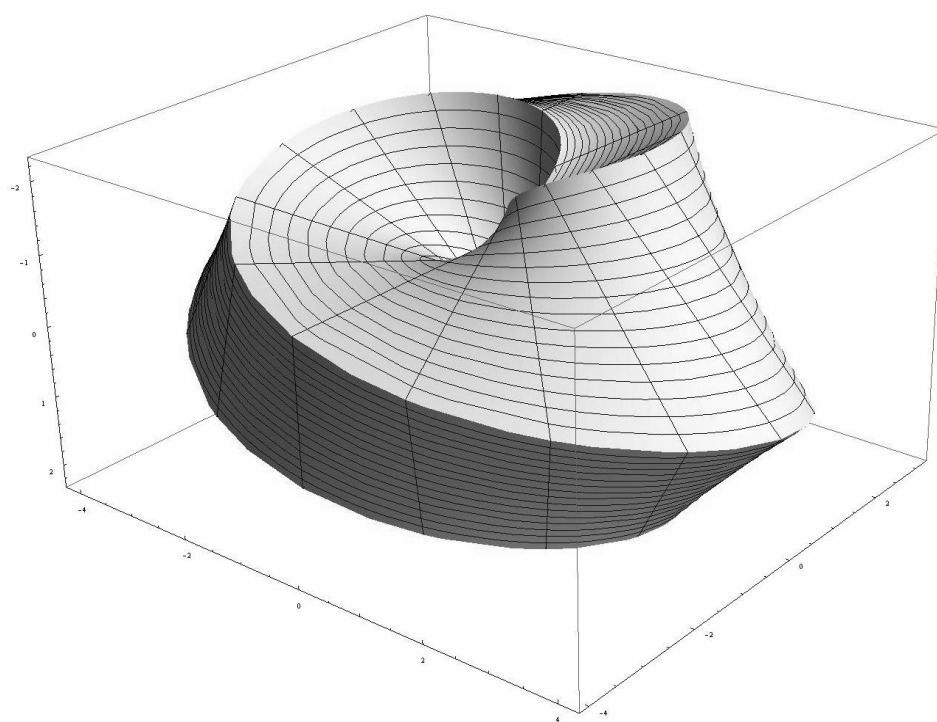


Křivky a plochy v E_3

doplňkový učební text



Úvod

V současné době, kdy jsou k dispozici mnohé počítačové programy umožňující v krátké době kreslit křivky, plochy a skládat je do jednoho celku v návrhu objektu, se mění pohled na úlohu geometrie. Objevují se i pochybnosti, je-li potřeba geometrii studovat, když „počítače vše nakreslí za nás“. Celkový návrh objektu, tedy to, co má počítačový program nakreslit, však musí udělat člověk – konstruktér, architekt, designér. Ten musí do počítače vložit matematický popis svého návrhu. Pokud se nechce spokojit s předdefinovanými nejjednoduššími plochami, které kreslí programy obsahují, bez znalostí geometrie se neobejde. Velkou výhodou matematického popisu modelu je, že změnou dat a parametrů je možné nakreslit řadu variant navrhovaného objektu a autor pak rozhodne, který z nich použije.

Text **Křivky a plochy v E_3** má čtenáři usnadnit počáteční kroky při parametrizaci křivek a ploch, nemá ale v žádném případě nahradit učebnice či skripta z geometrie. Proto je psán stručně, aniž bychom zkoumali různé předpoklady a uváděli důkazy. Aby text bylo možné použít co nejdříve, je stručně zmíněn i matematický aparát, který je podrobněji probírán v jiných předmětech.

Těžištěm textu je kapitola 3, ve které z geometrického způsobu vytvoření ploch odvozujeme jejich matematický popis nezbytný pro kreslení ploch počítačem. K odvození parametrizace ploch užíváme **metodu pohyblivé ortonormální báze**. Tak, jak je metoda užita v tomto textu, se v literatuře běžně neuvádí, i když okrajově zmiňována bývá. Použili jsme ji proto, že umožňuje poměrně jednoduchým způsobem parametrizovat plochy, které nejsou v „základní poloze“, ale jejich umístění v prostoru, vzhledem ke zvolené kartézské soustavě souřadnic, je libovolné. Jiný postup nabízí např. monografie Konstruktivní geometrie (autoři Jaroslav Černý, Milada Kočandrlová), kde se k parametrizaci ploch v „obecné poloze“ nabízí metoda transformace souřadnic s využitím maticového počtu.

První dvě kapitoly jsou průpravou ke kapitole 3. Kapitola 1 je potřebná ke zvládnutí metody pohyblivé ortonormální báze a bez křivek, o kterých píšeme v kapitole 2, studovat plochy není možné. Rovněž řada cvičení v kapitolách 1 a 2 má průpravný charakter, ale jejich závěry jsou potřebné pro kapitolu 3. Některé širší souvislosti uvádíme v zařazených poznámkách.

Důležitým cílem textu je ukázat spojení a souvislosti mezi geometrií, matematikou a počítačovou geometrií. Proto čtenáři, který ovládá základy práce s programy jako např. Maple, Wolfram Mathematica nebo Matlab, doporučujeme, aby po odvození parametrizace křivek a ploch ze cvičení tyto objekty počítačem také nakreslil.

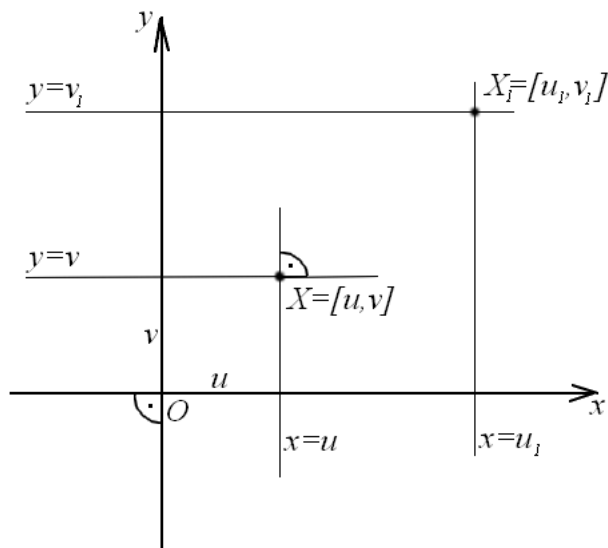
Kamil Maleček, Iva Křivková

Doplňkový učební text vznikl v rámci grantu FRVŠ 822/2011.

Kapitola 1: Základní pojmy z analytické geometrie a lineární algebry

1.1 Soustavy souřadnic v E_2

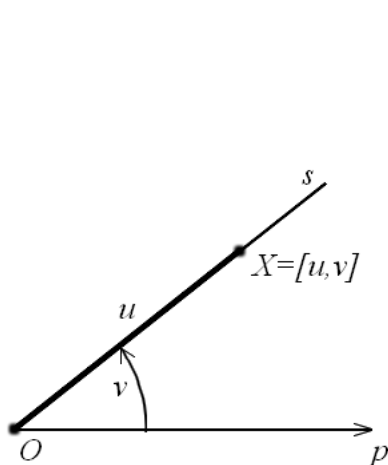
V euklidovské rovině E_2 budeme používat dvě soustavy souřadnic. Především to je **kartézská soustava souřadnic**. Ta je dána počátkem O a orientovanými osami x a y , které jsou ortogonální (obr. 1.1).



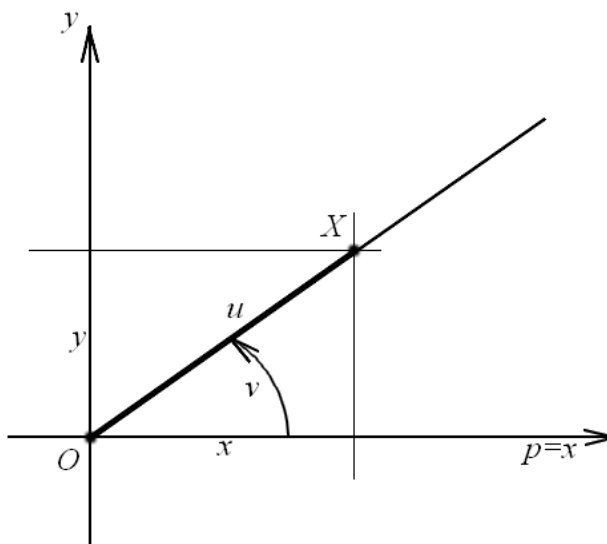
Obr. 1.1

Bod X , který má souřadnice u, v , $X = [u, v]$, je průsečíkem kolmých přímek o rovnicích $x = u$ a $y = v$. Obdobně pro bod X_1 a všechny další body roviny. Přímky o rovnicích $x = u$, $u \in \mathbb{R}$ a $y = v$, $v \in \mathbb{R}$ tvoří **dva systémy přímek**, které nazýváme **parametrické křivky roviny**.

Další používané souřadnice v rovině E_2 jsou **polární souřadnice**. Polární souřadnice jsou dány počátkem O a polopřímou p (obr. 1.2).



Obr. 1.2



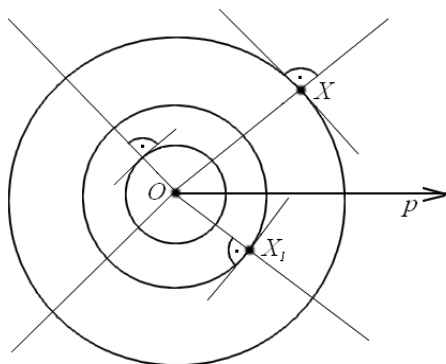
Obr. 1.3

Geometrický význam polárních souřadnic u, v jsme znázornili na obr. 1.2. Souřadnice u je vzdálenost bodu X od počátku O . Souřadnice v je orientovaný úhel polopřímky p a polopřímky s s počátkem v bodě O , na které leží bod X . Často se používá značení $u = \rho$ a $v = \varphi$.

Na obr. 1.3 jsme znázornili kartézské souřadnice x, y a polární souřadnice u, v bodu X . Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi je vyjádřen vzorci

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad v \in (0, 2\pi). \quad (1)$$

Parametrické křivky roviny, opatřené polárními souřadnicemi, tvoří **systém soustředných kružnic** o středu O (pro $u = \text{konst.}$) a **systém polopřímek** s počátečním bodem O (pro $v = \text{konst.}$). Každý bod X , $X \neq O$, je průsečíkem právě jedné kružnice a právě jedné polopřímky. Každá polopřímka a kružnice se protínají kolmo (obr. 1.4).



Obr. 1.4

Poznámka 1:

Zatím bez podrobného komentáře uvádíme, že bod O je singulární bod v polárních souřadnicích.

Cvičení:

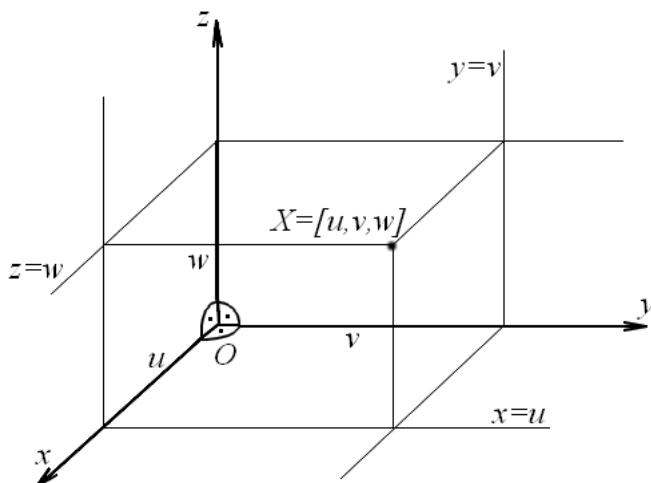
1. Bod X má polární souřadnice $\left[4, \frac{\pi}{6}\right]$. Určete kartézské souřadnice bodu X .
2. V kartézské soustavě souřadnic má bod X souřadnice $[1, \sqrt{3}]$. Určete jeho polární souřadnice.
3. Bod X má polární souřadnice $\left[5, \frac{3\pi}{2}\right]$. Určete, jakou polohu má vzhledem k osám kartézské soustavy souřadnic.

Řešení:

1. $X = [2\sqrt{3}, 2]$
2. $X = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$
3. Bod X leží na záporné části souřadnicové osy y .

1.2 Soustavy souřadnic v E_3

V euklidovském prostoru E_3 budeme používat pouze **kartézskou soustavu souřadnic**, která je dána počátkem O a orientovanými osami x, y, z , z nichž každé dvě jsou navzájem kolmé (obr. 1.5). Dále jsme v obr. 1.5 znázornili geometrický význam souřadnic $[u, v, w]$ bodu X . Bod X je průsečíkem tří rovin o rovnicích $x = u, y = v, z = w$.



