PŘÍKLADY K MATEMATICE 2

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. Funkce více proměnných

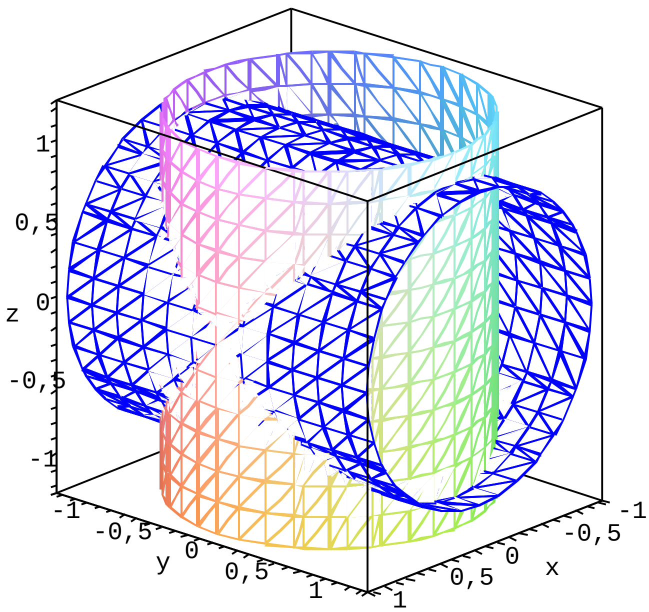
1.1. Základní pojmy funkce více proměnných.

Příklad 1.1. *Určeme definiční obor funkce tří proměnných* $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2 - z^2}$.

Řešení: Definičním oborem funkce f bude taková podmnožina bodů z $\mathbb{R}^3$, pro které má předpis zadávající funkci smysl. (Víme, že $\sqrt{t}$ je definována pouze pro $t \geq 0$.) Musí tedy platit

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 1 - x^2 - z^2 \geq 0, \quad \text{tj.} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + z^2 \leq 1.$$

Definičním oborem funkce f je tedy uzavřený průnik dvou rotačních válců s osami z a y a poloměry 1 (Obr. 1).



Obr. 1

Příklad 1.2. *Určete definiční obor* $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Výsledek: $\langle 0, +\infty) \times \langle 0, +\infty) \times \langle 0, +\infty)$

Date:

Příklad 1.3. *Určete definiční obor* $f(x, y, z) = \ln(xyz)$.
Výsledek: *Body z* $\mathbb{R}^3$, *pro které platí* $xyz > 0$, *tj. body ležící v 1.,3.,6. a 8. oktantu a současně* $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$

Příklad 1.4. *Určete definiční obor* $f(x, y, z) = \arcsin x + \arccos y + \operatorname{arctg} z$.
Výsledek: $\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times (-\infty, +\infty)$

Příklad 1.5. *Určete definiční obor* $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.
Výsledek: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, *tj. všechny body koule se středem v počátku a poloměrem* 1

Příklad 1.6. *Určete definiční obor* $f(x, y, z) = \frac{\ln(4-x^2-y^2-z^2)}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2-4}}$.
Výsledek: $x^2/4 + y^2 + z^2/4 > 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 < 4$, *tj. všechny body, které jsou současně vnější body elipsoidu se středem v počátku a poloosami* $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$ *a vnitřní body koule se středem v počátku a poloměrem* 2

Příklad 1.7. *Určete definiční obor vektorové funkce*
$\mathbf{F}(x) = (\arcsin(x - 2), \ln(x^2 - 4))$. ***Výsledek:*** $(2, 3\rangle$

Příklad 1.8. *Určete definiční obor vektorové funkce*
$\mathbf{F}(x, y) = (\arcsin x + \arccos y, \arcsin(x + y))$.
Výsledek: *Uzavřený šestiúhelník s vrcholy* $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$

Příklad 1.9. *Najděme vrstevnice (úrovňové plochy) funkce* $f(x, y, z) = 2x-y+2z$.

Řešení: Funkce f je definována v celém $\mathbb{R}^3$ a oborem jejích funkčních hodnot je $\mathbb{R}$. Pro dané $q \in \mathbb{R}$ je tedy její vrstevnicí rovina

$$q = 2x - y + 2z.$$

Všechny vrstevnice pak tvoří systém rovnoběžných rovin $2x - y + 2z - q = 0$, $q \in \mathbb{R}$.

Příklad 1.10. *Najděte vrstevnice funkce* $f(x, y, z) = x + y + z$.
Výsledek: *Rovnoběžné roviny* $x + y + z - q = 0$, $q \in \mathbb{R}$

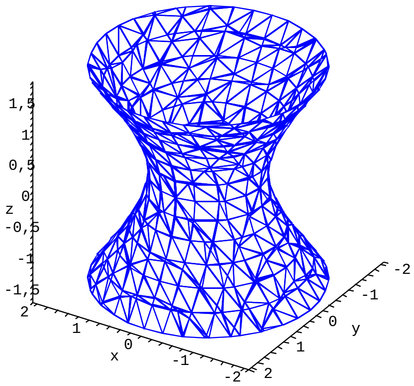
Příklad 1.11. *Najděte vrstevnice funkce* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
Výsledek: *Soustředné kulové plochy* $x^2 + y^2 + z^2 = q$, $q \geq 0$.

Příklad 1.12. *Najděte vrstevnice funkce* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
Výsledek: *Pro* $q = 0$ *rotační kužel* $z^2 = x^2 + y^2$, *pro* $q > 0$ *(Obr. 2) a pro* $q < 0$ *(Obr. 3) rotační hyperboloidy.*

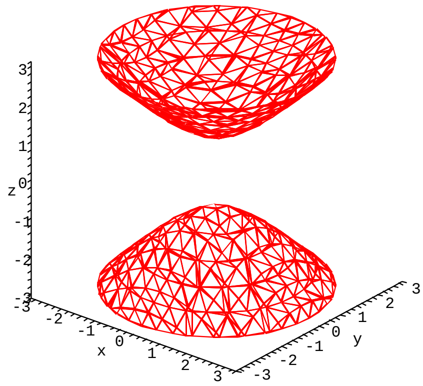
Příklad 1.13. *Funkce* f *je skalární funkce tří proměnných taková, že* $\nabla f(2, 1, 3) = (4, -1, 2)$. *Dále funkce* $\boldsymbol{\psi}$ *je vektorová funkce jedné proměnné taková, že* $\boldsymbol{\psi}(1) = (2, 1, 3)$ *a* $\boldsymbol{\psi}'(1) = (-1, 2, 1)$. *Vypočítejme derivaci funkce* $h(t) = f(\boldsymbol{\psi}(t))$ *v bodě* $t = 1$.

Řešení: Pro derivaci funkce složené z vnější skalární funkce f a vnitřní vektorové funkce $\boldsymbol{\psi}$ platí

$$h'(t) = \nabla f(\boldsymbol{\psi}(t))\boldsymbol{\psi}'(t)$$



Obr. 2



Obr. 3

a to znamená, že všechny potřebné informace k výpočtu derivace $h'(1)$ máme k dispozici.

