \Rightarrow \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \in \text{GUE}$$

- **Matice BRME - Band random matrix ensemble**

Tato skupina je tvořena pásovými symetrickými maticemi. Každá z matic této skupiny je charakterizována tzv. pološířkou pásu (*angl. band half-width*), ozn. b . Pro prvky matice platí $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow |i - j| \geq b$, přičemž $1 \leq b \leq n$. Rozdělení nenulových prvků je shodné se skupinou GOE.

Poznamenáváme, že v praxi se nejčastěji setkáme s maticemi, pro které platí $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Matice skupin GOE, GUE a BRME také souhrně označujeme jako tzv. *Wignerovy matice*.

3 Vlastní čísla gaussovských náhodných matic

Jelikož prvky náhodných matic jsou náhodná čísla, také vlastní čísla těchto matic jsou náhodné veličiny, a má smysl ptát se, jaké je jejich rozdělení. Podívejme se nejprve na obecné gaussovske matice. Vlastní čísla těchto matic jsou popsána tzv. *Girkovým kruhovým zákonem*. Uvažme matici řádu n s vlastním číslem $\lambda \in \mathbb{C}$ a definujme náhodnou veličinu

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

Této veličině budeme říkat normalizované vlastní číslo. Girkův zákon říká, že tato normalizovaná vlastní čísla jsou, pro případ $n \rightarrow \infty$, rovnoměrně rozptýlena v jednotkovém kruhu

se středem v počátku komplexní roviny. Z tohoto tedy plyne, že hustota pravděpodobnosti vlastních čísel je dána vztahem

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \theta(1 - |\lambda|), \quad (2)$$

kde symbol θ představuje jednorozměrnou Heavisideovu funkci určenou předpisem

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Přejděme nyní k symetrickým maticím ze skupin GOE a GUE. Uvažujme opět matici řádu n . Díky hermiticitě (resp. symetrii) jsou jejich vlastní čísla reálná. Hustota pravděpodobnosti vlastních čísel je, za předpokladu, že pro parametry rozdělení prvků matice platí $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, popsána tzv. *Wignerovým polokruhovým zákonem*:

$$f(\lambda) = \frac{\theta(2\sqrt{n} - |\lambda|)}{2\pi n} \sqrt{4n - \lambda^2}. \quad (4)$$

Poznamenáváme, že název *polokruhový* je odvozen od tvaru hustoty pravděpodobnosti, jenž představuje rovnici polokružnice. Ze vztahu (4) je patrné, že maximální hodnota vlastních čísel, a tudíž také jejich rozptyl, se odvíjí od řádu matice. Uvážíme-li konstantní hodnotu řádu matice, bude maximální hodnota vlastního čísla záviset na rozptylu prvků matice. Vztah figurující ve Wignerově zákoně je pak nutné příslušně modifikovat. Pro rozptyl vlastních čísel matic GOE a GUE platí vztah

$$\text{var}(\lambda) = \sigma^2(n + 1), \quad (5)$$

kde σ^2 je rozptyl prvků matice. Uveďme ještě podobu Wignerova zákona pro matice BRME

$$f(\lambda) = \frac{\theta(c - |\lambda|)}{\pi c^2} \sqrt{c^2 - \lambda^2}, \quad (6)$$

kde

$$c^2 = \frac{4b}{n}(2n - b + 1). \quad (7)$$

Jelikož jsou vlastní čísla matic ze skupin GOE, GUE a BRME reálná, lze je uspořádat dle velikosti. Rozdíl po sobě jdoucích vlastních čísel je opět náhodnou veličinou, neboť také vlastní čísla jsou náhodná. Má tedy smysl ptát se, jak vypadá hustota pravděpodobnosti rozdělení této vzdálenosti (*angl. eigenvalues spacing distribution*). Dobrou aproximací je tzv. *Izrailevova formule*:

$$f(r) = \theta(r) A \left(\frac{\pi r}{2} \right)^\beta e^{-\frac{\beta \pi^2}{16} r^2 - (B - \frac{\beta \pi}{4}) r}. \quad (8)$$