Obr. 1.5

Další používané souřadnice v prostoru E_3 jsou **válcové (cylindrické)** a **sférické souřadnice**. O válcových, resp. sférických souřadnicích se stručně zmíníme v Poznámkách 1 a 2 odstavce 3.1 a v Poznámce 1 odstavce 3.3.

Obecně platí, že **kartézské souřadnice v rovině** představují vzájemně jednoznačné zobrazení bodů na uspořádané dvojice reálných čísel. Obdobně v prostoru se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení bodů na uspořádané trojice reálných čísel.

Polárními souřadnicemi je realizováno vzájemně jednoznačné zobrazení uspořádaných dvojic bodů $[u, v]$ na body roviny s vyloučením počátku O . Proto je $u \in \mathbb{R}^+ \wedge v \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pro počátek O je $u = 0$ a potom v může být jakékoli číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Poznámka 2:

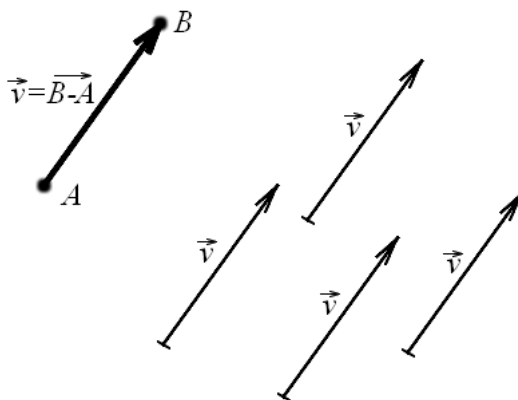
Soustava souřadnic je pouze pomocný nástroj, který je v rovině a v prostoru cizí. V geometrii a ve fyzice jsou důležité ty pojmy, které nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Např. naměřená teplota v jistém bodě je pořád stejná, i když v různě zvolených soustavách souřadnic jsou souřadnice tohoto bodu různé.

Máme-li budovu tvaru kvádra a chceme-li popsat polohu jejích vrcholů, hran a stěn v kartézské soustavě souřadnic, pak kvůli jednoduchosti popisu je vhodné zvolit soustavu souřadnic tak, aby jeden vrchol byl počátek a tři hrany ležely na osách souřadnic. Kdybychom zvolili soustavu souřadnic jinak, bude popis budovy komplikovanější, zvláště pokud by osy souřadnic nebyly rovnoběžné s přímkami hran budovy. To podstatné je, že sice v různých soustavách souřadnic je popis budovy různý, ale její tvar a rozměry se nemění.

Postupně uvedeme i další pojmy, které nezávisí na volbě soustavy souřadnic.

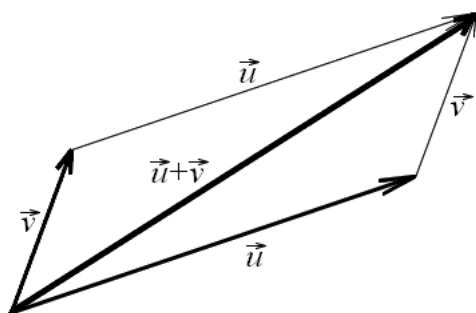
1.3 Vektory, vektorový prostor $V(E_3)$ a R_3

V euklidovském prostoru E_3 mějme dva body A, B . Orientovanou úsečku AB nazýváme **geometrickým vektorem** $\overrightarrow{AB}$ umístěným svým počátečním bodem do bodu A (obr. 1.6). Jeden tzv. **volný vektor** tvoří množina všech stejně velkých rovnoběžných a stejně orientovaných úseček (obr. 1.6).

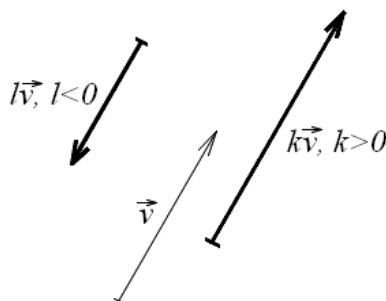


Obr. 1.6

Dva geometrické vektory sčítáme pomocí pravidla o rovnoběžníku, které vystihuje obr. 1.7, násobení vektoru reálným číslem ilustruje obr. 1.8.



Obr. 1.7



Obr. 1.8

Množina geometrických vektorů tvoří vektorový prostor $V(E_3)$, který nazýváme **zaměřením euklidovského prostoru E_3** .

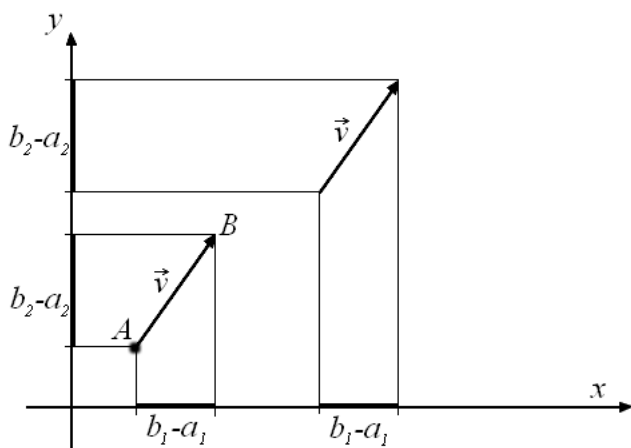
Mějme v E_3 zvolenou kartézskou soustavu souřadnic, ve které $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$. Potom vektor $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Souřadnice vektoru $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ dostaneme jako rozdíl souřadnic jeho koncového a počátečního bodu. To můžeme zapsat takto:

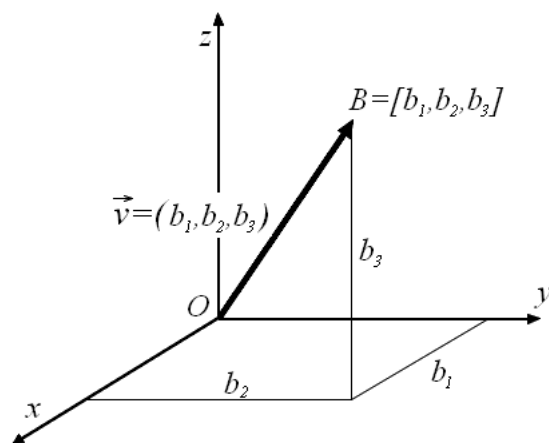
$$\vec{v} = B - A \Rightarrow B = A + \vec{v}.$$

Tedy souřadnice bodu B dostaneme tak, že k souřadnicím bodu A přičteme souřadnice vektoru $\vec{v}$.

Z obr. 1.9 v rovině je patrné, že každé umístění jednoho volného vektoru má stejné souřadnice. Stejně je tomu v prostoru. Zvolíme-li počáteční bod vektoru jako počátek O , pak vektor $\overrightarrow{OB}$ má stejné souřadnice jako bod B . Situaci zachycuje obr. 1.10. Vektor $\overrightarrow{OB}$ nazýváme **průvodním vektorem** bodu B . Zobrazení mezi množinou bodů a jejich průvodními vektory je vzájemně jednoznačné.



Obr. 1.9



Obr. 1.10

Množina všech uspořádaných trojic (x, y, z) reálných čísel tvoří tzv. **aritmetický vektorový prostor** R_3 .

Poznámka 3:

Všimněme si rozdílu mezi souřadnicemi bodu a vektoru. Poloha bodu je jeho souřadnicemi vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic jednoznačně určena. Poloha vektoru je jednoznačně určena až jeho umístěním, tedy volbou počátečního bodu.

1.4 Skalární a vektorový součin

Mějme v prostoru R_3 dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. **Skalární součin vektorů** $\vec{u}$ a $\vec{v}$, značíme $\vec{u} \cdot \vec{v}$, je reálné číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (2)$$

Skalární součin vektorů můžeme také počítat podle vzorce

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha, \quad (3)$$

ve kterém $\|\vec{u}\|$ a $\|\vec{v}\|$ jsou velikosti vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a α je jejich úhel.

Poznámka 4:

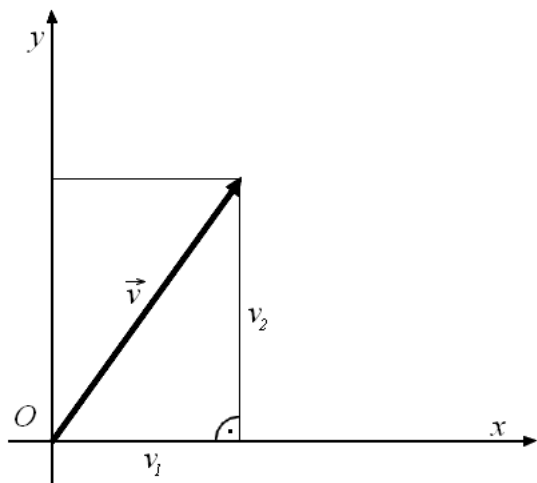
Ze vzorce (3) je zřejmé, že skalární součin je příklad pojmu, který nezávisí na volbě soustavy souřadnic.

Ze vzorce (3) plyne důležité tvrzení: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$. (4)

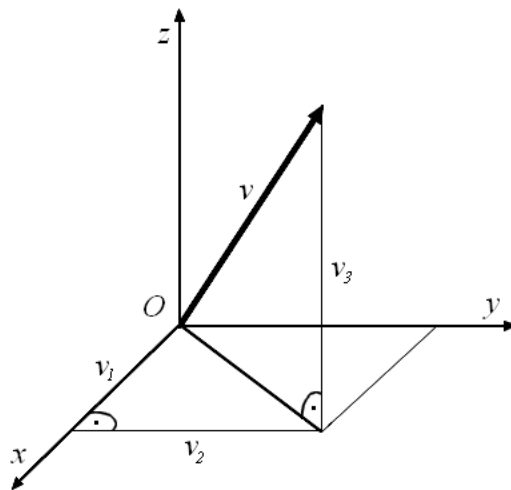
Dva vektory jsou ortogonální právě tehdy, jestliže jejich skalární součin je roven 0.

Velikost (norma) vektoru $\vec{v}$ je nezáporné číslo $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. (5)

Velikost vektoru počítáme Pythagorovou větou, jak vidíme na obr. 1.11 v rovině a na obr. 1.12 v prostoru.



Obr. 1.11



Obr. 1.12

Obecný vektor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, učiníme jednotkovým vektorem (vektor **normujeme**), jestliže ho vynásobíme číslem $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$. Jednotkový vektor pak má souřadnice $\left(\frac{v_1}{\|\vec{v}\|}, \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}, \frac{v_3}{\|\vec{v}\|} \right)$.

Z (2) plyne, že vzorec (5) můžeme psát ve tvaru:

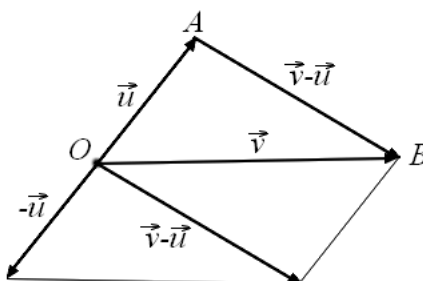
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}. \quad (6)$$

Poznámka 5:

Vzorcem (6) můžeme definovat normu vektoru v každém prostoru se skalárním součinem. Jakmile máme definovanou normu, můžeme definovat vzdálenost dvou vektorů takto:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{u}\|$$

a prostor je metrickým prostorem. Na obr. 1.13 vidíme, že v prostoru geometrických vektorů není vzdálenost $d(\vec{u}, \vec{v})$ nic jiného než velikost úsečky AB .



Obr. 1.13

Cvičení:

1. Přesvědčte se, že vektory $\vec{u} = (3, -1, 5)$ a $\vec{v} = (-3, 6, 3)$ jsou ortogonální. Oba vektory znormujte.
2. Jsou dány vektory $\vec{u} = (-1, 4, -2)$ a $\vec{v} = (\lambda, -1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Určete číslo λ tak, aby vektory $\vec{u}, \vec{v}$ byly ortogonální.
3. Jsou dány vektory $\vec{u} = (-1, 4, 2)$ a $\vec{v} = (3, \lambda, \mu)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Určete alespoň jednu dvojici čísel λ a μ tak, aby vektory $\vec{u}, \vec{v}$ byly ortogonální.

Řešení:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9 - 6 + 15 = 0$, $\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$
2. $\lambda = -10$
3. Např. $\lambda = 0, \mu = \frac{3}{2}$, obecně $4\lambda + 2\mu = 3$.

V $\mathbb{R}_3$ je **vektorový součin dvou vektorů** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor

$$\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Vektorový součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ značíme $\vec{u} \times \vec{v}$, tedy $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Vektor $\vec{w}$ je ortogonální jak k vektoru $\vec{u}$, tak k vektoru $\vec{v}$. To je důležitá vlastnost, která umožňuje doplnit dva ortogonální vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ na ortogonální trojici vektorů.