Pro $t = 1$ je $\boldsymbol{\psi}(1) = (2, 1, 3)$ a dále víme, že $\nabla f(2, 1, 3) = (4, -1, 2)$. Známe také $\boldsymbol{\psi}'(1) = (-1, 2, 1)$ a tedy

$$h'(1) = \nabla f(\boldsymbol{\psi}(1))\boldsymbol{\psi}'(1) = \nabla f(2, 1, 3)\boldsymbol{\psi}'(1) = (4, -1, 2) \cdot (-1, 2, 1) = -4.$$

Příklad 1.14. *Funkce f je skalární funkce dvou proměnných taková, že $\nabla f(1, 2) = (-1, 3)$. Dále funkce $\boldsymbol{\psi}$ je vektorová funkce jedné proměnné taková, že $\boldsymbol{\psi}(2) = (1, 2)$ a $\boldsymbol{\psi}'(2) = (2, 1)$. Vypočítejme derivaci funkce $h(t) = f(\boldsymbol{\psi}(t))$ v bodě $t = 2$.*

Výsledek: 1

Příklad 1.15. *Funkce f je skalární funkce tří proměnných taková, že $\nabla f(2, -1, 3) = (1, 2, 3)$. Dále funkce $\boldsymbol{\psi}$ je vektorová funkce jedné proměnné taková, že $\boldsymbol{\psi}(3) = (2, -1, 3)$ a $\boldsymbol{\psi}'(3) = (1, 2, -1)$. Vypočítejme derivaci funkce $h(t) = f(\boldsymbol{\psi}(t))$ v bodě $t = 3$.*

Výsledek: 2

Příklad 1.16. *Funkce f je skalární funkce dvou proměnných taková, že $\nabla f(1, 1) = (2, 1)$ a $\boldsymbol{\psi}$ je vektorová funkce jedné proměnné taková, že $\boldsymbol{\psi}(1) = (1, 1)$ a $\boldsymbol{\psi}'(1) = (1, 2)$. Vypočítejme derivaci funkce $h(t) = f(\boldsymbol{\psi}(t))$ v bodě $t = 1$.*

Výsledek: 4

Příklad 1.17. *Funkce f je skalární funkce dvou proměnných taková, že $\nabla f(4, 2) = (8, 4)$ a $\boldsymbol{\psi}$ je vektorová funkce jedné proměnné taková, že $\boldsymbol{\psi}(2) = (4, 2)$ a $\boldsymbol{\psi}'(2) = (4, 1)$. Vypočítejme derivaci funkce $h(t) = f(\boldsymbol{\psi}(t))$ v bodě $t = 2$.*

Výsledek: 36

Příklad 1.18. *Vypočítejme derivaci funkce $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 - xz^3$ v bodě $P = (1, 2, -1)$ ve směru vektoru $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$.*

Řešení: Pro derivaci funkce f v bodě P ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u}$ platí

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{u}} = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u},$$

kde $\nabla f(P)$ je gradient funkce f v bodě P, tj.

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, \frac{\partial f(P)}{\partial z} \right).$$

Je

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = 2xy - z^3 \Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = 5,$$

$$\frac{\partial f(P)}{\partial y} = x^2 + z^2 \Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = 2,$$

$$\frac{\partial f(P)}{\partial z} = 2yz - 3xz^2 \Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = -7$$

a $\nabla f(P) = (5, 2, -7)$.

Vektor $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$, v jehož směru máme počítat derivaci, však není jednotkový. Nahradíme ho tedy vektorem $\mathbf{u}$, kde

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{3}(2, 2, 1),$$

tj. jednotkovým vektorem ve směru vektoru $\mathbf{v}$. Potom

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{u}} = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{3}(5, 2, -7) \cdot (2, 2, 1) = \frac{7}{3}.$$

Příklad 1.19. *Derivace funkce f dvou proměnných v bodě P ve směru vektoru $\mathbf{u}_1 = (-1, 0)$ je 2 a derivace této funkce ve směru vektoru $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$ je $\sqrt{3}$. Najděme derivaci funkce f ve směru vektoru $\mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.*

Řešení: K nalezení derivaci funkce f ve směru vektoru $\mathbf{u}_3$ potřebujeme znát $\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}\right)$. Víme, že

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{u}_1} = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y} \right) \cdot (-1, 0) = 2$$

a

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{u}_2} = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}_2 = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y} \right) \cdot (0, 1) = \sqrt{3}.$$

Je tedy

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = -2 \quad \frac{\partial f(P)}{\partial y} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \nabla f(P) = (-2, \sqrt{3})$$

a tedy

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{u}_3} = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}_3 = (-2, \sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

V příkladech 1.20 – 1.25 vypočítejte derivaci funkce f v bodě P ve směru vektoru $\mathbf{u}$.

Příklad 1.20. $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 5y^3 - 1,\ P = (2, 1),\ \mathbf{u} = (3, -2).$

Výsledek: $10/\sqrt{13}$

Příklad 1.21. *$f(x,y,z) = 3x^2yz + 4xy^2z + 5xyz^2$, $P = (1,1,1)$, $\mathbf{u} = (6,-6,3)$.*
Výsledek: 5

Příklad 1.22. *$f(x,y) = \ln(x+y)$, $P = (1,2)$, $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ je směrový vektor tečny paraboly $y^2 = 4x$ sestrojené v bodě P ($u_1 < 0$).* ***Výsledek:*** $-\sqrt{2}/3$

Příklad 1.23. *$f(x,y) = \frac{x^2}{y}$, $P = (\sqrt{3},-3)$, $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ je směrový vektor tečny kružnice $x^2+y^2+4y = 0$ sestrojené v bodě P ($u_2 < 0$).* ***Výsledek:*** $\sqrt{3}/2$

Příklad 1.24. *$f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$, $P = \left(\frac{1}{2},2\right)$, $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ je směrový vektor normály hyperboly $xy = 1$ sestrojené v bodě P ($u_2 > 0$).* ***Výsledek:*** $\sqrt{255}/34$

Příklad 1.25. *$f(x,y,z) = xy^2+z^3-xyz$, $P = (1,1,2)$, $\mathbf{u}$ svírá se souřadnicovými osami úhly $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/3$.* ***Výsledek:*** 5

Příklad 1.26. *Derivace funkce dvou proměnných f v bodě P ve směru vektoru $\mathbf{u}_1 = (1,1)$ je $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ a derivace této funkce ve směru vektoru $\mathbf{u}_2 = (2,3)$ je $-\frac{1}{\sqrt{13}}$. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě P ve směru vektoru $\mathbf{u}_3 = (1,2)$.*
Výsledek: 0

Příklad 1.27. *Derivace funkce tří proměnných f v bodě P ve směru vektoru $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0)$ je $-\sqrt{2}$, ve směru vektoru $\mathbf{u}_2 = (1,0,-1)$ je $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ a ve směru vektoru $\mathbf{u}_3 = (1,-1,1)$ je $\frac{4}{\sqrt{3}}$. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě P ve směru vektoru $\mathbf{u}_4 = (2,2,1)$.* ***Výsledek:*** 2/3

Příklad 1.28. *Derivace funkce tří proměnných f v bodě P ve směru vektoru $\mathbf{u}_1 = (2,3,1)$ je $\frac{6}{\sqrt{14}}$ a ve směru vektoru $\mathbf{u}_2 = (-1,-3,1)$ je $-\frac{6}{\sqrt{11}}$. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě P ve směru vektoru $\mathbf{u}_3 = (2,2,2)$.*
Výsledek: $2/\sqrt{3}$

Příklad 1.29. *Najděme rovnici tečné roviny k ploše $x^2-2y^2+z^2 = 3$ rovnoběžné s rovinou $\varrho : x+2y+2z-1 = 0$.*

Řešení: Pro nalezení rovnice tečné roviny $ax+by+cz+d = 0$ potřebujeme znát např. normálový vektor této roviny a jeden bod, který v této rovině leží. Protože hledaná tečná rovina má být rovnoběžná s rovinou ϱ, musí být jejich normálové vektory rovnoběžné, tj.

$$(a,b,c) = k(1,2,2), \quad k \in \mathbb{R}.$$

O ploše $x^2-2y^2+z^2 = 3$ můžeme předpokládat, že je vrstevnicí (úrovňovou plochou) funkce tří proměnných $f(x,y,z) = x^2-2y^2+z^2$ pro $q = 3$. Dále víme, že gradient funkce v každém bodě P je normálovým vektorem vrstevnice procházející tímto bodem a je tedy normálovým vektorem tečné roviny v bodě P. Tedy