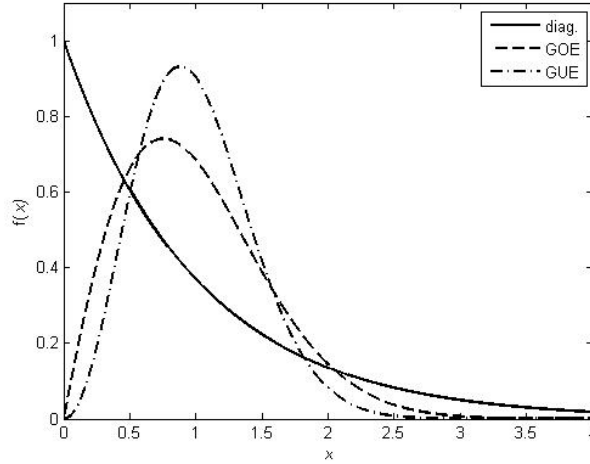
Parametry A a B jsou normalizační konstanty zajišťující, aby Izrailevův vztah byl hustotou pravděpodobnosti, a aby střední hodnota vzdálenosti vlastních čísel byla rovna jedné. Další parametr, tj. β , charakterizuje strukturu matice. Pro jednotlivé skupiny matic jsou hodnoty β následující:

- $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$ pro matice typu BRME, přičemž pro velká n a b platí vztah

$$\beta = \frac{1, 4b^2}{n + 1, 4b^2}. \quad (9)$$

V případě diagonálních matic je $\beta = 0$.

- $\beta = 1$ pro matice typu GOE
- $\beta = 2$ pro matice typu GUE



Obrázek 1: Průběh hustoty pravděpodobnosti vzdálenosti uspořádaných vlastních čísel některých typů náhodných matic

Upozorňujeme, že Izrailevův vztah je pouze aproximací skutečné hustoty pravděpodobnosti vzdálenosti vlastních čísel. Existují ještě další více či méně přesné aproximace této hustoty. Skutečná podoba vztahu však prozatím nebyla analyticky nalezena.

Průběh hustoty pravděpodobnosti popsané Izrailevovou formulí pro diagonální matice a matice skupin GOE a GUE lze nalézt na obrázku 1.

4 Vlastnosti negaussovských náhodných matic

Zabývejme se nyní otázkou, zda zákony uvedené v sekci 3 platí také pro matice s jiným rozdělením prvků, než s gaussovským. Odpověď na tuto otázku dávají numerické testy provedené v programu Mathworks MATLAB. Testovány byly matice jak se spojitě (rovnoměrně, exponenciálně a gamma), tak diskrétně (alternativně a binomicky) rozdělenými prvky. Poznamenáváme, že zákony byly ověřovány pro matice řádu 1000, přičemž bylo vždy vygenerováno 10000 vlastních čísel.

Pro úplnost ještě uvedme podobu hustot pravděpodobnosti, resp. pravděpodobnostních funkcí

použitých pravděpodobnostních rozdělení.

$$f(x) = \frac{\theta(x-a)\theta(b-x)}{b-a} \quad (\text{rovnorné})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{gaussovské})$$

$$f(x) = \theta(x-\mu) \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x-\mu}{\delta}} \quad (\text{exponenciální})$$

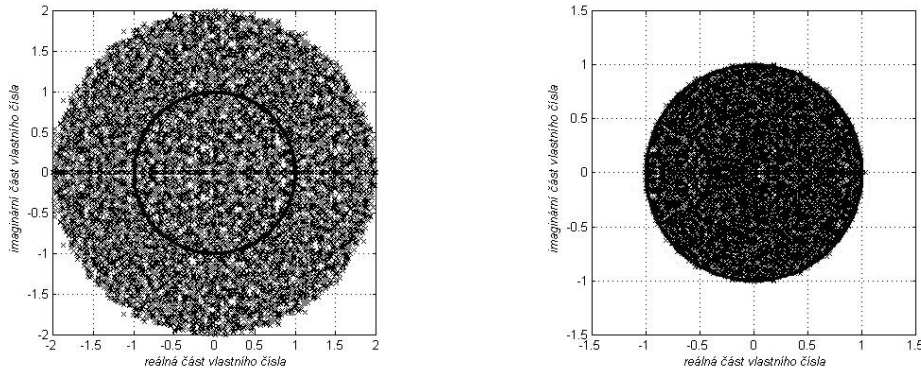
$$f(x) = \theta(x) \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{b^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}} \quad (\text{gamma})$$

$$P(x) = \begin{cases} p^x p^{1-x} & \text{pro } x \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (\text{alternativní})$$

$$P(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{pro } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (\text{binomické})$$