Cvičení:

4. Doplněte vektory $\vec{u} = (3, -1, 5)$ a $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ vektorem $\vec{w}$ na ortogonální trojici vektorů. Přesvědčte se, že změna pořadí vektorů ve vektorovém součinu znamená změnu orientace vektoru $\vec{w}$.
5. Vektor $\vec{u} = (1, -2, -2)$ doplňte aspoň jednou dvojicí vektorů $\vec{v}$ a $\vec{w}$ na ortogonální trojici vektorů.

Řešení:

4. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-11, -8, 5)$, $\vec{v} \times \vec{u} = (11, 8, -5)$
5. Např. $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (2, -4, 5)$.

1.5 Ortogonální a ortonormální báze

V prostoru R_3 tvoří **ortogonální bázi** tři nenulové vektory, které jsou po dvou ortogonální. Jestliže jsou vektory ještě jednotkové, pak tvoří **ortonormální bázi**. Označíme-li vektory ortonormální báze $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$, pak pro jejich skalární součiny platí:

$$\vec{t}_i \cdot \vec{t}_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases} \quad (7)$$

Základní ortonormální bázi, tzv. **kanonickou bázi**, tvoří vektory

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1). \quad (8)$$

Snadno se přesvědčíme, že báze tvořená vektory $\vec{T}_1 = (2, -2, 1), \vec{T}_2 = (2, 1, -2), \vec{T}_3 = (1, 2, 2)$ je ortogonální.

Normováním vektorů $\vec{T}_i, i = 1, 2, 3$, dostaneme ortonormální bázi, kterou tvoří vektory

$$\vec{t}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right), \vec{t}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right), \vec{t}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right). \quad (9)$$

Další příklady ortonormálníchází:

$$\vec{t}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \vec{t}_2 = \left(\frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right), \vec{t}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (10)$$

$$\vec{t}_1 = (\cos v, \sin v, 0), \vec{t}_2 = (-\sin v, \cos v, 0), \vec{t}_3 = (0, 0, 1). \quad (11)$$

Báze (11) je ortonormální pro každé $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Cvičení:

1. Přesvědčte se, že báze (10) a (11) mají vlastnosti (7).
2. Ukažte, že vektory $\vec{T}_1 = (1, 1, \sqrt{2})$ a $\vec{T}_3 = (-\sqrt{2}, 0, 1)$ jsou ortogonální a určete souřadnice vektoru $\vec{T}_3$, který je k vektorům $\vec{T}_1$ a $\vec{T}_2$ ortogonální. Normováním vektorů $\vec{T}_i, i = 1, 2, 3$, z nich utvořte bázi ortonormální.
3. Vektor $\vec{t}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ doplňte na ortonormální bázi vektory $\vec{t}_2$ a $\vec{t}_3$ tak, aby vektor $\vec{t}_2$ byl ortogonální k $\vec{e}_3$.

Řešení:

2. $\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 = 0$, $\vec{T}_3 = (1, -3, \sqrt{2})$, $\vec{t}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{t}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{t}_3 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-3}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$
3. $\vec{t}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\vec{t}_3 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Jestliže vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, pak trojice (v_1, v_2, v_3) jsou **souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem ke kanonické bázi**. Tudíž vektor $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = (v_1, v_2, v_3)$. Při úpravě jsme použili pravidel pro násobení aritmetického vektoru reálným číslem a pro sčítání aritmetických vektorů. Souřadnice všech vektorů v R_3 v předchozím textu byly souřadnice vzhledem ke kanonické bázi.

Nechť $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ jsou **souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k obecné ortonormální bázi** tvořené vektory $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$. To znamená, že $\vec{v} = \vec{v}_1 \vec{t}_1 + \vec{v}_2 \vec{t}_2 + \vec{v}_3 \vec{t}_3$. (12)

Důležité pro další kapitoly:

Mějme dány souřadnice $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi tvořené vektory $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ a chceme určit souřadnice (v_1, v_2, v_3) vektoru $\vec{v}$ vzhledem ke kanonické bázi. Postup ukážeme na konkrétním příkladě.

Budiž $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (12, 3, -6)$ a vektory $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ jsou vektory (9). Potom podle (12) je

$$\vec{v} = 12\vec{t}_1 + 3\vec{t}_2 - 6\vec{t}_3 = 12\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) - 6\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (8, -11, -2).$$

Uspořádaná trojice $(8, -11, -2)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem ke kanonické bázi.

Máme-li dány souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem ke kanonické bázi, pak jeho souřadnice vzhledem k obecné ortonormální bázi spočteme tak, že rovnost (12) vynásobíme skalárně vektory $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$. Tak dostaneme, že platí

$$\vec{v}_1 = \vec{v} \cdot \vec{t}_1, \quad \vec{v}_2 = \vec{v} \cdot \vec{t}_2, \quad \vec{v}_3 = \vec{v} \cdot \vec{t}_3.$$

Pro vektory z předchozího příkladu je

$$\vec{v}_1 = (8, -11, -2) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 12$$

$$\vec{v}_2 = (8, -11, -2) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = 3$$

$$\vec{v}_3 = (8, -11, -2) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -6.$$

Cvičení:

- Vektor $\vec{v}$ má souřadnice $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 0)$ vzhledem k bázi (10). Spočtete jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi.
- Vektor $\vec{v}$ má vzhledem k bázi (11) souřadnice $(3, -4, -2)$. Určete jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi.
- Vektor $\vec{v}$ má souřadnice $(1, 1, -3)$ vzhledem ke kanonické bázi. Vypočtete jeho souřadnice vzhledem k bázi (10).

Řešení:

$$4. \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - 4, \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1, \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1\right)$$

$$5. (3\cos \nu + 4\sin \nu, 3\sin \nu - 4\cos \nu, -2)$$

$$6. (-1, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

Kapitola 2: Křivky

2.1 Obecně o parametrizaci křivky

Křivku v prostoru můžeme popsat těmito způsoby:

a) bodovou funkcí

$$X(t) = [x(t), y(t), z(t)], \text{ resp. } X(t) = O + (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I, \quad (13)$$

b) vektorovou funkcí

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I, \quad (14)$$

ve které vektory $\vec{x}(t)$ jsou průvodní vektory bodů $X(t)$ křivky,

c) parametrickým vyjádřením (parametrickými rovnicemi)

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in I. \quad (15)$$

Funkce (15) jsou souřadnicové funkce funkcí (13) a (14). Uvedené popisy křivky jsou ekvivalentní a souhrnně je budeme nazývat **parametrizací křivky**.

Vektorovou funkci (14) můžeme také psát ve tvaru

$$\vec{x}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3, \quad t \in I. \quad (16)$$

Jestliže v (16) nahradíme vektory kanonické báze vektory $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ jiné ortonormální báze, pak vektorová funkce

$$\vec{x}(t) = x(t)\vec{t}_1 + y(t)\vec{t}_2 + z(t)\vec{t}_3, \quad t \in I, \quad (17)$$

popisuje v prostoru stejnou křivku jako vektorová funkce (16). Jiné je umístění křivky v prostoru.

Popis křivky bodovou funkcí

$$X(t) = S + x(t)\vec{t}_1 + y(t)\vec{t}_2 + z(t)\vec{t}_3, \quad t \in I \quad (18)$$

znamená posunutí křivky o průvodní vektor bodu S .

Jednu křivku můžeme parametrizovat několika způsoby. Ukážeme to na přímkce, která je dána bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Přímkce je parametrizována bodovou funkcí

$$X(t) = A + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jinou parametrizaci dostaneme, vezmeme-li místo bodu A jiný bod přímkce, např. bod $B = A + l\vec{v}$, kde l je libovolné nenulové reálné číslo. Potom

$$X(t) = B + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Další parametrizaci můžeme vytvořit změnou velikosti a případně orientace vektoru $\vec{v}$ tak, že místo $\vec{v}$ užijeme vektor $\vec{u} = k\vec{v}$, kde k je nenulové reálné číslo. Potom

$$X(t) = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Za směrový vektor přímky vezměme jednotkový vektor $\vec{t} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} (v_1, v_2, v_3)$. Přímka je pak parametrizována bodovou funkcí

$$X(s) = A + s\vec{t}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

ve které má s názorný geometrický význam. Jeho absolutní hodnota vyjadřuje vzdálenost bodu $X(s)$ od bodu A , tedy $|s| = |AX(s)|$. O parametru s se ještě zmíníme v dalším textu.

Příklad:

Přímka p je dána bodem $A = [-1, 3, 4]$ a směrovým vektorem $\vec{v} = (1, -2, -2)$. Odvodíme různé parametrizace přímky p .

- Přímka p je parametrizována **bodovou funkcí**
 $X(t) = [-1, 3, 4] + t(1, -2, -2) = [-1+t, 3-2t, 4-2t], \quad t \in \mathbb{R}.$
- Přímka p má **parametrické vyjádření**
 $x = -1+t, \quad y = 3-2t, \quad z = 4-2t, \quad t \in \mathbb{R}.$
 Např. pro parametr $t=1$ dostaneme na přímce p bod $C = [0, 1, 2]$, který leží v souřadnicové rovině yz . Použijeme-li k parametrizaci přímky p bod C a za směrový vektor vezmeme vektor $-2\vec{v} = (-2, 4, 4)$, pak p je parametrizována bodovou funkcí
 $X(t) = [0, 1, 2] + t(-2, 4, 4) = [-2t, 1+4t, 2+4t], \quad t \in \mathbb{R}.$
- Normovaný vektor $\vec{v}$ je vektor $\vec{t} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ a užijeme-li ho k parametrizaci přímky p spolu s bodem A , pak p je parametrizována bodovou funkcí
 $X(s) = [-1, 3, 4] + s\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left[-1+\frac{1}{3}s, 3-\frac{2}{3}s, 4-\frac{2}{3}s\right], \quad s \in \mathbb{R}.$
 Pro $s=3$ dostaneme bod $C \in p$.

Cvičení:

- Jsou dány body $A = [-1, 3, 5]$ a $B = [0, 5, 4]$.
 - Napište parametrizaci přímky AB , vezmete-li vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ za její směrový vektor.
 - Parametrizujte přímku AB bodovou funkcí (19).
 - Vypočtete souřadnice průsečíku C přímky AB s rovinou xy , bod C použijte k parametrizaci přímky.
 - Napište parametrické vyjádření úsečky AB .
- Přímka je dána počátkem O a bodem $B = [2, 2, 6]$. Napište parametrizaci přímky, ve které užijete
 - počátek O a směrový vektor $\overrightarrow{OB}$,
 - bod B a směrový vektor $\overrightarrow{BO}$,
 - střed S úsečky OB a normovaný vektor $\overrightarrow{OB}$.
 - Parametrizujte úsečku OS a SB .

Řešení:

1.

- a) $X(t) = [-1, 3, 5] + t(1, 2, -1), t \in \mathbb{R}$
- b) $X(s) = [-1, 3, 5] + s\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right), s \in \mathbb{R}$
- c) $C = [4, 13, 0], X(t) = [4, 13, 0] + t(1, 2, -1), t \in \mathbb{R}$
- d) $X(t) = [-1, 3, 5] + t(1, 2, -1), t \in \langle 0, 1 \rangle$

2.

- a) $X(t) = [0, 0, 0] + t(2, 2, 6), t \in \mathbb{R}$
- b) $X(t) = [2, 2, 6] + t(-2, -2, -6), t \in \mathbb{R}$
- c) $X(t) = [1, 1, 3] + t(2, 2, 6), t \in \mathbb{R}$
- d) úsečka $OS : X(t) = [1, 1, 3] + t(2, 2, 6), t \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$, úsečka $SB : X(t) = [1, 1, 3] + t(2, 2, 6), t \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$

2.2 Rovinné křivky, tečna a normála

Rovinná křivka K , která leží v souřadnicové rovině xy , má podle (15) parametrické vyjádření

$$x = x(t), y = y(t), z = 0, t \in I. \quad (20)$$

Stejná křivka K v obecné rovině α je parametrizována bodovou funkcí

$$X(t) = S + x(t)\vec{t}_1 + y(t)\vec{t}_2, t \in I. \quad (21)$$

Rovina α prochází bodem S a $\vec{t}_1, \vec{t}_2$ jsou jednotkové ortonormální vektory ze zaměření roviny α .

Derivace vektorové funkce $\vec{x}(t) = x(t)\vec{t}_1 + y(t)\vec{t}_2$ je vektorová funkce

$$\vec{T}(t) = \vec{x}'(t) = x'(t)\vec{t}_1 + y'(t)\vec{t}_2.$$

Geometrický význam vektoru $\vec{T}$:

V bodě $X(t)$ je vektor $\vec{T}(t) \neq \vec{0}$ směrovým vektorem tečny křivky K .