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, \frac{\partial f(P)}{\partial z}\right) = (a,b,c).$$

Nechť tedy $P = (x_0, y_0, z_0)$ je dotykový bod plochy a tečné roviny. Potom

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(P)}{\partial x} &= 2x_0, \quad \Rightarrow 2x_0 = k \quad \Rightarrow x_0 = \frac{k}{2}, \\ \frac{\partial f(P)}{\partial y} &= -4y_0, \quad \Rightarrow -4y_0 = 2k \quad \Rightarrow y_0 = -\frac{k}{2}, \\ \frac{\partial f(P)}{\partial z} &= 2z_0, \quad \Rightarrow 2z_0 = 2k \quad \Rightarrow z_0 = k. \end{aligned} \tag{1}$$

Protože bod P leží na ploše $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$, musí jeho souřadnice splňovat rovnici plochy, tj.

$$\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} + k^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 2.$$

Z (1) pak dostáváme dva dotykové body $P_1 = (1, -1, 2)$ a $P_2 = (-1, 1, -2)$ a to znamená, že k dané ploše existují dvě tečné roviny rovnoběžné s rovinou ϱ

$$x + 2y + 2z \pm 3 = 0.$$

V příkladech 1.30 – 1.32 najděte rovnice tečné roviny a normály k dané ploše v bodě P.

Příklad 1.30. $x^2 - 3y^2 - z = 0$, $P = (-3, 1, 6)$.
Výsledek: $6x + 6y + z + 6 = 0$, $X = P + t(6, 6, 1)$

Příklad 1.31. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $P = (3, 4, 12)$.
Výsledek: $3x + 4y + 12z - 169 = 0$, $X = P + t(3, 4, 12)$

Příklad 1.32. $\mathrm{e}^{xz} + yz = 0$, $P = (0, -1, 1)$.
Výsledek: $x + y - z + 2 = 0$, $X = P + t(1, 1, -1)$

Příklad 1.33. *Najděte rovnice tečných rovin k ploše* $x^2 + y^2 + 2z^2 = 7$, *které jsou rovnoběžné s rovinou* $2x + y - 2z + 1 = 0$. ***Výsledek:*** $2x + y - 2z \pm 7 = 0$

Příklad 1.34. *Najděte rovnice tečných rovin k ploše* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xz - 32 = 0$, *které jsou rovnoběžné s rovinou* $x + 4y - 3z = 0$.
Výsledek: $x + 4y - 3z \pm 16 = 0$

Příklad 1.35. *Najděte rovnice tečných rovin k ploše* $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8$, *které jsou rovnoběžné s rovinou* $3x - 4y - z = 0$.
Výsledek: $3x - 4y - z \pm 8 = 0$

1.2. Extrémy funkcí více proměnných.

1.2.1. *Lokální extrémy funkcí více proměnných.*

Příklad 1.36. *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x,y) = 4x^3 + 8y^3 - 24xy + 3$.

Řešení: Funkce f je spojitá v celém $\mathbb{R}^2$ a má také v celém $\mathbb{R}^2$ vlastní derivace. To znamená, že lokální extrémy může mít pouze ve svých stacionárních bodech, tj. v bodech kde se obě první parciální derivace rovnají nule.

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 12x^2 - 24y, && \text{tj.} && x^2 - 2y = 0, \\ \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 24y^2 - 24x, && \text{tj.} && y^2 - x = 0. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li z první rovnice $y = \frac{x^2}{2}$ a dosadíme-li do druhé rovnice, dostaneme $x(x^3 - 4) = 0$. Odtud pak $x = 0 \wedge y = 0$ a $x = \sqrt[3]{4} \wedge y = \sqrt[3]{2}$.

Funkce f má tedy dva stacionární body $P_1 = (0,0)$ a $P_2 = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. O tom, zda v těchto bodech má funkce lokální extrém, rozhodneme na základě znaménka determinantu

$$D = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

tj. znaménka výrazu

$$\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y}\right)^2$$

v jednotlivých stacionárních bodech. Funkce f má v bodě P extrém pouze v případě, že je $D > 0$. V případě, že je $D < 0$, funkce v bodě P extrém nemá.

Předně je

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 24x, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 48y, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -24.$$

Pro $P_1 = (0,0)$ dostáváme dosazením do (2)

$$D = \det \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} = -(-24)^2 = -24^2 < 0 \Rightarrow f \text{ v bodě } P_1 \text{ nemá extrém.}$$

Pro $P_2 = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ dostáváme dosazením do (2)

$$D = \det \begin{pmatrix} 24\sqrt[3]{4} & -24 \\ -24 & 48\sqrt[3]{2} \end{pmatrix} = 1728 > 0$$

a funkce f má v bodě $P_2 = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ extrém. O tom, zda má funkce v tomto bodě lokální maximum nebo minimum, rozhodneme na základě znaménka druhé derivace $\partial^2 f(P)/\partial x^2$. Platí

$$\begin{aligned} f_{xx}(P) > 0 &\Rightarrow f \text{ má v bodě } P \text{ lokální minimum,} \\ f_{xx}(P) < 0 &\Rightarrow f \text{ má v bodě } P \text{ lokální maximum.} \end{aligned}$$

V našem případě je

$$\frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x^2} = 24\sqrt[3]{4} > 0$$

a funkce f má v bodě $P_2 = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ ostré lokální minimum. Hodnota tohoto minima je $f(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) = -112$.

Příklad 1.37. *Najděme lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy(6-x-y)$.*

Řešení: Funkce f má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy může mít tedy pouze ve stacionárních bodech. Tedy

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y(6-x-y) - xy = y(6-2x-y), \\ \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= x(6-x-y) - xy = x(6-x-2y), \end{aligned}$$

tj.

$$y(6-2x-y) = 0, \tag{3}$$

$$x(6-x-2y) = 0. \tag{4}$$

Při řešení soustavy (3),(4) budeme postupovat následovně:

(i) Nechť je $x = 0 \wedge y = 0$. Potom je splněna rovnice (3) i (4) a bod $P_1 = (0,0)$ je stacionární bod funkce f.

(ii) Nechť je $x = 0 \wedge y \neq 0$. Potom je splněna rovnice (4). Aby byla splněna rovnice (3) musí být $(6-2x-y) = 0$. Podle předpokladu je však $x = 0$ a tedy $y = 6$ a bod $P_2 = (0,6)$ je stacionární bod funkce f.

(iii) Nechť je $x \neq 0 \wedge y = 0$. Potom je splněna rovnice (3). Aby byla splněna rovnice (4) musí být $(6-x-2y) = 0$. Podle předpokladu je však $y = 0$ a tedy $x = 6$ a bod $P_3 = (6,0)$ je stacionární bod funkce f.

(iv) Nechť je $x \neq 0 \wedge y \neq 0$. Potom, aby byla splněna rovnice (3), resp. rovnice (4), musí být $(6-2x-y) = 0$, resp. $(6-x-2y) = 0$. Další stacionární bod tedy dostaneme řešením soustavy

$$\begin{aligned} 6-2x-y &= 0, \\ 6-x-2y &= 0. \end{aligned}$$

Odtud $P_4 = (2,2)$.

Je zřejmé, že další možnost již nemůže nastat.