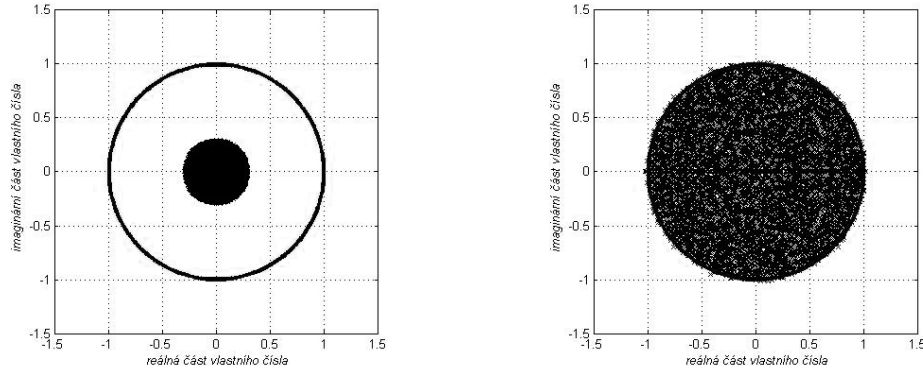
4.1 Girkův kruhový zákon

Začneme s testem Girkova zákona. Uvažme nejprve matici s prvky z gamma rozdělení s různými hodnotami parametrů a a b . Výsledek testu je patrný z obrázku 2. Levá část odpovídá případu $a = 4$ a $b = 1$, pravá pak případu $a = 0,25$ a $b = 2$. Z obrázku je zřejmé, že poloměr kruhu, ve kterém se nachází normalizovaná vlastní čísla není vždy roven jedné, ale závisí na parametrech rozdělení. Ze série dalších testů bylo vypořádováno, že poloměr je dán přibližně vztahem $\sqrt{ab}$, což je směrodatná odchylka prvků matice, neboť rozptyl veličiny s gamma rozdělením je určen vztahem ab^2 . Podívejme se, zda podobné tvrzení platí taktéž pro matice s



Obrázek 2: Test Girkova zákona pro matice s prvky s gamma rozdělením s parametry $a = 4$ a $b = 1$ (vlevo), resp. $a = 0,25$ a $b = 2$ (vpravo)

exponenciálně či rovnoměrně rozdělenými prvky. Výsledek je vidět na obrázku 3. Parametry rozdělení prvků matice byly $a = 0$ a $b = 1$ v případě rovnoměrného, $\mu = 0$ a $\delta = 1$ v případě exponenciálního rozdělení. Vzhledem k tomu, že rozptyly prvků matice jsou $\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$, resp. $\delta^2 = 1$, poloměr kruhu, v němž se nacházejí vlastní čísla, skutečně odpovídá směrodatné odchylce prvků. Další testy byly provedeny pro diskrétně rozdělené prvky matice. Také v tomto případě je pozorovatelný výše popisovaný jev. Je pozoruhodné, že tento se vyskytuje také u



Obrázek 3: Test Girkova zákona pro matice s prvky s rovnoměrným (vlevo) a exponenciálním (vpravo) rozdělením

matic s alternativně rozdělenými prvky, neboť jejich hodnoty jsou pouze 0 či 1. Na základě pozorování můžeme tedy vyslovit hypotézu zobecňující zákon o vlastních číslech obecných náhodných matic.