Fyzikální význam vektoru $\vec{T}$:

Chápeme-li křivku K jako dráhu pohybujícího se hmotného bodu, pak v bodě $X(t)$ je $\vec{T}(t)$ vektorem okamžité rychlosti pohybu.

Jestliže v některém bodě $X(t_0)$ je vektor $\vec{T}(t_0)$ nulovým vektorem, pak bod $X(t_0)$ nazýváme **singulárním bodem křivky K** . Singulární body jsou „nepříjemné“ při zkoumání tvaru křivky metodami diferenciální geometrie, a proto je při zkoumání obvykle vylučujeme.

Cvičení:

3. Křivka K je dána vektorovou funkcí $\vec{x}(t) = \left(0, \frac{t^3}{3} - 4t, 0\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Najděte souřadnice singulárních bodů.
4. Křivka K je dána vektorovou funkcí $\vec{x}(t) = (2(t + \sin t), 2(t - \cos t), 0)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Určete souřadnice singulárních bodů.
5. Přesvědčte se, že křivka K , která je parametrizována bodovou funkcí $X(t) = O + 5\cos t \vec{e}_1 + 4\sin t \vec{e}_2$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, nemá singulární body.

Řešení:

3. $[0, 2, 0]$, $[0, -2, 0]$
4. Křivka K nemá singulární body.
5. Pro každé $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ platí $X'(t) = -5\sin t \vec{e}_1 + 4\cos t \vec{e}_2 \neq \vec{0}$.

Směrový vektor normály křivky K v bodě $X(t)$ je vektor

$$\vec{N}(t) = -y'(t) \vec{t}_1 + x'(t) \vec{t}_2 \quad \text{respektive} \quad \vec{N}(t) = y'(t) \vec{t}_1 - x'(t) \vec{t}_2.$$

Přesvědčte se, že pro každé t jsou vektory $\vec{T}(t)$ a $\vec{N}(t)$ ortogonální.

Normováním vektorů $\vec{T}(t)$ a $\vec{N}(t)$ dostaneme vektory $\vec{t}(t)$ a $\vec{n}(t)$, které tvoří ortonormální bázi zaměření roviny α , ve které leží křivka K .

V konkrétním bodě $X(t_0)$, $t_0 \in I$, je **tečna**, resp. **normála** křivky parametrizována bodovou funkcí

$$X_1(u) = X(t_0) + u \vec{T}(t_0), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

$$\text{resp. } X_2(v) = X(t_0) + v \vec{N}(t_0), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Příklad:

Bodovou funkcí $X(t) = O + (\cos t + t \sin t) \vec{e}_1 + (\sin t - t \cos t) \vec{e}_2$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, je parametrizována část křivky K , která je **evolventou kružnice**. Křivka leží v souřadnicové rovině xy . Odvodíme parametrizaci tečny a normály křivky K v bodě $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

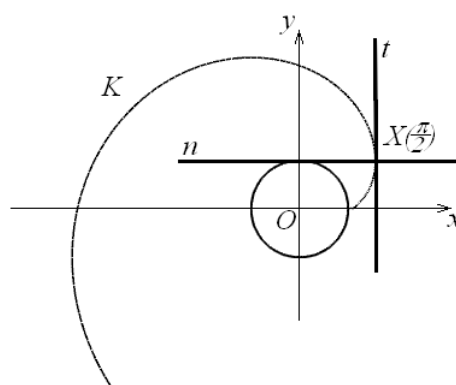
- Bod $X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\frac{\pi}{2}, 1, 0\right]$.
- Směrové vektory tečen jsou hodnoty vektorové funkce $\vec{T}(t) = t \cos t \vec{e}_1 + t \sin t \vec{e}_2 = (t \cos t, t \sin t, 0)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Pro $t = \frac{\pi}{2}$ je $\vec{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ a tečna v bodě $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ má parametrické vyjádření

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 1 + u \frac{\pi}{2}, \quad z = 0, \quad u \in \mathbb{R}.$$

- Směrové vektory normál jsou hodnoty vektorové funkce $\vec{N}(t) = -t \sin t \vec{e}_1 + t \cos t \vec{e}_2 = (-t \sin t, t \cos t, 0)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Pro $t = \frac{\pi}{2}$ je $\vec{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$ a normála v bodě $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ má parametrické vyjádření

$$x = \frac{\pi}{2} - v \frac{\pi}{2}, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Křivku K a tečnu a normálu v bodě $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ jsme zobrazili v obr. 2.1.



Obr. 2.1

2.3 Kuželosečky

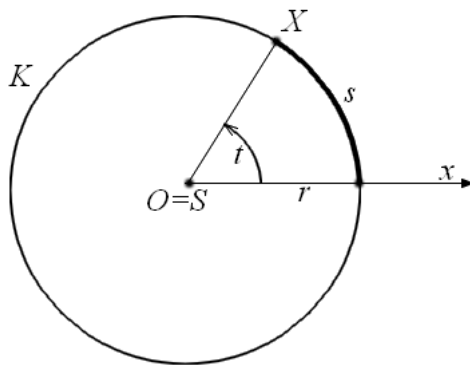
Jedna z často používaných kuželoseček je **kružnice**. Parametrické vyjádření kružnice K o poloměru r a středu O je

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (24)$$

Jiné parametrické vyjádření kružnice K je

$$x = r \cos \frac{s}{r}, \quad y = r \sin \frac{s}{r}, \quad z = 0, \quad s \in \langle 0, 2\pi r \rangle. \quad (25)$$

Zde má parametr s stejnou geometrickou interpretaci jako v (19) u přímky. Vyjadřuje vzdálenost bodu $X(s) = \left[r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0 \right]$ od bodu $A = [r, 0, 0]$ měřenou po kružnici. Geometrický význam parametrů t a s jsme znázornili na obr. 2.2.



Obr. 2.2

Poznámka 6:

Parametrizace křivky parametrem s , který vyjadřuje délku oblouku na křivce, se užívá v diferenciální geometrii křivek. V řadě teoretických úvah je parametrizace obloukem velmi výhodná. Bohužel není mnoho křivek, které lze jednoduše parametrizovat obloukem. Např. elipsu nelze parametrizovat obloukem.

Kružnice K v obecné poloze v prostoru (vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic) je parametrizována bodovou funkcí

$$X(t) = S + x(t)\vec{t}_1 + y(t)\vec{t}_2, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad \text{nebo} \quad X(s) = S + x(s)\vec{t}_1 + y(s)\vec{t}_2, \quad s \in \langle 0, 2\pi r \rangle, \quad (26)$$

ve které S je střed kružnice K , x a y jsou funkce (24) nebo (25) a $\vec{t}_1, \vec{t}_2$ jsou jednotkové ortogonální vektory ze zaměření roviny, ve které leží kružnice K .

Příklad:

Střed kružnice K je bod $S = [4, -6, 7]$, poloměr $r = 4$ a $\vec{t}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{t}_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Napište parametrické vyjádření kružnice.

Řešení:

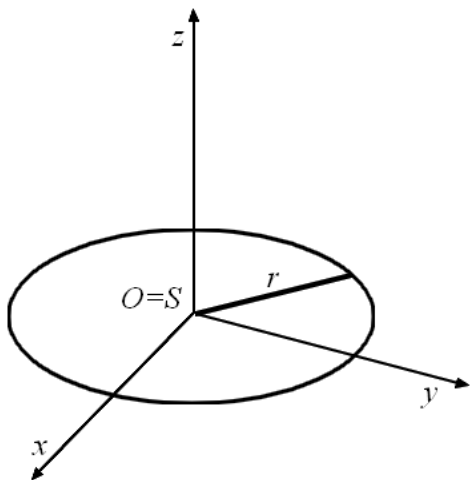
Užijeme-li v (26) souřadnicové funkce (24), pak kružnice K je parametrizována bodovou funkcí

$$X(t) = [4, -6, 7] + 4 \cos t \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + 4 \sin t \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[4 + \frac{4}{3} \cos t + \frac{8}{3} \sin t, -6 + \frac{8}{3} \cos t - \frac{8}{3} \sin t, 7 + \frac{8}{3} \cos t + \frac{4}{3} \sin t \right] \\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (27)$$

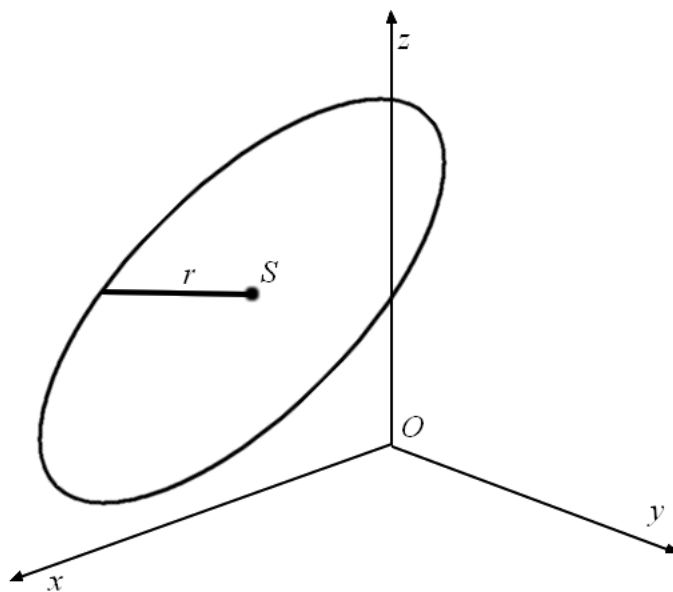
Parametrické vyjádření kružnice K je

$$\begin{aligned} x &= 4 + \frac{4}{3} \cos t + \frac{8}{3} \sin t, \\ y &= -6 + \frac{8}{3} \cos t - \frac{8}{3} \sin t, \\ z &= 7 + \frac{8}{3} \cos t + \frac{4}{3} \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

Uspořádaná trojice $[x, y, z]$ z (28) jsou souřadnice bodů kružnice v kartézské soustavě souřadnic, resp. souřadnice průvodních vektorů bodů kružnice vzhledem ke kanonické bázi, viz **Důležité** v závěru odstavce 1.5. Kružnici v základní poloze zachycuje obr. 2.3, kružnici v obecné poloze obr. 2.4.



Obr. 2.3



Obr. 2.4

Cvičení:

1. V bodové funkci (27) uvažujte $t \in \langle 0, \pi \rangle$ nebo $t \in \langle \pi, 2\pi \rangle$. Jaká část kružnice je tím parametrizována?
2. Přímka o je dána bodem $B = [1, -2, 3]$ a směrovým vektorem $\vec{v} = (-1, 2, 0)$. Odvoďte parametrizaci kružnice, kterou vytvoří počátek O otáčením kolem přímky o .
3. Napište parametrizaci kružnice se středem v počátku O a poloměru $r = 4$. K parametrizaci použijte vektory $\vec{t}_1 = (\cos u, \sin u, 0)$ a $\vec{t}_2 = (0, 0, 1)$. Kružnici nakreslete pro různou volbu u , např. $u = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \dots$
4. Napište parametrizaci tečny a normály kružnice o parametrizaci (27) v bodech $X(0)$ a $X\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Řešení:

1. Půlkružnice.

$$2. \quad S = [0, 0, 3], r = 3, \text{ např. } \vec{t}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \vec{t}_2 = (0, 0, 1)$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{5}} \cos t, y = \frac{3}{\sqrt{5}} \cos t, z = 3 + 3 \sin t, \quad t \in R$$

$$3. \quad x = 4 \cos u \cos t, y = 4 \sin u \cos t, z = 4 \sin t, \quad t \in R$$

4. Pro $X(0)$:

$$\bullet \text{ tečna } X_1(u) = \left[\frac{16}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{29}{3} \right] + u \left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right), \quad u \in R$$

$$\bullet \text{ normála } X_2(v) = \left[\frac{16}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{29}{3} \right] + v \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3} \right), \quad v \in R$$

Pro $X\left(\frac{3\pi}{2}\right)$:

$$\bullet \text{ tečna } X_1(u) = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{17}{3} \right] + u \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3} \right), \quad u \in R$$

$$\bullet \text{ normála } X_2(v) = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{17}{3} \right] + v \left(\frac{-8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{-4}{3} \right), \quad v \in R$$

Nyní uvedeme obvyklé parametrické vyjádření dalších kuželoseček.

$$\textbf{Elipsa: } x = a \cos t, y = b \sin t, z = 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\textbf{Hyperbola: } x = \frac{a}{\cos t}, y = b \tan t, z = 0, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\textbf{Parabola: } x = t, y = \frac{t^2}{2p}, z = 0, \quad t \in R.$$

Cvičení:

Odvoďte parametrizaci kuželoseček v obecné poloze v prostoru vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic obdobně, jako jsme to udělali u kružnice.