Pro další vyšetření extrémů potřebujeme druhé derivace funkce f.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -2y, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -2x, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 6-2x-2y.$$

Pro $P_1 = (0,0)$ dostáváme

$$D = \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -36 < 0 \quad \Rightarrow \text{ funkce nemá v bodě } P_1 = (0,0) \text{ extrém.}$$

Pro $P_2 = (0,6)$ dostáváme

$$D = \det \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = -36 < 0 \quad \Rightarrow \text{ funkce nemá v bodě } P_2 = (0,6) \text{ extrém.}$$

Pro $P_3 = (6,0)$ dostáváme

$$D = \det \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} = -36 < 0 \quad \Rightarrow \text{ funkce nemá v bodě } P_3 = (6,0) \text{ extrém.}$$

Pro $P_4 = (2, 2)$ dostáváme

$$D = \det \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = 12 > 0 \quad \Rightarrow \text{ funkce má v bodě } P_4 = (2,2) \text{ extrém.}$$

Protože v bodě $P_4 = (2, 2)$ je $\partial^2 f(P_4)/\partial x^2 = -4 < 0$, má funkce f v tomto bodě ostré lokální maximum. Jeho hodnota je $f(2, 2) = 4(6 - 2 - 2) = 8$.

Příklad 1.38. *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x, y) = (x^2 - 2y + 1)^2$.

Řešení: Funkce f má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy může mít tedy pouze ve stacionárních bodech. Protože

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 4x(x^2 - 2y + 1), \\ \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= -4(x^2 - 2y + 1), \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} 4x(x^2 - 2y + 1) &= 0, \\ -4(x^2 - 2y + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Obě rovnice budou splněny pouze v případě, když $x^2 - 2y + 1 = 0$, tj. funce má nekonečně mnoho stacionárních bodů, které všechny leží na parabole $y = \frac{1}{2}(x^2+1)$.

Z definice funkce plyne, že obor funkčních hodnot $Hf = \langle 0, +\infty)$ a že $f(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x^2 - 2y + 1 = 0$ a ve všech ostatních bodech $\mathbb{R}^2$ je $f(x, y) > 0$. To znamená, že funkce f nabývá ve všech bodech paraboly $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ svého neostrého minima 0.

Poznámka 1.39. *Je zřejmé, že příklad 1.38 jsme mohli vyřešit pouhou úvahou. Jak jsme již uvedli, je obor funkčních hodnot funkce funkce* $f(x, y) = (x^2-2y+1)^2$ *interval* $\langle 0, +\infty)$ *a minimum funkce* f *je* 0. *Platí*

$$(x^2 - 2y + 1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2y + 1 = 0$$

a to znamená, že funkce f *nabývá svého neostrého minima ve všech bodech paraboly* $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$.

Příklad 1.40. *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x, y) = 2 - \sqrt[3]{(x - y)^2}$.

Řešení: Funkce f je definována v celém $\mathbb{R}^2$. Její první parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}.$$

Je zřejmé, že parciální derivace funkce f neexistují pro body (x, y), které leží na přímce $y = x$. Všechny tyto body jsou vratkými body funkce f a to znamená, že funkce f může v těchto bodech mít lokální extrém. Oborem hodnot funkce f je interval $(-\infty, 2\rangle$, přičemž $f(x, y) = 2$ právě tehdy, když $y = x$, a ve všech ostatních bodech $\mathbb{R}^2$ je $f(x, y) < 2$. To znamená, že funkce $f(x, y) = 2 - \sqrt[3]{(x - y)^2}$ ve všech bodech přímky $y = x$ nabývá svého neostrého lokálního maxima 2. (Při řešení tohoto příkladu jsme mohli postupovat analogickým způsobem podle poznámky 1.39).

Příklad 1.41. *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x, y, z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

Řešení: Funkce f má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^3$. Lokální extrémy může mít tedy pouze ve stacionárních bodech.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2 + 12y, \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2y + 12x, \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z + 2.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12y &= 0, \\ 2y + 12x &= 0, \\ 2z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostáváme $z = -1$. Z druhé rovnice vyjádříme $y = -6x$ a dosadíme do první. Dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 24x = 0$. Odtud $x = 0$, $x = 24$.

Funkce má dva stacionární body $P_1 = (0, 0, -1)$ a $P_2 = (24, -144, -1)$. O tom, zda v těchto bodech má funkce lokální extrém, rozhodneme na základě znamének D_1, D_2 a D_3, kde

$$D_1 = f_{xx}(P), \qquad D_2 = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{pmatrix}$$

Protože

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = 12, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = 0,$$

dostáváme pro $P_1 = (0, 0, -1)$

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = -144, \quad D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -288.$$

Protože $D_2 < 0$ a dále $D_3 \neq 0$, nemá funkce f v bodě $P_1 = (0, 0, -1)$ lokální extrém.

Pro $P_2 = (24, -144, -1)$ je

$$D_1 = 144, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = 144, \quad D_3 = \det \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 288.$$

Protože $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, má funkce f v bodě $P_1 = (0, 0, -1)$ lokální extrém, a to minimum. Jeho hodnota je $f(24, -144, -1) = -6913$.

V příkladech 1.42 – 1.57 najděte lokální extrémy daných funkcí.

Příklad 1.42. $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$. ***Výsledek:*** *Ostré lok. min.* $f(-1, 0) = 0$

Příklad 1.43. $f(x,y) = x^3 - 6x - 6xy + 6y + 3y^2$.

Výsledek: *Ostré lok. min.* $f(2,1) = -7$

Příklad 1.44. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$.

Výsledek: *Ostré lok. min.* $f(1,1) = 1$

Příklad 1.45. $f(x,y) = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$.

Výsledek: *Ostré lok. min.* $f(1,1) = -82$*, ostré lok.max.* $f(-1,-1) = 82$

Příklad 1.46. $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x - 4y$.

Výsledek: *Funkce nemá lok. extrémy*

Příklad 1.47. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 215$.

Výsledek: *Ostré lok. min.* $f(6,6) = -1$

Příklad 1.48. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(x^2 + y^2)$.

Výsledek: *Ostré lok. min.* $f(0,0) = 0$*, lok. max.* $1/\mathrm{e}$ *v bodech kružnice* $x^2 + y^2 = 1$

Příklad 1.49. $f(x,y) = 1 - (2x - y + 1)^2$.

Výsledek: *Funkce má neostré lok. max.* 1 *ve všech bodech přímky* $2x - y + 1 = 0$

Příklad 1.50. $f(x,y) = x^2(1 + y^2)$.

Výsledek: *Funkce má neostré lok. min.* 0 *ve všech bodech přímky* $x = 0$

Příklad 1.51. $f(x,y) = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$. ***Výsledek:*** *Ostré lok. min.* $f(0,0) = 0$

Příklad 1.52. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 - y^2}$. ***Výsledek:*** *Funkce nemá lok. extrémy*

Příklad 1.53. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + zy - z + y - 2x$.

Výsledek: *Ostré lok. min.* $f(1,-1,1) = -2$

Příklad 1.54. $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 15x + 14y + 4z + 17$.

Výsledek: *Ostré lok. min.* $f(23,-145,-2) = -6913$

Příklad 1.55. $f(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$. *(Body ležící v souřadnicových rovinách nepočítejte, ale pokuste se zdůvodnit, že funkce v těchto bodech nemá extrém.)*

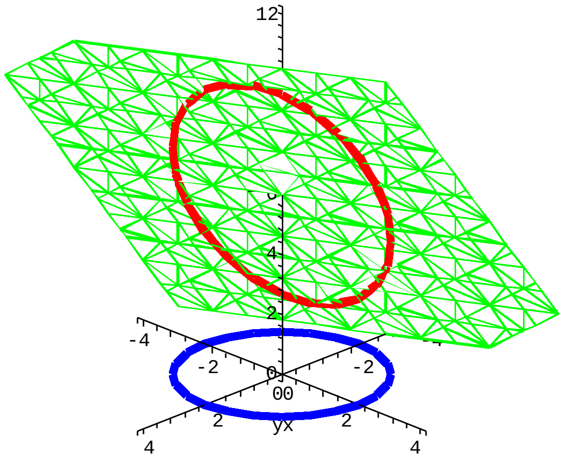
Výsledek: *Ostré lok. max.* $f(1,1,1) = 1$

Příklad 1.56. $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

Výsledek: *Funkce nemá lok. extrémy*

Příklad 1.57. $f(x,y,z) = (3x + 2y + z)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}$.