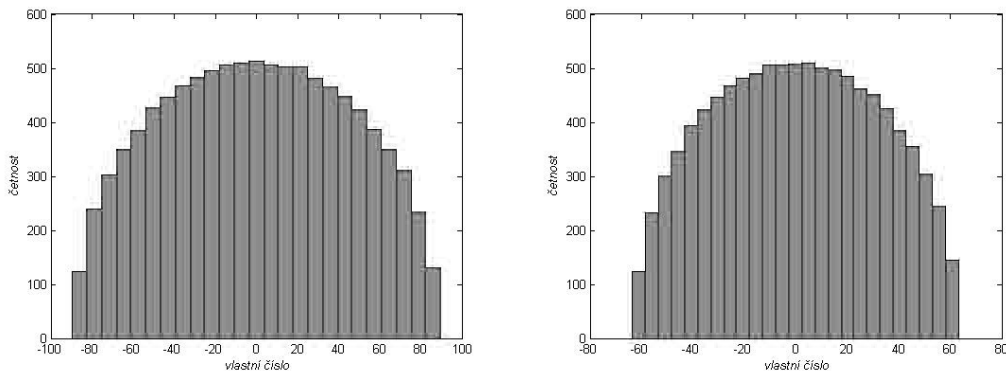
Zobecněný Girkův kruhový zákon:

Nechť je dána obecná náhodná matice řádu n s prvky z libovolného rozdělení s existujícím a konečným rozptylem $\text{var}X$. Pak pro $n \rightarrow \infty$ jsou normalizovaná vlastní čísla této matice rovnoměrně rozmístěna v kruhu se středem v počátku komplexní roviny, přičemž poloměr kruhu odpovídá hodnotě $\sqrt{\text{var}X}$. Hustota pravděpodobnosti vlastních čísel je pak dána vztahem

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi \text{var}X} \theta(\sqrt{\text{var}X} - |\lambda|). \quad (10)$$

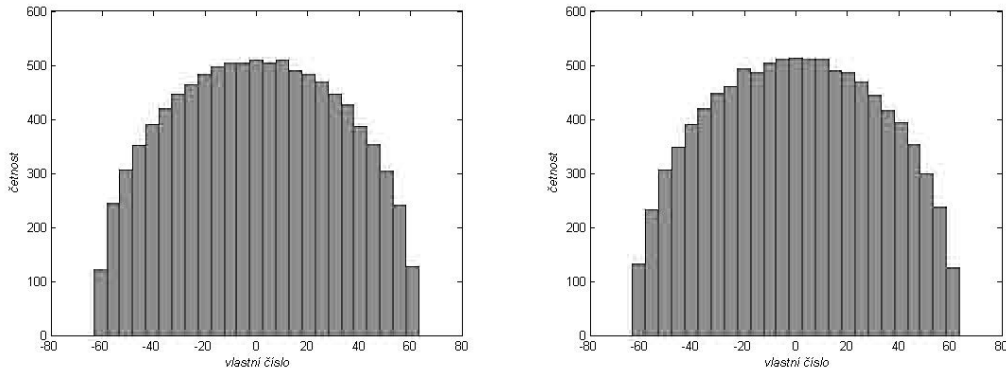
4.2 Wignerův polokruhový zákon

Přejdeme nyní k ověření platnosti Wignerova polokruhového zákona pro negaussovské symetrické matice. Uvažme opět matice s prvky z gamma rozdělení. Výsledek testu je zřejmý z obrázku 4. Parametry rozdělení byly následující $a = 2$ a $b = 1$ (levý histogram), resp. $a = 4$



Obrázek 4: Test Wignerova polokruhového zákona pro matice s prvky z gamma rozdělení s parametry $a = 2$ a $b = 1$ (vlevo), resp. $a = 4$ a $b = 0,5$ (vpravo)

a $b = 0,5$ (pravý histogram). Je evidentní, že tvar hustoty pravděpodobnosti odpovídá polokruhu, avšak v případě levého histogramu není splněna předpověď o maximální hodnotě vlastního čísla. V případě pravého histogramu však tato předpověď splněna je. Tato skutečnost je nejspíše způsobena rozdílnými rozptyly prvků matice, jenž v prvním případě činí 2, v druhém 1. Můžeme tedy předpokládat, že původní podoba Wignerova zákona zůstane v platnosti v případě jednotkového rozptylu prvků matice. V případě vyššího, resp. nižšího rozptylu prvků, bude také vyšší, resp. nižší rozpyl vlastních čísel, což je ve shodě se vztahem (5). Ověříme, tuto hypotézu také pro další rozdělení, přičemž parametry volíme tak, aby rozptyl prvků matice byl jednotkový. Výsledek testu shrnuje obrázek 5. Z něj je patrné, že předpověď



Obrázek 5: Test Wignerova polokruhového zákona pro matice s prvky z rovnoměrného (vlevo) a exponenciálního (vpravo) rozdělení

Wignerova polokruhového zákona zůstává v platnosti také pro matice s rovnoměrně či exponenciálně rozdělenými prvky s jednotkovým rozptylem. Tyto výsledky nás vedou k formulaci následující hypotézy.