2.4 Šroubovice

Šroubovice je prostorová křivka, která se používá ve stavební praxi. Šroubovice je dána parametrickým vyjádřením

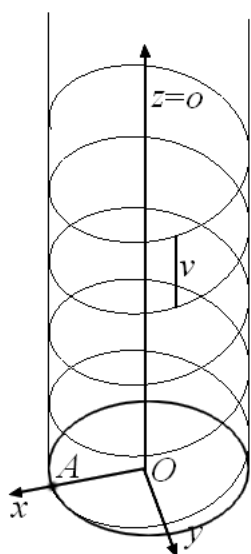
$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = v_0 t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (29)$$

resp. bodovou funkcí

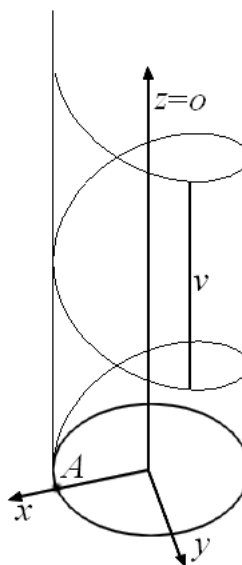
$$X(t) = O + a \cos t \vec{e}_1 + a \sin t \vec{e}_2 + v_0 t \vec{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Šroubovice vzniká šroubovým pohybem daného bodu A . Šroubový pohyb je složením otáčení kolem dané přímky (osy o) a posouváním ve směru osy o , $A \notin o$. Parametr t je úhel otáčení a nenulová konstanta v_0 , která se nazývá **redukováná výška závitu**, určuje rychlost posouvání (její absolutní hodnota). Kladná konstanta a je vzdálenost bodu A od přímky o , která je **osou šroubového pohybu**.

Šroubové pohyby, a tedy i šroubovice, dělíme na **pravotočivé** a **levotočivé**. Na obr. 2.5 je pravotočivá a na obr. 2.6 je levotočivá šroubovice (její část). Je zřejmé, že šroubovice leží na rotační válcové ploše.



Obr. 2.5



Obr. 2.6

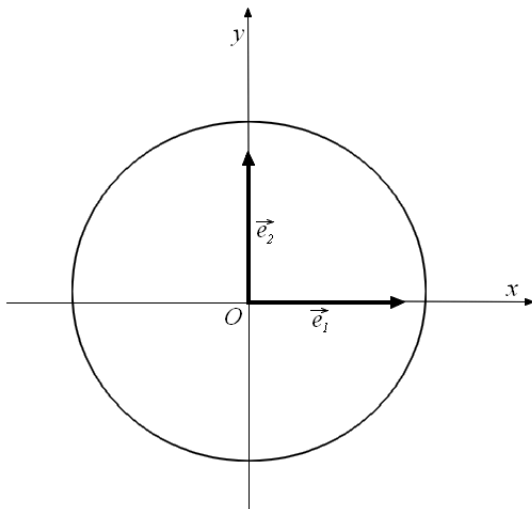
Jestliže v (29), resp. (30) bude parametr $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, dostaneme jeden závit šroubovice, která má osu šroubového pohybu v ose z a je pravotočivá. Koncové body jednoho závitu jsou body $A = X(0) = [a, 0, 0]$ a $X(2\pi) = [a, 0, 2\pi v_0]$. Vzdálenost obou bodů je $2\pi|v_0|$, nazýváme ji **výška závitu** a značíme v . V obr. 2.5 a 2.6 je zachyceno, jak výška závitu ovlivňuje tvar šroubovice.

Dále budeme volit $v_0 > 0$. Pak

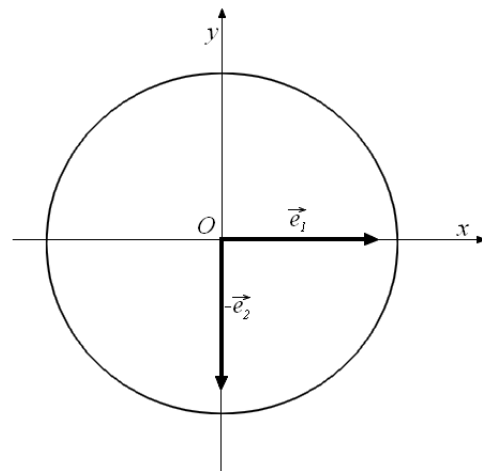
$$v = 2\pi v_0, \text{ a tedy } v_0 = \frac{v}{2\pi} \quad (31)$$

je vztah mezi výškou a redukovánou výškou závitu.

Parametrizaci levotočivé šroubovice dostaneme tak, že v (30) nahradíme vektor $\vec{e}_2$ opačným vektorem $-\vec{e}_2$, obr. 2.7 a obr. 2.8.

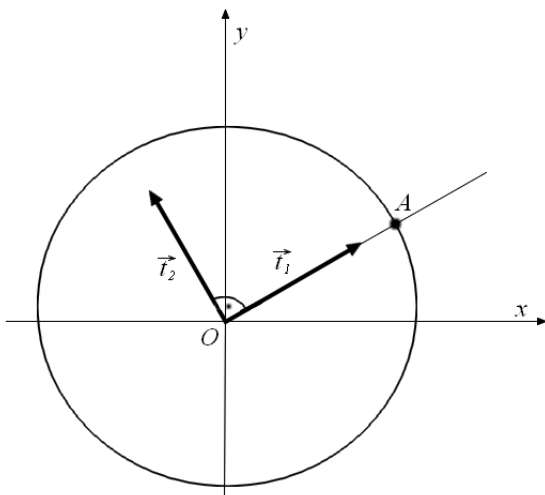


Obr. 2.7

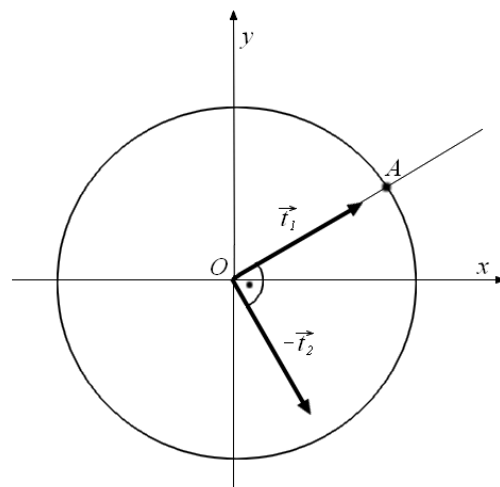


Obr. 2.8

Nechť počáteční bod šroubovice je obecný bod A , $A \neq O$, v rovině xy . Označme $\vec{t}_1$ normovaný průvodní vektor bodu A , $\vec{t}_1 = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$. Jednotkový vektor ze zaměření roviny xy , který je ortogonální k vektoru $\vec{t}_1$, označme $\vec{t}_2$. Takové vektory existují dva a jsou to opačné vektory, obr. 2.9 a obr. 2.10.



Obr. 2.9



Obr. 2.10

Jeden závit pravotočivé šroubovice s počátečním bodem A a osou šroubového pohybu v souřadnicové ose z je parametrizován bodovou funkcí

$$X(t) = O + a \cos t \vec{t}_1 + a \sin t \vec{t}_2 + v_0 t \vec{e}_3, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (32)$$

Jeden závit levotočivé šroubovice je parametrizován bodovou funkcí

$$X(t) = O + a \cos t \vec{t}_1 - a \sin t \vec{t}_2 + v_0 t \vec{e}_3, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (33)$$

Nahradíme-li v bodové funkci (30) vektory kanonické báze vektory $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ jiné ortonormální báze, dostaneme parametrizaci šroubovice, která má pouze jiné umístění v prostoru. Nahrazení počátku O v (30), (32) nebo (33) jiným bodem S znamená posunutí šroubovice.

Cvičení:

1. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu dvou šroubovic, které jsou dány bodovými funkcemi $X(t) = S + a \cos t \vec{e}_1 \pm a \sin t \vec{e}_2 + v_0 t \vec{e}_3$. Bod $S = [1, 2, -2]$, $a = 3$, $v_0 = 1.6$. Určete výšku v závitu a obě šroubovice nakreslete.
2. Napište parametrické vyjádření poloviny závitu, která je dána bodovou funkcí $X(t) = O + a \cos t \vec{t}_1 + a \sin t \vec{t}_2 + v_0 t \vec{t}_3$, kde $a = 4$, $v_0 = 2$ a vektory $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ jsou vektory (9).
3. Parametrizujte $\frac{3}{4}$ závitu šroubovice, která vznikne šroubovým pohybem bodu $A = [-2, 1, 0]$, osa šroubového pohybu $o = z$, výška závitu $v = 12$, šroubovice je pravotočivá.
4. Odvoďte parametrizaci jednoho a půl závitu levotočivé, resp. pravotočivé šroubovice, která je dána osou $o = z$ šroubového pohybu, počátečním bodem $A = [4, -3, -1]$ a výšku závitu $v = 10$.

Řešení:

1. $x = 1 + 3 \cos t$, $y = 2 + 3 \sin t$, $z = -2 + 1.6t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v = 3.2\pi$
2. $x = \frac{8}{3} \cos t + \frac{8}{3} \sin t + \frac{2}{3}t$, $y = -\frac{8}{3} \cos t + \frac{4}{3} \sin t + \frac{4}{3}t$, $z = \frac{4}{3} \cos t - \frac{8}{3} \sin t + \frac{4}{3}t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$
3. $x = -2 \cos t - \sin t$, $y = \cos t - 2 \sin t$, $z = \frac{6}{\pi}t$, $t \in \langle 0, \frac{3}{2}\pi \rangle$
4. $x = 4 \cos t \pm 3 \sin t$, $y = -3 \cos t \pm 4 \sin t$, $z = -1 + \frac{5}{\pi}t$, $t \in \langle 0, 3\pi \rangle$

2.5 Tečna, hlavní normála a binormála šroubovice

Nechť je šroubovice parametrizována vektorovou funkcí

$$\vec{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, v_0 t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (34)$$

Derivace vektorové funkce (34) je vektorová funkce

$$\vec{T}(t) = \vec{x}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, v_0). \quad (35)$$

Její hodnoty jsou směrové vektory tečen v příslušných bodech šroubovice. Normováním vektorů (35) dostaneme jednotkové směrové vektory tečen. Jsou dány vektorovou funkcí

$$\vec{t}(t) = \left(\frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{v_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \right). \quad (36)$$

Označme $\vec{N}$ vektorovou funkcí

$$\vec{N}(t) = \vec{x}''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0).$$

Normováním vektorů $\vec{N}(t)$ dostaneme jednotkové vektory, které jsou dány vektorovou funkcí

$$\vec{n}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0). \quad (37)$$

Vektory (37) jsou pro každé t ortogonální k vektorům (35), resp. (36). Jsou to směrové vektory přímk, které se nazývají **hlavní normály šroubovice**.

Jednotkové vektory, které jsou dány vektorovou funkcí

$$\vec{b}(t) = \vec{t}(t) \times \vec{n}(t) = \left(\frac{v_0 \sin t}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{-v_0 \cos t}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \right), \quad (38)$$

jsou ortogonální k vektorům $\vec{t}(t)$ a $\vec{n}(t)$. Proto pro každé t tvoří vektory $\vec{t}(t)$, $\vec{n}(t)$ a $\vec{b}(t)$ ortonormální bázi. Vektory (38) jsou směrové vektory přímk, které se nazývají **binormály šroubovice**.

V daném bodě šroubovice tvoří tečna, hlavní normála a binormála tzv. **Frenetův průvodní trojhran**. Umístíme vektory $\vec{t}$, $\vec{n}$ a $\vec{b}$ ortonormální báze tak, aby měly společný počáteční bod na šroubovici. Potom s pohybem bodu po šroubovici se pohybují i vektory $\vec{t}$, $\vec{n}$ a $\vec{b}$. Proto hovoříme o průvodní pohyblivé bázi, která se v literatuře nazývá **Frenetův průvodní repér**.

Směrové vektory tečen šroubovice, která je parametrizována bodovou funkcí

$$X(t) = S + a \cos t \vec{t}_1 + a \sin t \vec{t}_2 + v_0 t \vec{t}_3, \quad t \in R, \quad (39)$$

jsou dány vektorovou funkcí

$$\vec{T}(t) = -a \sin t \vec{t}_1 + a \cos t \vec{t}_2 + v_0 \vec{t}_3.$$

Vektorové funkce jednotkových směrových vektorů tečen, hlavních normál a binormál šroubovice parametrizované bodovou funkcí (39) vytvoříme jako kombinace vektorů $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$. Koeficienty kombinací jsou souřadnicové funkce vektorových funkcí (36), (37) a (38).