Výsledek: *Ostré lok. max.* $f(3\sqrt{7}/14, \sqrt{7}/7, \sqrt{7}/14) = \sqrt{7}\,\mathrm{e}^{-1/2}$*, Ostré lok. min.* $f(-3\sqrt{7}/14, -\sqrt{7}/7, -\sqrt{7}/14) = -\sqrt{7}\,\mathrm{e}^{-1/2}$



Obr. 4

1.2.2. *Vázané extrémy funkcí dvou proměnných.*

Příklad 1.58. *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x,y) = 2x + y + 6$ *vázané na podmínku* $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Řešení: Pro pochopení vázaného lokálního extrému si představme, že se pohybujeme po nějaké ploše (grafu nějaké funkce dvou proměnných f) po cestě, jejíž kolmý průmět do roviny xy je dán rovnicí $g(x,y) = 0$. V našem případě se pohybujeme po nakloněné rovině $z = 2x + y + 6$ po cestě (elipse), jejímž kolmým průmětem do roviny xy je kružnice $x^2 + y^2 = 5$ (Obr. 4). Nás zajímá minimální a maximální „nadmořská výška“, do které se na naši cestě dostaneme (obecně nás zajímají všechna taková místa, kde po sestupu začneme opět stoupat a naopak, kde po stoupání začneme opět klesat), tj. hledáme lokální extrémy funkce f vázané na podmínku $g(x,y) = 0$. Tyto extrémy můžeme najít např. následujícím způsobem.

Najdeme body P, ve kterých jsou vektory ∇f a ∇g rovnoběžné, tedy platí, že jeden je nějakým λ-násobkem druhého, tj. platí $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$. Spolu s podmínkou, že P je bod, který leží na naší cestě, tj. $g(P) = 0$, dostáváme (je $\nabla f(x,y) = (2,1)$ a $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$)

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda x, \\ 1 &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 - 5 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Můžeme postupovat také tak, že si setrojíme tzv. *Lagrangeovu funkci* $\Phi(x,y) = 2x + y + 6 - \lambda(x^2 + y^2 - 5)$, kde λ je pevné, zatím neznámé číslo. Pro „ukázněné turisty“, tj. pro takové, kteří neopustí vyznačenou cestu (tj. platí $x^2 + y^2 - 5 = 0$), jsou funkce f a Φ totožné. Nyní budeme hledat lokální extrémy této nové funkce Φ. Jelikož funkce Φ má spojité parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, může mít extrémy pouze ve svých stacionárních bodech.

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = 2 - 2\lambda x, \qquad \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = 1 - 2\lambda y.$$

Jak už bylo řečeno, jsme „ukáznění turisté“, a proto nás zajímají body, ve kterých se parciální derivace funkce Φ rovnají nule, ale navíc, tyto body musí ležet na naší cestě, tedy musí splňovat podmínku $x^2 + y^2 - 5 = 0$. Odtud dostáváme soustavu tří rovnic pro neznámé x, y a λ

$$\begin{aligned} 2 - 2\lambda x &= 0, \\ 1 - 2\lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 - 5 &= 0, \end{aligned}$$

která je totožná se soustavou (5). Vyjádříme-li z první rovnice $x = 1/\lambda$, z druhé $y = 1/(2\lambda)$ a dosadíme-li do třetí, dostaneme

$$\lambda = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = -2 \wedge y = -1,$$

a

$$\lambda = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = 2 \wedge y = 1.$$

Funkce Φ má dva stacionární body vázané na podmínku $x^2 + y^2 - 5 = 0$, a to $P_1 = (-2,-1)$, kde $\lambda = -1/2$ a $P_2 = (2,1)$, kde $\lambda = 1/2$. Dále je

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x^2} = -2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial y^2} = -2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Potom pro $P_1 = (-2,-1)$ a $\lambda = -1/2$ je

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \text{ funkce má v bodě } P_1 = (-2,-1) \text{ extrém.}$$

Protože v bodě $P_1 = (-2,-1)$ je $\partial^2\Phi(P_1)/\partial x^2 = 1 > 0$, má funkce Φ v tomto bodě ostré lokální minimum vázané na podmínku $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

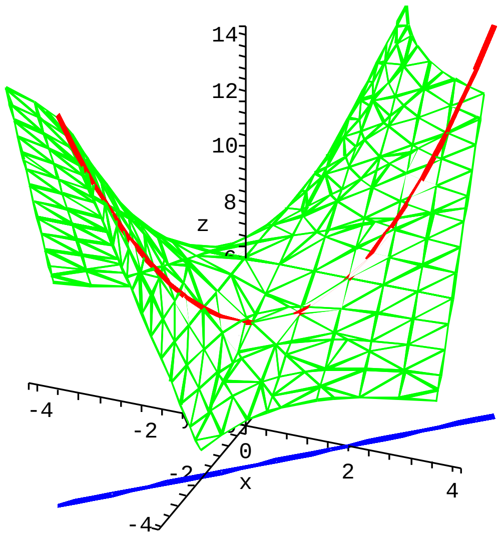
Pro $P_2 = (2,1)$ a $\lambda = 1/2$ je

$$D = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \text{ funkce má v bodě } P_2 = (2,1) \text{ extrém.}$$

Protože v bodě $P_2 = (2,1)$ je $\partial^2\Phi(P_2)/\partial x^2 = -1 < 0$, má funkce Φ v tomto bodě ostré lokální maximum vázané na podmínku $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Jak už bylo řečeno, pro všechna $(x,y) \in M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 5 = 0\}$ je $\Phi(x,y) = f(x,y)$. To ovšem znamená, že funkce Φ a f mají tytéž vázané extrémy vzhledem k množině M, tj. funkce f má dva lokální extrémy vázané na podmínku $x^2 + y^2 - 5 = 0$ a to ostré lokální minimum $f(-2,-1) = -4 - 1 + 6 = 1$ a ostré lokální maximum $f(2,1) = 4 + 1 + 6 = 11$.

Příklad 1.59. *Najděme lokální extrém funkce $f(x,y) = 6 + xy$ vázaný na podmínku $x - y - 2 = 0$.*



Obr. 5

Řešení: Budeme postupovat podobně jako v příkladu 1.58. Sestrojíme Lagrangeovu funkci a budeme vyšetřovat její extrémy vázané na podmínku $x-y-2=0$:

$$\Phi(x,y) = 6 + xy - \lambda(x-y-2).$$

Potom

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x} = y - \lambda, \qquad \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} = x + \lambda.$$

Hledáme stacionární body funkce Φ takové, aby současně splňovaly podmínku $x-y-2=0$, tj. řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} y - \lambda &= 0, \\ x + \lambda &= 0, \\ x - y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $\lambda = -1$ a $x = 1$, $y = -1$, tj. funkce Φ má jeden stacionární bod vázaný na podmínku $x-y-2=0$. Protože

$$\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x\partial y} = 1,$$

dostáváme

$$D = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Z této podmínky ale vyplývá, že funkce Φ nemá v bodě $P = (1,-1)$ extrém. Otázkou je, co můžeme v této chvíli usoudit o extrému funkce f vázaného na podmínku $x-y-2=0$. Podívejme se předně na Obr. 5.