Zobecněný Wignerův polokruhový zákon pro symetrické matice:

Nechť je dána náhodná symetrická nepásová matice s prvky s libovolným rozdělením, přičemž rozptyl prvků je jednotkový. Potom hustota pravděpodobnosti vlastních čísel je popsána Wignerovým polokruhovým zákonem pro gaussovske matice skupiny GOE.

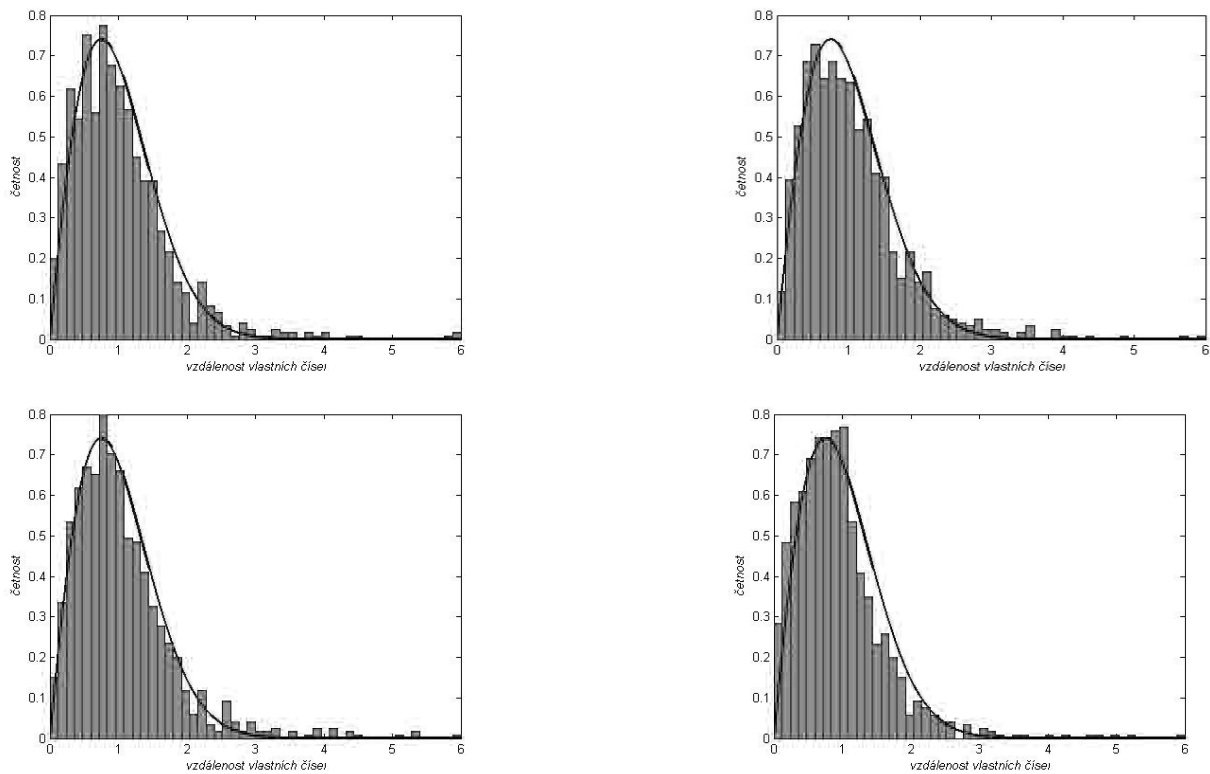
4.3 Vzdálenosti vlastních čísel

Přejdeme nyní k ověření posledního zákona týkajícího se vlastních čísel. Vzhledem k faktu, že hustota pravděpodobnosti vzdálenosti vlastních čísel se odvíjí od jejich rozdělení (jedná se o uspořádání a rozdíl náhodných veličin), zůstane nejspíše Izrailevova formule v platnosti pro případ matic s prvky s jednotkovým rozptylem. Výstup numerického testu shrnuje obrázek 6. Pro ilustraci uvádíme také test pro matice s normálně rozdělenými prvky. Z obdržených výsledků je zřejmé, že rozdělení vzdáleností vlastních čísel přibližně odpovídá předpovědi Izrailevovy formule pro případ, kdy $\beta = 1$. Toto nás opět vede k hypotéze o zobecnění Izrailevova vzorce.

Zobecněná Izrailevova formule pro symetrické matice:

Nechť je dána symetrická nepásová matice s prvky s libovolným rozdělením a jednotkovým rozptylem. Potom vztah (8) pro případ, kdy $\beta = 1$, představuje hustotu pravděpodobnosti vzdálenosti uspořádaných vlastních čísel matice.

V tabulce 1 uvádíme parametry rozdělení prvků matic použitých při testování zobecněné Izrailevovy formule.



Obrázek 6: Test Izrailevovy formule pro matice s prvky z rovnoměrného (vlevo nahoře), exponenciálního (vpravo nahoře), gamma (vlevo dole) a normálního (vpravo dole) rozdělení

Rozdělení	Parametry
Rovnoměrné	$a = 0, b = \sqrt{12}$
Normální	$\mu = 0, \sigma^2 = 1$
Exponenciální	$\mu = 0, \delta = 1$
Gamma	$a = 4, b = 0,5$

Tabulka 1: Parametry prvků rozdělení použitých při testu Izrailevovy formule

Závěr