V bodě $X(t)$ šroubovice určují tečna a hlavní normála tzv. **oskulační rovinu**, hlavní normála a binormála určují **normálovou rovinu** a tečna a binormála **rektifikační rovinu**.

Poznámka:

Stejně jako u šroubovice se pojmy Frenetův průvodní trojhran a repér, oskulační, normálová a rektifikační rovina definují u ostatních prostorových křivek. Pouze určení směrového vektoru hlavní normály je obecně komplikovanější.

Příklad:

Šroubovice je parametrizována bodovou funkcí

$$X(t) = O + 5 \cos t \vec{e}_1 + 5 \sin t \vec{e}_2 + 2t \vec{e}_3, \quad t \in R,$$

resp. vektorovou funkcí

$$\vec{x}(t) = (5 \cos t, 5 \sin t, 2t), \quad t \in R.$$

Odvodíme parametrizaci tečny, hlavní normály, binormály a rovnici oskulační, normálové a rektifikační roviny v bodě $X\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Řešení:

Pro $t = \frac{\pi}{3}$ je $X\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left[\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Směrové vektory tečen jsou hodnoty vektorové funkce $\vec{T}(t) = \vec{x}'(t) = (-5 \sin t, 5 \cos t, 2)$ a pro $t = \frac{\pi}{3}$ je

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}, 2\right).$$

Tečna v bodě $X\left(\frac{\pi}{3}\right)$ má parametrické vyjádření $x = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}u$, $y = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}u$, $z = \frac{2\pi}{3} + 2u$, $u \in R$.

Směrové vektory hlavních normál jsou hodnoty funkce $\vec{N}(t) = \vec{x}''(t) = (-5 \cos t, -5 \sin t, 0) = -5 \vec{n}(t)$ a pro $t = \frac{\pi}{3}$ je $\vec{n}(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Hlavní normála v bodě $X\left(\frac{\pi}{3}\right)$ má parametrické vyjádření $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}u$, $y = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}u$, $z = \frac{2\pi}{3}$, $u \in \mathbb{R}$.

Směrové vektory binormál jsou hodnoty vektorové funkce

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = (-5\sin t, 5\cos t, 2) \times (-5\cos t, -5\sin t, 0) = (10\sin t, -10\cos t, 25)$$

a pro $t = \frac{\pi}{3}$ je $\vec{B}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5(\sqrt{3}, -1, 5)$.

Binormála má parametrické vyjádření $x = \frac{5}{2} + \sqrt{3}u$, $y = \frac{5\sqrt{3}}{2} - u$, $z = \frac{2\pi}{3} + 5u$, $u \in \mathbb{R}$.

Za směrový vektor tečny, hlavní normály resp. binormály v bodě $X\left(\frac{\pi}{3}\right)$ můžeme vzít vektory

$\vec{T}_1 = (-5\sqrt{3}, 5, 4)$, $\vec{N}_1 = (1, \sqrt{3}, 0)$ resp. $\vec{B}_1 = (\sqrt{3}, -1, 5)$. Přesvědčte se, že vektory tvoří ortogonální bázi.

Směrový vektor normály oskulační roviny je vektor $\vec{B}_1 = (\sqrt{3}, -1, 5)$, a proto má oskulační rovina obecnou rovnici $\sqrt{3}x - y + 5z + d = 0$. Číslo d určíme dosazením souřadnic bodu $X\left(\frac{\pi}{3}\right)$ do této

rovnice. Dostaneme $d = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{10\pi}{3} = -\frac{10\pi}{3}$.

Oskulační rovina má rovnici $\sqrt{3}x - y + 5z - \frac{10\pi}{3} = 0$.

Směrový vektor normály normálové roviny je vektor $\vec{T}_1 = (-5\sqrt{3}, 5, 4)$, a proto **normálová rovina** má obecnou rovnici $-5\sqrt{3}x + 5y + 4z + d = 0$, kde $d = -\frac{8\pi}{3}$.

Směrový vektor normály rektifikační roviny je vektor $\vec{N}_1 = (1, \sqrt{3}, 0)$, a proto **rektifikační rovina** má obecnou rovnici $x + \sqrt{3}y + d = 0$, kde $d = -10$.

Frenetův repér šroubovice v bodě $X\left(\frac{\pi}{3}\right)$ dostaneme normování vektorů $\vec{T}\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\vec{N}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a $\vec{B}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Můžeme normovat také vektory $\vec{T}_1$, $\vec{N}_1$ a $\vec{B}_1$. Potom

$$\vec{t}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{29}}, \frac{5}{2\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right),$$

$$\vec{n}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$\vec{b}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}}, -\frac{1}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

Cvičení:

1. Napište parametrizace tečen šroubovice ze cvičení 1. z odstavce 2.4 v obecném bodě a v bodech $X\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a $X\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Vypočítejte souřadnice průsečíků tečen s rovinou xy .
2. Pro šroubovici ze cvičení 1. z odstavce 2.4 v bodě $X(0)$ vypočítejte souřadnice jednotkových vektorů tečny, hlavní normály a binormály. Napište parametrizaci všech tří přímk.
3. Pro šroubovici ze cvičení 2. z odstavce 2.4 parametrizujte hlavní normály v bodech $X(0)$, $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a $X\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Na hlavních normálách parametrizujte úsečky s krajními body na šroubovici a na ose šroubového pohybu.
4. Polovina závitu šroubovice je parametrizována bodovou funkcí $X(t) = O - 4\cos t \vec{e}_1 + 4\sin t \vec{e}_2 + 3t \vec{e}_3$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Napište parametrizaci kružnic, které mají středy v bodech $X(0)$, $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a $X(\pi)$ šroubovice, jejich poloměr $r = 2$ a leží v normálových rovinách šroubovice. Šroubovici a kružnice nakreslete.

Řešení:

1. V bodě $X(t)$: $Y(u) = [1 + 3\cos t + u(-3\sin t); 2 \pm 3\sin t + u(\pm 3\cos t); -2 + 1.6t + 1.6u]$, $u \in R$.
 V bodě $X\left(\frac{\pi}{3}\right)$: $Y(u) = \left[1 + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}u; 2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}u; -2 + 1.6\frac{\pi}{3} + 1.6u\right]$, $u \in R$. Průsečík tečny s rovinou xy : $z = 0 \Rightarrow u = \frac{5}{4} - \frac{\pi}{3}$.
 V bodě $X\left(\frac{2\pi}{3}\right)$: $Y(u) = \left[1 - \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}u; 2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \mp \frac{3}{2}u; -2 + 1.6\frac{2\pi}{3} + 1.6u\right]$, $u \in R$. Průsečík tečny s rovinou xy : $z = 0 \Rightarrow u = \frac{5}{4} - \frac{2\pi}{3}$.
2. $\vec{t}(0) = \left(0; \frac{\pm 3}{\sqrt{3^2 + 1.6^2}}; \frac{1.6}{\sqrt{3^2 + 1.6^2}}\right)$, $\vec{n}(0) = (-1; 0; 0)$, $\vec{b}(0) = \left(0; \frac{-1.6}{\sqrt{3^2 + 1.6^2}}; \frac{\pm 3}{\sqrt{3^2 + 1.6^2}}\right)$.
 Rovnice tečny: $Y(u) = \left[4; 2 + \frac{\pm 3u}{\sqrt{3^2 + 1.6^2}}; -2 + \frac{1.6u}{\sqrt{3^2 + 1.6^2}}\right]$, $u \in R$.
 Rovnice hlavní normály: $Y(u) = [4 - u; 2; -2]$, $u \in R$.
 Rovnice binormály: $Y(u) = \left[4; 2 - \frac{1.6u}{\sqrt{3^2 + 1.6^2}}; -2 + \frac{\pm 3u}{\sqrt{3^2 + 1.6^2}}\right]$, $u \in R$.
3. Hlavní normála v bodě $X(0)$: $Y(u) = \left[\frac{8}{3} - \frac{8}{3}u; -\frac{8}{3} + \frac{8}{3}u; \frac{4}{3} - \frac{4}{3}u\right]$, $u \in R$, úsečka: $u \in \langle 0, 1 \rangle$.
 Hlavní normála v bodě $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$:
 $Y(u) = \left[\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{8\sqrt{2}}{3}u; -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}u; -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}u\right]$, $u \in R$, úsečka: $u \in \langle 0, 1 \rangle$.
 Hlavní normála v bodě $X\left(\frac{3\pi}{2}\right)$: $Y(u) = \left[-\frac{8}{3} + \pi + \frac{8}{3}u; -\frac{4}{3} + 2\pi + \frac{4}{3}u; \frac{8}{3} + 2\pi - \frac{8}{3}u\right]$, $u \in R$,
 úsečka: $u \in \langle 0, 1 \rangle$.

Kapitola 3: Plochy

3.1 Parametrizace ploch

Plochu umístěnou do trojrozměrného prostoru budeme parametrizovat:

a) bodovou funkcí

$$X(u, v) = O + x(u, v)\vec{e}_1 + y(u, v)\vec{e}_2 + z(u, v)\vec{e}_3 = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)], \quad (u, v) \in \Omega \subseteq R_2, \quad (1)$$

b) vektorovou funkcí

$$\vec{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega \subseteq R_2, \quad (2)$$

kde vektory $\vec{x}(u, v)$ jsou průvodní vektory bodů $X(u, v)$ plochy,

c) parametrickým vyjádřením

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega \subseteq R_2 \quad (3)$$

kde funkce (3) jsou souřadnicové funkce funkcí (1) a (2).

Je zřejmé, že všechny parametrizace jsou ekvivalentní.

Je-li v některé parametrizaci $u = u_0$, resp. $v = v_0$ konstanta, pak (1), (2) nebo (3) je parametrizací křivky na ploše. Na ploše tak máme **dvě soustavy parametrických křivek**.

$$\text{Plochou je graf spojitě funkce dvou proměnných} \quad z = f(x, y), \quad (u, v) \in \Omega \subseteq R_2. \quad (4)$$

$$\text{Plocha má parametrické vyjádření} \quad x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \in \Omega. \quad (5)$$

Parametrické křivky jedné, resp. druhé soustavy jsou křivky průniku rovin o rovnicích $x = u$, resp. $y = v$ a grafu funkce.

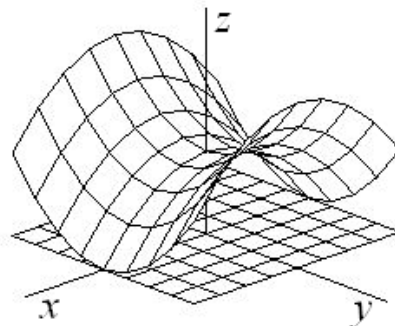
Příklad:

Grafem funkce $z = x^2 - y^2$ je hyperbolický paraboloid. Plocha má parametrické vyjádření

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 - v^2, \quad (u, v) \in R^2.$$

Parametrické křivky jedné i druhé soustavy jsou paraboly, viz obr. 3.1.

Dále na obr. 3.1 vidíme, že parametrické křivky plochy jsou vlastně přenesením parametrických křivek z roviny xy , opatřené kartézskou soustavou souřadnic, na plochu. Každý bod na ploše je průsečíkem právě jedné parametrické křivky jedné soustavy a právě jedné parametrické křivky druhé soustavy.

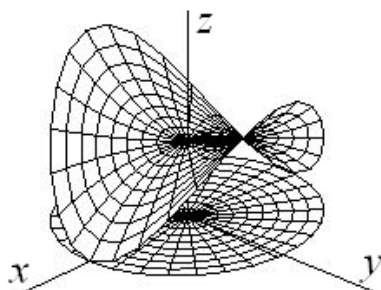


Obr. 3.14

Jiné parametrické vyjádření hyperbolického paraboloidu je

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v, u \in \langle 0, +\infty \rangle, v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (6)$$

Na obr. 3.2 vidíme, že parametrické křivky v této parametrizaci jsou přenesením parametrických křivek z roviny xy , opatřené polárními souřadnicemi, na plochu.



Obr. 3.2

Poznámka 1:

Každou plochu můžeme parametrizovat několika způsoby. Změna parametrizace plochy znamená změnu parametrických křivek na ploše.

Poznámka 2:

Souřadnicová funkce z v parametrickém vyjádření (6) je vlastně složená funkce

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x = u \cos v, y = u \sin v.$$

Cvičení:

1. Graf funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, parametrizujte parametrizací (5) a parametrizací analogickou k (6). Nakreslete části grafu funkce v obou parametrizacích.
2. Obdobně jako v předchozím příkladě parametrizujte graf funkce $z = 4 - (x - 2)^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nakreslete k parametrizacím obrázky.
3. Mějme funkci $f(x, y) = \sqrt{16 - (x + 2)^2 - y^2}$. Určete definiční obor funkce. Utvořte složenou funkci tak, že položíte $x = u \cos v, y = u \sin v, u \in \langle 0, 2 \rangle, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Nakreslete obrázek grafu funkce.