Jako turisté se tentokrát pohybujeme po úbočí horského sedla, tj. po hyperbolickém paraboloidu $z = 6 + xy$ po cestě, jejímž kolmým průmětem do roviny xy je přímka $x-y-2=0$. Cesta, po které se skutečně pohybujeme, má tvar paraboly, kdy nejdříve klesáme až do vrcholu paraboly a poté začneme na cestě opět stoupat. Je tedy zřejmé, že na naší cestě zcela jistě dosáhneme ostrého lokálního minima (jisté minimální nadmořské výšky). K rozhodnutí, zda v bodě $P = (1, -1)$ má funkce f skutečně extrém vázaný na podmínku $x - y - 2 = 0$, bychom potřebovali znát některé další informace o vyšetřování vázaných extrémů. My však budeme většinou vyšetřovat absolutní extrémy funkcí na množině (Příklad 1.67), kde nám stačí nalézt pouze „body podezřelé z vázaných extrémů“ (kritické body) a ty uvedenou metodou dokážeme nalézt.

Přesto si ukažme, jak v některých jednodušších případech dokážeme rozhodnout o existenci vázaných extrémů.

Položme $x = t$. Protože $y = x-2$ a $z = 6+xy$, je $y = t-2$ a tedy $z = 6+t(t-2)$. Potom

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t-2, 6+t(t-2)), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R},$$

není nic jiného, než parametrizace té paraboly, po které se ve skutečnosti pohybujeme. x a y jsou vlastně naše souřadnice, které bychom našli na mapě a souřadnice z nám určuje naši nadmořskou výšku. Jak jsme již uvedli v příkladu 1.58, nás zajímá minimální a maximální „nadmořská výška“, do které se na naší cestě dostaneme. Už víme, že tuto nadmořskou výšku popisuje právě z-tová souřadnice křivky, po které se pohybujeme, tedy funkce $z = h(t)$, kde $h(t) = 6 + t(t-2)$. Její extrémy dokážeme nalézt snadno. Je

$$h'(t) = 2t - 2 \;\Rightarrow\; 2t - 2 = 0 \;\Rightarrow\; t = 1.$$

Protože $h''(t) = 2 > 0$, má funkce h v bodě $t = 1$ lokální extrém a to minimum. Na naší cestě tedy dosáhneme minimální nadmořské výšky $h(1) = 6 + 1 \cdot (1-2) = 5$ a to v bodě, jehož souřadnice jsou $(1, 1-2) = (1, -1)$.

Tímto způsobem jsme tedy našli lokální extrém funkce $f(x, y) = 6 + xy$ vázaný na podmínku $x - y - 2 = 0$. Funkce má jeden vázaný lokální extrém (minimum) v bodě $P = (1, -1)$ a je $f(1, -1) = 5$.

Druhý způsob, který jsme použili pro hledání vázaných extrémů funkcí dvou proměnných, se dá dobře použít v případě, že se nám podaří jednoduchým způsobem parametricky vyjádřit křivku, po které se na ploše pohybujeme. V opačném případě je pro nalezení kritických bodů vhodnější použít metodu Lagrangeových multiplikátorů.

V příkladech 1.60 – 1.66 najděte lokální extrémy daných funkcí vázaných na danou podmínku.

Příklad 1.60. $f(x, y) = x^2 + y^2, \;\; 2x - y + 5 = 0.$

Výsledek: *Ostré lok. min.* $f(-2, 1) = 5$

Příklad 1.61. $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y, \;\; x^2 + y^2 = 1.$

Výsledek: *Ostré lok. max.* $f(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = \sqrt{5}/2$, *Ostré lok. min.* $f(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}/2$

Příklad 1.62. $f(x, y) = xy - x + y - 1, \;\; x + y = 1.$

Výsledek: *Ostré lok. max.* $f(-1/2, 3/2) = 1/4$

Příklad 1.63. $f(x,y) = 3x - y, \;\; y = x^3 + 1.$

Výsledek: *Ostré lok. max.* $f(1,2) = 1$, *Ostré lok. min.* $f(-1,0) = -3$

Příklad 1.64. $f(x,y) = x^2 y, \;\; y = \mathrm{e}^x.$

Výsledek: *Ostré lok. max.* $f(-2, \mathrm{e}^{-2}) = 4\,\mathrm{e}^{-2}$, *Ostré lok. min.* $f(0,1) = 0$

Příklad 1.65. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \;\; 4x + y = 6 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0.$

Výsledek: *Ostré lok. max.* $f(3,-6) = 1/6$, *Ostré lok. min.* $f(1,2) = 3/2$

Příklad 1.66. $f(x,y) = x^2 - y^2, \;\; x^2 + y^2 = 1.$

Výsledek: *Ostrá lok. max.* $f(\pm 1, 0) = 1$, *Ostrá lok. min.* $f(0, \pm 1) = -1$

1.2.3. *Globální extrémy funkcí dvou a tří proměnných.*

Příklad 1.67. *Najděme globální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 2y$ *na množině* $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y| \wedge x^2 + y^2 \leq 20\}$.

Řešení: Při hledání globálních (absolutních) extrémů spojité funkce f na uzavřené množině M budeme postupovat následujícím způsobem:

(i) Najdeme všechny kritické body na M.
(ii) Najdeme všechny kritické body funkce f vázané na hranici h množiny M.
(iii) Najdeme všechny body, ve kterých se h „láme“ (ke křivce v tomto bodě nelze sestrojit tečnu).
(iv) Ve všech těchto nalezených bodech vypočítáme funkční hodnotu funkce f. Největší, resp. nejmenší z těchto hodnot je globální maximum, resp. globální minimum funkce f na množině M.

V našem případě je množina M kruhová výseč o poloměru $\sqrt{20}$ se středem v počátku, ohraničená přímkami $y = x$ a $y = -x$, přičemž $x \geq 0$ (Obr. 6).

Hledejme stacionární body funkce f.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2x - 4, \quad \Rightarrow \quad 2x - 4 = 0, \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2y - 2, \quad \Rightarrow \quad 2y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Odtud $A_1 = (2,1)$.

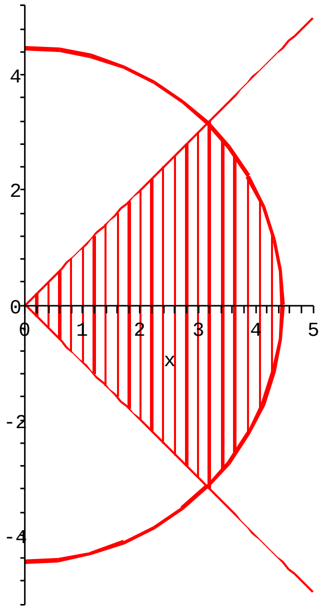
Nyní najdeme kritické body na hranici h množiny M. Tato hranice je sjednocením tří křivek C_1 (část kružnice $x^2 + y^2 = 20$), C_2 (část přímky $y = x$) a C_3 (část přímky $y = -x$), přičemž tyto křivky se postupně protnou v bodech $(0,0)$, $(\sqrt{10}, \sqrt{10})$, $(\sqrt{10}, -\sqrt{10})$.

Body podezřelé z extrémů vazaných na podmínku $x^2 + y^2 = 20$ najdeme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Hledáme takový bod $A = (x,y)$ (splňující podmínku $g(x,y) = 0$) a takový skalár λ, pro který platí

$$\nabla f(A) = \lambda \cdot \nabla g(A).$$

Protože $\nabla f(x,y) = (2x - 4, 2y - 2)$ a $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$, je A řešením soustavy

$$\begin{aligned} 2x - 4 - 2\lambda x &= 0, \\ 2y - 2 - 2\lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 - 20 &= 0. \end{aligned}$$



Obr. 6

Vyjádříme-li z první rovnice $x = 2/(1-\lambda)$, z druhé $y = 1/(1-\lambda)$ a dosadíme-li do třetí, dostaneme dva body $(4, 2)$ a $(-4, -2)$. Druhý bod však nepatří do množiny M a proto jej z dalších úvah vyřadíme. Dostáváme tedy další bod $A_2 = (4, 2)$, ve kterém může mít funkce f na množině M extrém.