Z výsledků numerických testů provedených v programu Mathworks MATLAB plyne, že tvrzení výše jmenovaných zákonů, popisujících chování gaussovských náhodných matic, je možné zobecnit také pro matice negaussovské. Testy byly sice provedeny pouze pro některé typy běžně se vyskytujících rozdělení náhodných veličin, přesto však lze usuzovat na platnost zmiňovaných tvrzení pro jakékoliv rozdělení. Samozřejmě je nutné provést ještě řadu dalších testů, případně se pokusit o analytické důkazy nastíněných hypotéz.

Velmi zajímavý je výsledek v případě rovnoměrného rozdělení, jelikož toto rozdělení lze na počítačích generovat snadněji a rychleji, než rozdělení normální (čísla z normálního rozdělení se generují na základě náhodných čísel z rozdělení rovnoměrného - např. Box – Müllerova transformace). Toto v konečném důsledku může vést ke zrychlení numerických simulací postavených na náhodných maticích.

Seznam použité literatury

- [1] F.M. Izrailev, G. Casati, L. Molinari, *Scaling properties of the eigenvalue spacing distribution for band random matrices*, Journal of Physics A: Mathematical and general, **24**, **20**, (1991) 4755 - 4762
- [2] F.M. Izrailev a R. Scharf, *Dyson's Coulomb gas on a circle and intermediate eigenvalue statistics*, Journal of Physics A: Mathematical and general, **23**, **6**, (1990) 963 - 977
- [3] M.L. Mehta, *Random matrices*, Amsterdam: Elsevier/Academic Press, (2004)
- [4] R. Hindls, S. Hronová, J. Seger, J. Fisher, *Statistika pro ekonomy, 8.vydání*, Praha: Professional publishing, (2007)
- [5] E.W. Weisstein, *Girko's circular law*,
<http://mathworld.wolfram.com/GirkosCircularLaw.html>, [cit. 2009-11-10]

Editor	Stanislav Olivík
Název díla	Sborník 18. konference studentů v matematice na školách VŠTEZ
Vydalo	České vysoké učení technické v Praze
Zpracovala	Fakulta stavební
Kontaktní adresa	Katedra matematiky, Stavební fakulta ČVUT v Praze, Thákurova 7, Praha 6
Tel.	+420 22435 4442
Vytisklo	Vydavatelství ČVUT v Praze
Adresa tiskárny	Thákurova 1, 160 41, Praha 6
Počet stran	114
Vydání	1.

Neprodejné.

Praha 2010