Bodovou funkcí $X(u, v) = \left[u \cos v, u \sin v, \sqrt{16 - (u^2 + 4u \cos v + 4)} \right]$, $u \in \langle 0, 2 \rangle, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$, je parametrizována pouze část grafu funkce. Zakreslete do obrázku tuto část.

V následujících třech odstavcích budeme pracovat pouze s takovými plochami, které vyhovují následující definici:

Plocha vzniká spojitým pohybem křivky, která při pohybu nemění svůj tvar.

Z této definice budeme odvozovat parametrizaci plochy a uvádět, jaké jsou parametrické (tvořící) křivky na ploše. Při odvozování parametrizace budeme užívat pohyblivé ortonormální báze.

Pokud připustíme, že křivka může při pohybu měnit svůj tvar, je situace složitější, ale je možné vytvořit celou řadu dalších zajímavých ploch.

3.2 Translační plochy

Mějme dány dvě křivky P a Q , které leží v různoběžných rovinách a mají společný bod. Translační plocha vzniká posouváním jedné křivky po druhé, přičemž posouvaná křivka nemění svůj tvar.

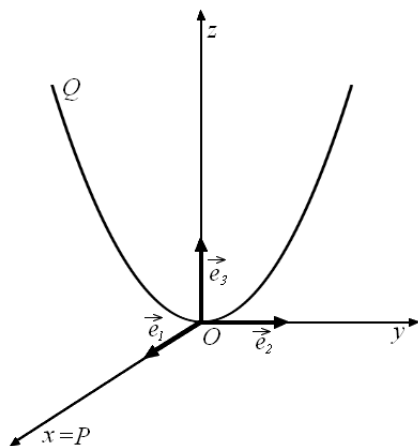
Jednoduchá translační plocha je válcová plocha, která vzniká posouváním křivky po přímce.

Příklad:

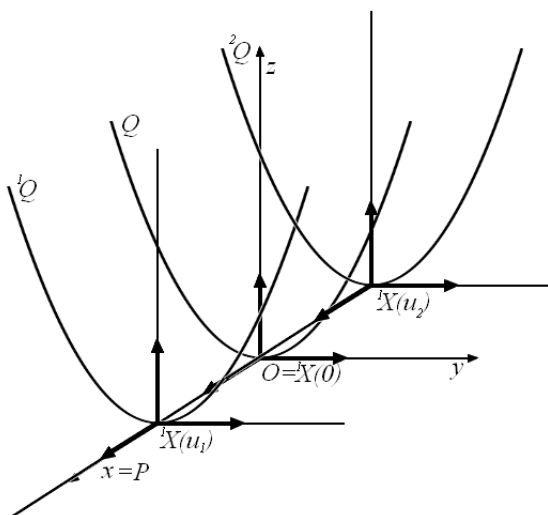
Křivka P je přímka a křivka Q je parabola v rovině kolmé k P s vrcholem na P . Odvodíme parametrizaci plochy, která vznikne posouváním paraboly po přímce a která se nazývá parabolická válcová plocha.

Řešení:

Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, aby osa x byla přímka P . Rovina paraboly Q je souřadnicová rovina yz , počátek O je vrchol paraboly a osa paraboly je souřadnicová osa z , obr. 3.3.



Obr. 3.3



Obr. 3.4

Přímka P je parametrizována bodovou funkcí

$${}^1X(u) = O + u\vec{e}_1, u \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

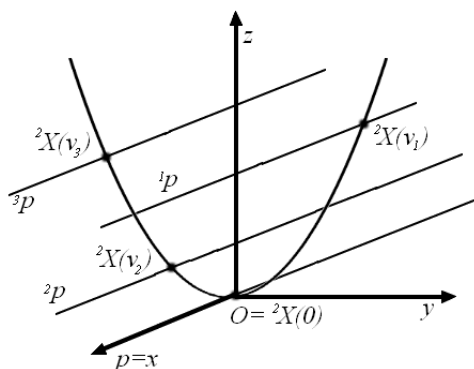
Parabola Q je parametrizována bodovou funkcí

$${}^2X(v) = O + v\vec{e}_2 + av^2\vec{e}_3, v \in \mathbb{R}, a \text{ je reálná nenulová konstanta.} \quad (8)$$

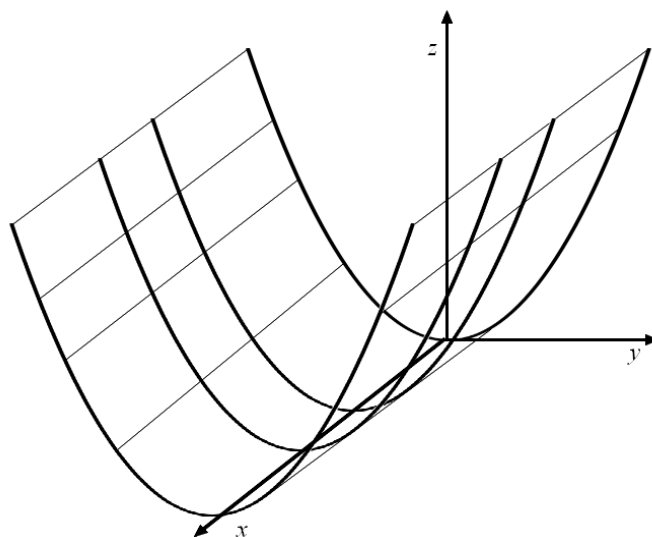
Posouvání zrealizujeme posouváním kanonické ortonormální báze, se kterou se zároveň posouvá parabola Q , obr. 3.4. Plocha je pak parametrizována bodovou funkcí (9), kterou vytvoříme tak, že v (8) nahradíme bod O body přímky p , které popisuje bodová funkce (7).

$$X(u, v) = {}^1X(u) + v\vec{e}_2 + av^2\vec{e}_3 = O + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + av^2\vec{e}_3 = [u, v, av^2], u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Bodovou funkci (9) dostaneme také tak, že v (7) nahradíme počátek O body paraboly Q s parametrickým vyjádřením (8). Geometricky to znamená posouvání přímky po parabole, obr. 3.5.



Obr. 3.5



Obr. 3.6

Parametrické křivky na uvedené parabolické válcové ploše jsou **paraboly** (pro $u = konst.$) a **přímky** (pro $v = konst.$). Část plochy včetně několika parametrických křivek obou soustav je znázorněna na obr. 3.6.

Příklad:

Křivka K je kružnice, která leží v rovině xy , má střed O a poloměr R . Kolmou kruhovou válcovou plochu vytvoříme posouváním kružnice K ve směru osy z . Odvodíme parametrické rovnice válcové plochy.

Řešení:

Křivka P je osa z , která je parametrizována bodovou funkcí

$${}^1X(u) = O + u\vec{e}_3, u \in \mathbb{R}.$$

Křivka Q je kružnice, která je parametrizována bodovou funkcí

$${}^2X(v) = O + R\cos v\vec{e}_1 + R\sin v\vec{e}_2, v \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Válcová plocha je podle předchozího příkladu parametrizována bodovou funkcí

$$X(u, v) = O + R\cos u\vec{e}_1 + R\sin u\vec{e}_2 + v\vec{e}_3$$

a její parametrické rovnice jsou

$$x = R\cos v,$$

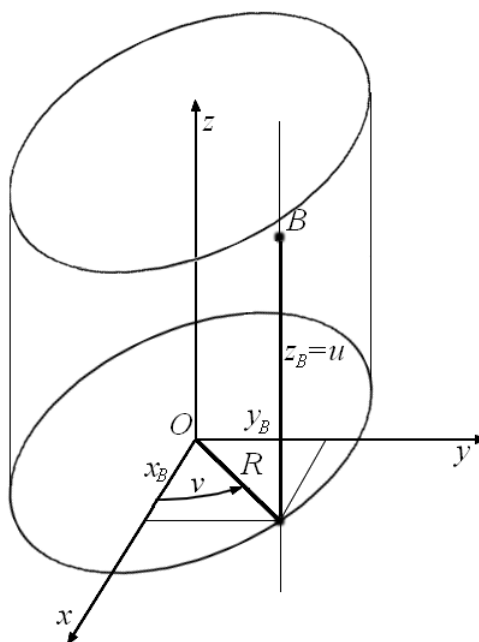
$$y = R\sin v$$

$$z = u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Parametrické křivky na válcové ploše jsou **kružnice** (pro $u = konst.$) a **přímky** (pro $v = konst.$).

Poznámka 1:

Jestliže v parametrických rovnicích válcové plochy se bude měnit poloměr R v intervalu $(0, +\infty)$, pak rovnice popisují vztah mezi válcovými (cylindrickými) souřadnicemi $[R, u, v]$ a kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$ bodu $B, B \neq O$, v prostoru. Situace je znázorněna v obr. 3.7.



Obr. 3.7

Složitější translační plochu dostaneme, nahradíme-li přímku jinou křivkou.

Příklad:

Křivky P a Q jsou paraboly v kolmých rovinách se společným vrcholem a osou. Odvodíme parametrizaci plochy, která vznikne posouváním jedné paraboly po druhé.

Řešení:

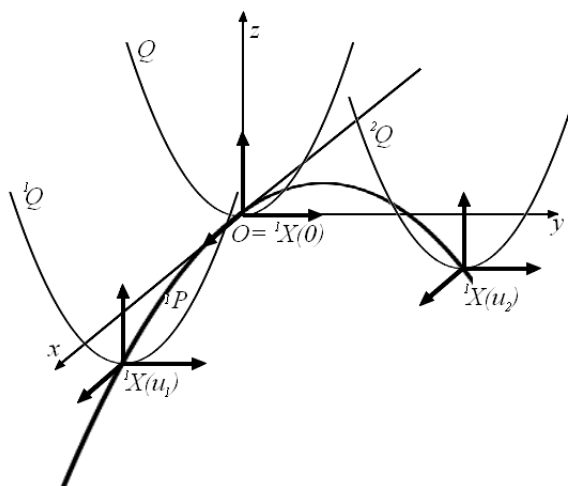
Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, aby počátek O byl vrchol, osa z byla osa parabol a parabola P , resp. Q ležela v souřadnicové rovině xz , resp. yz . Parabola P je parametrizována bodovou funkcí

$${}^1X(u) = O + u \vec{e}_1 + \frac{u^2}{2p} \vec{e}_3, \quad u \in R, \text{ kde } p \text{ je kladná konstanta z } R. \quad (10)$$

Parabola Q je parametrizována bodovou funkcí

$${}^2X(v) = O + v \vec{e}_2 + \frac{v^2}{2q} \vec{e}_3, \quad v \in R, \text{ kde } q \text{ je kladná konstanta z } R. \quad (11)$$

Posouvání opět zrealizujeme posouváním kanonické ortonormální báze po parabole P . S bází se zároveň posouvá i parabola Q , obr. 3.8.



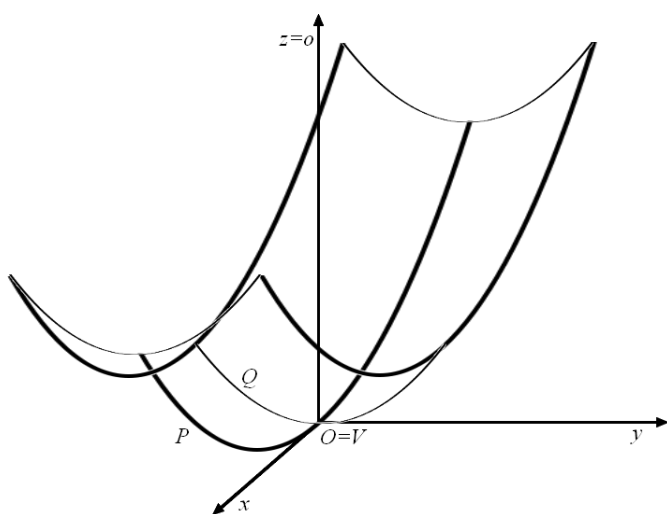
Obr. 3.8

Translační plocha je parametrizována bodovou funkcí

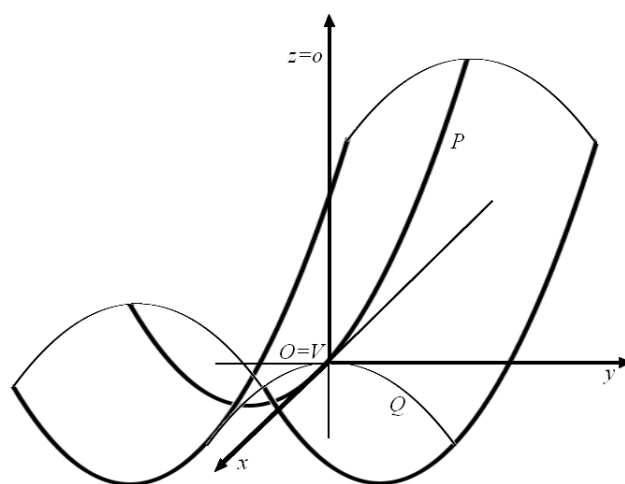
$$X(u, v) = {}^1X(u) + v \bar{e}_2 \pm \frac{v^2}{2q} \bar{e}_3 = O + u \bar{e}_1 + \frac{u^2}{2p} \bar{e}_3 + v \bar{e}_2 \pm \frac{v^2}{2q} \bar{e}_3 = \left[u, v, \frac{u^2}{2p} \pm \frac{v^2}{2q} \right], \quad u \in R, v \in R.$$

Plocha, která vznikne posouváním paraboly po parabole, se nazývá **translační plocha parabolicko-parabolická**. Pro znaménko „+“ je tato plocha **eliptickým**, pro znaménko „-“ **hyperbolickým paraboloidem**. Na obr. 3.9 je část eliptického a na obr. 3.10 hyperbolického paraboloidu.