Dále najdeme body, ve kterých může mít funkce f extrém vázaný na podmínku $y = x$.

Označme $x = t$. Potom $y = t$ a dosazením do $z = x^2 - 4x + y^2 - 2y$ dostaneme $z = 2t^2 - 6t$. Funkce $h(t) = 2t^2 - 6t$, $t \in \langle 0, \sqrt{10}\rangle$ má jeden bod podezřelý z extrému $t = 3/2$. Dalším bodem, ve kterém může mít funkce f na množině M extrém, je tedy bod $A_3 = (3/2, 3/2)$.

Stejným způsobem najdeme bod podezřelý z extrému funkce f na vazbu $y = -x$. Dostaneme bod $A_4 = (1/2, -1/2)$.

Posledními podezřelými jsou body, ve kterých se hranice množiny M „láme“. To jsou již dříve zmíněné průsečíky jednotlivých křivek, tj. body $A_5 = (0, 0)$, $A_6 = (\sqrt{10}, \sqrt{10})$, $A_7 = (\sqrt{10}, -\sqrt{10})$.

Nyní vypočítáme funkční hodnoty funkce f v bodech A_1 až A_7.

$$
\begin{array}{ll}
f(2,1) = -5, & f(4,2) = 0, \\
f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}, & f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \\
f(0,0) = 0, & f(\sqrt{10}, \sqrt{10}) = 1.02633, \\
f(\sqrt{10}, -\sqrt{10}) = 13.6754. &
\end{array}
$$

Funkce f má maximum 13.6754 v bodě $A_7 = (\sqrt{10}, -\sqrt{10})$ a minimum -5 v bodě $A_1 = (2, 1)$.

Příklad 1.68. *Na elipse, která je průnikem válcové plochy* $x^2 + y^2 = 1$ *a roviny* $x + y + z = 1$*, najděme body, jejichž druhá mocnina jejich vzdálenosti od počátku je největší, resp. nejmenší.*

Řešení: Pro vzdálenost bodu (x, y, z) od počátku platí $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, přičemž ze všech bodů $\mathbb{R}^3$ nás zajímají pouze takové body, které leží na válcové ploše $x^2+y^2 = 1$ a současně v rovině $x+y+z = 1$. Naším úkolem je tedy nalézt absolutní extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ vázané na dvě podmínky $x^2 + y^2 - 1 = 0$ $(g_1(x, y, z) = 0)$ a $x + y + z - 1 = 0$ $(g_2(x, y, z) = 0)$.

Hledáme tedy takový bod (x, y, z), pro který je

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g_1(P) + \mu \nabla g_2(P) \quad \text{a současně } g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0.$$

Protože $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g_1 = (2x, 2y, 0)$ a $\nabla g_2 = (1, 1, 1)$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda x - \mu &= 0, && (6)\\ 2y - 2\lambda y - \mu &= 0, && (7)\\ 2z - \mu &= 0, && (8)\\ x^2 + y^2 - 1 &= 0, && (9)\\ x + y + z - 1 &= 0, && (10) \end{aligned}$$

což je soustava pěti nelineární rovnic o pěti neznámých. Za předpokladu, že $\lambda \neq 1$ z rovnic (6), (7), (8) dostaneme

$$x = \frac{\mu}{2(1-\lambda)}, \quad y = \frac{\mu}{2(1-\lambda)}, \quad z = \frac{\mu}{2}. \tag{11}$$

Dosazením do (9) a (10) a úpravou pak

$$\mu^2 = 2(1-\lambda)^2, \qquad \mu = \frac{2(1-\lambda)}{3-\lambda}.$$

Odtud pak

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{2}, \qquad \mu = 2(1 \pm \sqrt{2}).$$

Odtud pak dosazením do (11)

$$P_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right), \qquad P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right).$$

Pro $\lambda = 1$ dostaneme z (6) a (7) $\mu = 0$, z (8) $z = 0$ a z (9) a (10) pak $x = 0 \wedge y = 1$ a $x = 1 \wedge y = 0$. Dalšími kritickými body jsou tedy

$$P_3 = (1, 0, 0), \qquad P_4 = (0, 1, 0).$$

V takovýchto úlohách bývá právě řešení těchto soustav největším problémem. Proto doporučujeme pro jejich řešení použít některý z vhodných programů (Mathematica, Maple, Matlab).

Protože

$$f(P_1) = 1 + (1 + \sqrt{2})^2 = 6.82843, \quad f(P_2) = 1 + (1 - \sqrt{2})^2 = 1.17157$$
$$f(P_3) = f(P_4) = 1$$

je $P_1 = \left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1+\sqrt{2}\right)$ bod elipsy, jehož vzdálenost od počátku je největší a $P_3 = (1,0,0)$ a $P_4 = (0,1,0)$ body elipsy, jejiž vzdálenost od počátku je nejmenší.

Příklad 1.69. *Najděme absolutní extrémy funkce* $f(x,y,z) = x+y+z$ *na množině* $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq x \geq y^2+z^2\}$.

Řešení: Protože hledáme extrémy spojité funkce na uzavřené množině, máme zaručeno, že tyto extrémy budou existovat.

Při hledání kritických bodů budeme postupovat následovně:

(i) Funkce f nemá žádné stacionární body v $\mathbb{R}^3$, tedy ani v M.

(ii) Najdeme stacionární body funkce f vázané na podmínku $y^2+z^2-x=0$.

(iii) Najdeme stacionární body funkce f vázané na podmínku $x-1=0$.

(iv) Najdeme stacionární body funkce f vázané na podmínky $x-1=0$ a $y^2+z^2-x=0$, tj. vyšetříme množinu bodů, ve kterých se hranice h množiny M láme.

V případě *(ii)* použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů, tj. hledáme bod P a skalár λ, aby $\nabla f(P) = \lambda \nabla g_1(P)$ a současně $g_1(P) = 0$, kde $g_1(x,y,z) = y^2+z^2-x$. Protože $\nabla f = (1,1,1)$, $\nabla g_1 = (-1, 2y, 2z)$, dostáváme

$$\begin{aligned} 1+\lambda &= 0, \\ 1-2\lambda y &= 0, \\ 1-2\lambda z &= 0, \\ y^2+z^2-x &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme první kritický bod $P_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

V případě *(iii)* postupujeme analogicky (podmínka vazby je dána vztahem $x-1=0$). Zde nenajdeme žádný kritický bod.

V posledním případě opět použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů, tentokrát však pro dvě vazby, tj. hledáme bod P a skaláry λ a μ takové, aby $\nabla f(P) = \lambda \nabla g_1(P) + \mu \nabla g_2(P)$ a současně $g_1(P) = 0$ a $g_2(P) = 0$ ($g_2(x,y,z) = x-1$). Budeme tedy řešit soustavu

$$\begin{aligned} 1+\lambda-\mu &= 0, \\ 1-2\lambda y &= 0, \\ 1-2\lambda z &= 0, \\ y^2+z^2-x &= 0, \\ 1-x &= 0. \end{aligned}$$

Jejím řešením získáme tentokrát dva kritické body $P_2 = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $P_3 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Protože $f(P_1) = -\frac{1}{2}$, $f(P_2) = 1+\sqrt{2}$ a $f(P_3) = 1-\sqrt{2}$ je zřejmé, že funkce f nabývá na množině M svého maxima $f\left(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) = 1+\sqrt{2}$ a minima $f\left(1/2, -1/2, -1/2\right) = -\frac{1}{2}$.

V příkladech 1.70 až 1.93 najděte extrémy (absolutní) daných funkcí na daných množinách.

Příklad 1.70. $f(x,y)=x^4+y^4$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$.

Výsledek: *max.* $f(\pm 1,0)=f(0,\pm 1)=1$, *min.* $f(0,0)=0$

Příklad 1.71. $f(x,y)=x^3+y^3$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$.

Výsledek: *max.* $f(1,0)=f(0,1)=1$, *min.* $f(-1,0)=f(0,-1)=-1$

Příklad 1.72. $f(x,y)=x^2+4x+y^2-2y-3$ $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 20\}$.

Výsledek: *max.* $f(4,-2)=37$, *min.* $f(-2,1)=-8$

Příklad 1.73. $f(x,y)=x^2-4x+y^2-2y+3$ $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 5\}$.

Výsledek: *max.* $f(-2,-1)=18$, *min.* $f(2,1)=-2$

Příklad 1.74. $f(x,y)=2x^2+y^2+4x-4y-2$,
$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1\wedge 0\le y\le 3\}$.

Výsledek: *max.* $f(1,0)=4$, *min.* $f(0,2)=-6$

Příklad 1.75. $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$,
$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 7\wedge -4\le y\le 4\}$.

Výsledek: *max.* $f(0,4)=80$, *min.* $f(6,-4)=-84$

Příklad 1.76. $f(x,y)=x^2-xy+y^2$,
$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0\wedge y\ge 0\wedge 1-x\le y\le 2-x\}$.

Výsledek: *max.* $f(2,0)=f(0,2)=4$, *min.* $f(1/2,1/2)=1/4$

Příklad 1.77. $f(x,y)=x^2+2y^2-xy+x-4y+1$,
$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 2\wedge 0\le y\le x\}$.

Výsledek: *max.* $f(2,0)=7$, *min.* $f(3/4,3/4)=-1/8$

Příklad 1.78. $f(x,y)=x^2+2y^2-xy-x+4y-1$,
$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\le x\le 0\wedge x\le y\le 0\}$.

Výsledek: *max.* $f(-2,0)=5$, *min.* $f(-3/4,-3/4)=-17/8$

Příklad 1.79. $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y$, *kde* M *je ohraničená přímkami* $x=0,y=0,x=1,y=2$.

Výsledek: *max.* $f(1,2)=17$, *min.* $f(1,0)=-3$

Příklad 1.80. $f(x,y)=2x^3+4x^2+y^2-2xy$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\ge x^2\wedge y\le 4\}$.

Výsledek: *max.* $f(\pm 2,4)=32$, *min.* $f(0,0)=0$

Příklad 1.81. $f(x,y)=x^2+y^2+4x-6y-4$,
$M=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; |x|\le y\wedge x^2+y^2\le 52\}$.

Výsledek: *max.* $f(\sqrt{26},\sqrt{26})=48-2\sqrt{26}$, *min.* $f(-2,3)=-17$

Příklad 1.82. $f(x,y)=x^2+y^2+6x-10y$, *kde* M *je trojúhelník s vrcholy v bodech* $(0,0)$, $(0,6)$, $(-2,2)$.

Výsledek: *max.* $f(0,0)=0$, *min.* $f(-1,4)=-29$

Příklad 1.83. $f(x,y)=x^2+y^2+10x-6y$, *kde* M *je trojúhelník s vrcholy v bodech* $(0,0)$, $(-6,0)$, $(-2,2)$.

Výsledek: *max.* $f(0,0)=0$, *min.* $f(-4,1)=-29$

Příklad 1.84. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 4$,
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le -4x - x^2\}$.
Výsledek: *max.* $f(-2,4) = 64$, *min.* $f(-2,0) = 0$

Příklad 1.85. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2$,
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \le 12 \wedge x \le 0\}$.
Výsledek: *max.* $f(-2,2) = 26$, *min.* $f(0,-1) = 1$

Příklad 1.86. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x - 4y + 2$,
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4y - y^2\}$.
Výsledek: *max.* $f(0,0) = f(0,4) = 2$, *min.* $f(4,2) = -34$

Příklad 1.87. $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 3$,
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + 3 \le y \le 0\}$.
Výsledek: *max.* $f(1,0) = f(3,0) = 0$, *min.* $f(2,-1) = -10$

Příklad 1.88. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 3$,
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 9 \wedge x \ge 0\}$.
Výsledek: *max.* $f(1,-2) = 30$, *min.* $f(0,2) = -5$

Příklad 1.89. $f(x,y) = y^2 - x^2 + 4y - 6x + 2$,
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \ge 20 \wedge 0 \le x \le 6\}$.
Výsledek: *max.* $f(6,4) = -38$, *min.* $f(6,-2) = -74$

Příklad 1.90. $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$,
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le \pi \wedge 0 \le y \le \pi\}$.
Výsledek: *max.* $f(0,0) = f(\pi,0) = f(\pi,\pi) = f(0,\pi) = 1$, *min.* $f(\pi/3,\pi/3) = f(2\pi/3,2\pi/3) = -1/8$

Příklad 1.91. $f(x,y,z) = xyz$, *kde* M *je polokoule* $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$, $z \ge 0$.
Výsledek: *max.* $f(1,1,1) = f(-1,-1,1) = 1$, *min.* $f(1,-1,1) = f(-1,1,1) = -1$

Příklad 1.92. $f(x,y,z) = x + y + z^2$, *kde* M *je elipsoid* $x^2 + y^2 + 2z^2 \le 1$.
Výsledek: *max.* $f(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0) = \sqrt{2}$, *min.* $f(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0) = -\sqrt{2}$

Příklad 1.93. $f(x,y,z) = x - y + z^2$, *kde* M *je čtyřstěn* $x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.
Výsledek: *max.* $f(1,0,0) = f(0,0,1) = 1$, *min.* $f(0,-1,0) = -1$

Příklad 1.94. *Na elipse* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *najděte bod, který je nejblíže, resp. nejdále od přímky* $3x - y - 9 = 0$. ***Výsledek:*** $(4/\sqrt{5},-3/\sqrt{5})$, $(-4/\sqrt{5},3/\sqrt{5})$

Příklad 1.95. *Na hyperbole* $x^2 - y^2 = 4$ *najděte bod, který je nejblíže, bodu* $(0,2)$.
Výsledek: $(\sqrt{5},1)$, $(-\sqrt{5},1)$

Příklad 1.96. *Mezi všemi pravoúhlými trojúhelníky daného obsahu najděte ten, který má nejmenší obvod.* ***Výsledek:*** *Rovnoram. trojúh.*

Příklad 1.97. *V rovině* $\mathbb{R}^2$ *najděte takový bod, aby součet čtverců jeho vzdáleností od přímek* $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ *byl co nejmenší.* ***Výsledek:*** $(-1/4,1/4)$

Příklad 1.98. *V rovině $2x + 2z - 3 = 0$ najděte takový bod, aby součet čtverců jeho vzdáleností od bodů $(-1, 1, 1)$ a $(-2, 1, 2)$ byl co nejmenší.*

Výsledek: $(-3/4, 1, 9/4)$

Příklad 1.99. *V rovině $x + y - 2z = 0$ najděte takový bod, aby součet čtverců jeho vzdáleností od rovin $x + 3z = 6$ a $y + 3z = 2$ byl co nejmenší.*

Výsledek: $(3, -1, 1)$

Příklad 1.100. *Mezi všemi kvádry vepsanými do elipsoidu s poloosami a, b, c najděte ten, který má maximální objem. Vypočítejte tento objem.*

Výsledek: $8abc/(3\sqrt{3})$

Příklad 1.101. *Mezi všemi hrnci o stejném povrchu S najděte ten, který má největší objem.*

Výsledek: $R = \sqrt{S/(3\pi)}$, $v = \sqrt{S/(3\pi)}$, $V = \sqrt{S^3/(27\pi)}$

Příklad 1.102. *Do polokoule o poloměru R vepište kvádr největšího objemu.*

Výsledek: *Kvádr o hranách* $2R/\sqrt{3}$, $2R/\sqrt{3}$, $R/\sqrt{3}$