Parametrické křivky na translační ploše parabolicko-parabolické jsou **paraboly** jak pro $u = \text{konst.}$, tak pro $v = \text{konst.}$



Obr. 3.9

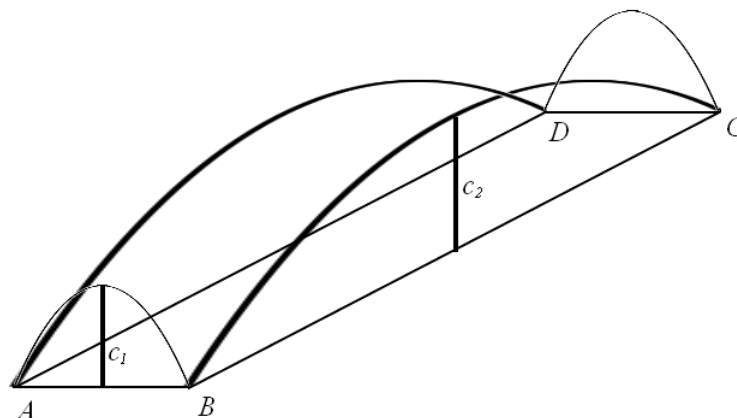


Obr. 3.10

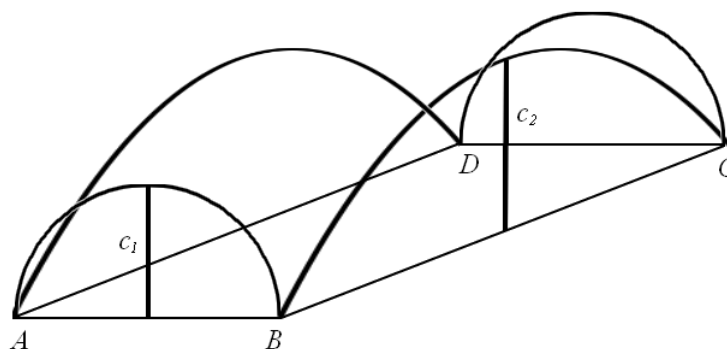
Cvičení:

Ve cvičeních 1.–3. zvolte kartézskou soustavu souřadnic tak, aby parametrizace byla co nejjednodušší.

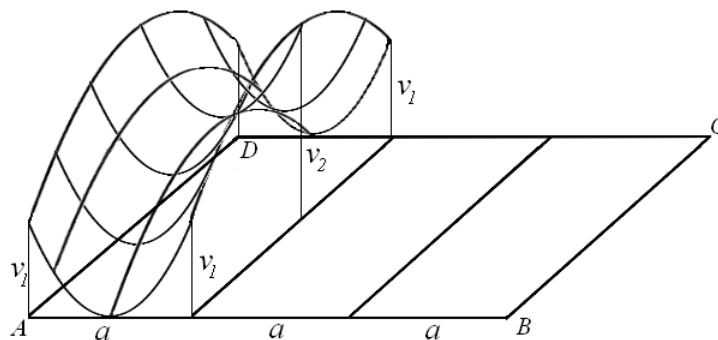
1. Parametrizujte geometrický model zastřešení obdélníku $ABCD$ o rozměrech $|AB|=a$, $|BC|=b$ translační plochou parabolicko-parabolickou podle následujícího obrázku. Konstanty c_1 a c_2 se nazývají výšky lunet.



2. Stejný obdélník je zastřešen translační plochou kruhovo-parabolickou a stejné výšce lunet. Parametrizujte plochu.



3. Parametrizujte geometrický model zastřešení obdélníku $ABCD$ žlabovou střechou. Zastřešení tvoří tři skořepiny tvaru hyperbolického paraboloidu.



3.3 Rotační plochy

Rotace v prostoru je dána pevně zvolenou přímkou o – osou rotace. Rotační plocha vzniká rotací křivky M kolem osy o . Budeme předpokládat, že M je rovinná křivka a osa rotace leží v rovině křivky M .

Parametrizace rotační plochy:

Příklad:

Rotační plocha vznikne rotací grafu M funkce $z = \frac{4}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, kolem osy z . Odvodíme parametrizaci plochy.

Řešení:

Graf funkce $z = \frac{4}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, je parametrizován bodovou funkcí

$$^1X(u) = O + u \vec{e}_1 + \frac{4}{u} \vec{e}_3, u \in \mathbb{R}^+. \quad (12)$$

Vektory $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_3$ tvoří ortonormální bázi roviny xz , ve které leží křivka M . Rotaci vektoru $\vec{e}_1$ kolem osy z popisuje vektorová funkce

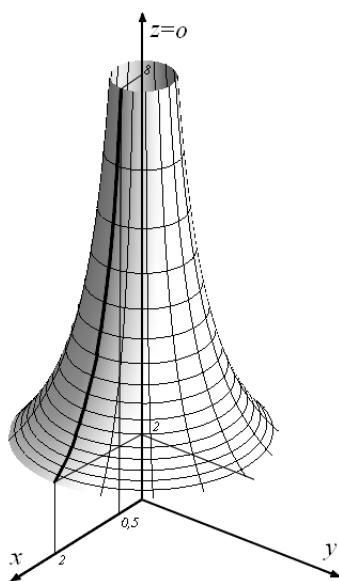
$$\vec{t}_1(v) = (\cos v, \sin v, 0), v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (13)$$

Parametrizaci rotační plochy dostaneme tak, že v (12) nahradíme vektor $\vec{e}_1$ vektorovou funkcí (13). Potom bodová funkce

$$X(u, v) = O + u \vec{t}_1(v) + \frac{4}{u} \vec{e}_3 = O + u(\cos v, \sin v, 0) + \frac{4}{u}(0, 0, 1) = \left[u \cos v, u \sin v, \frac{4}{u} \right], u \in \mathbb{R}^+, v \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

je parametrizací plochy. Na obr. 3.11 jsme znázornili část této rotační plochy pro $u \in \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle$.

Parametrické křivky pro $u = \text{konst.}$ jsou kružnice, které nazýváme **rovnoběžkové kružnice**, a parametrické křivky pro $v = \text{konst.}$ jsou křivky shodné s křivkou M , které nazýváme **meridiány**.



Obr. 3.11

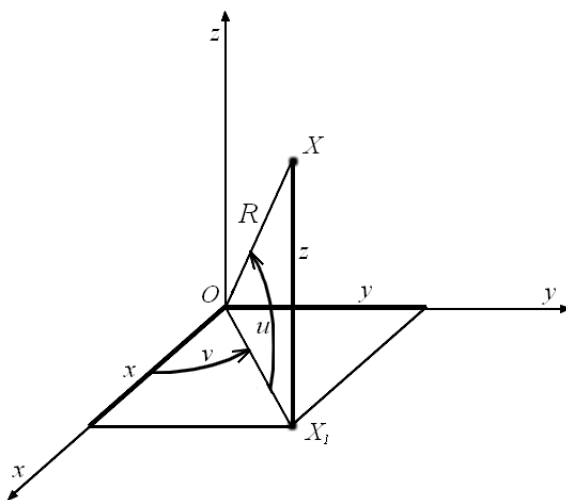
Bodovou funkcií ${}^1X(u) = O + R \cos u \vec{e}_1 + R \sin u \vec{e}_3$, $u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, je parametrizována polovina kružnice, která leží v rovině xz , jejíž střed je počátek O a poloměr R . Rotací půlkružnice kolem osy z vznikne kulová plocha, která má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= R \cos u \cos v, \\ y &= R \cos u \sin v, \\ z &= R \sin u, \end{aligned} \quad u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (14)$$

Parametrické vyjádření jsme odvodili stejně jako v předchozím příkladě. **Parametrické křivky** pro $u = \text{konst.}$ jsou opět **rovnoběžkové kružnice** a pro $v = \text{konst.}$ jsou parametrické křivky – meridiány **půlkružnice**.

Poznámka 1:

Pokud se v (15) bude měnit poloměr R v intervalu $(0, +\infty)$, pak rovnice (15) popisují vztah mezi sférickými souřadnicemi $[R, u, v]$ a kartézskými souřadnicemi $[x, z, y]$ bodu X v prostoru, obr. 3.12.



Obr. 3.15

Poznámka 2:

Kulová plocha se v geodézii užívá jako nejjednodušší referenční plocha Země. Potom se užívá značení $u = \varphi$ a $v = \lambda$. Parametr φ je **zeměpisná šířka** a parametr λ je **zeměpisná délka**. Jak známo parametrické křivky na referenční kulové ploše se nazývají rovnoběžkové kružnice – **rovnoběžky** a meridiány – **poledníky**. Toto názvosloví se přeneslo i na obecné rotační plochy. Proto u dalších rotačních ploch neuvádíme parametrické křivky.

Rotační kvadratické plochy:

Rotační kvadratické plochy jsou rotační elipsoidy a hyperboloidy, rotační paraboloid, rotační válcová a kuželová plocha.

Rotační elipsoidy, resp. hyperboloidy vznikají rotací elipsy, resp. hyperboly kolem některé jejich osy. Rotací elipsy, resp. hyperboly kolem vedlejší osy dostaneme zploštělý elipsoid, resp. jednodílný hyperboloid. Rotací kolem hlavní osy získáme protáhlý (vejčitý) elipsoid resp. dvojdílný hyperboloid. Rotací paraboly kolem její osy vznikne rotační paraboloid. O rotační válcové a kuželové ploše pojednáme v dalším odstavci.

Odvodíme parametrizaci rotačního hyperboloidu:

a) Jednodílný hyperboloid

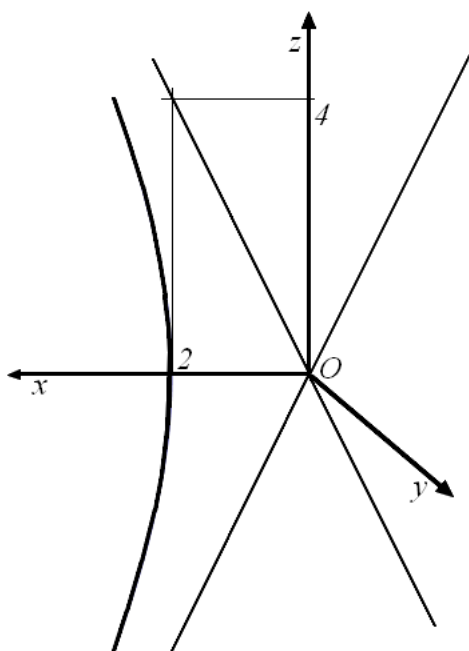
Jedna větev hyperboly, která leží v rovině xz (obr. 3.13), je parametrizována bodovou funkcí

$$^1X(u) = O + \frac{a}{\cos u} \vec{e}_1 + b \operatorname{tg} u \vec{e}_3, \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

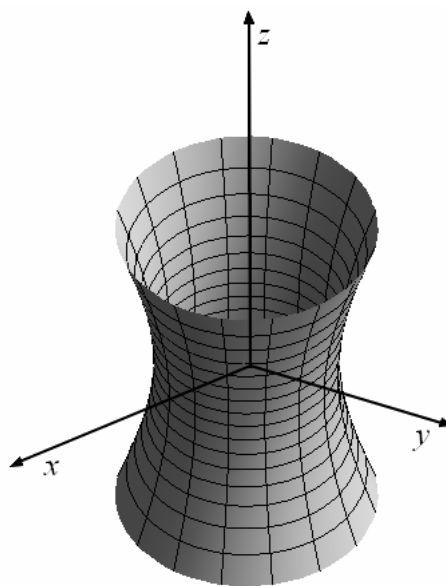
Rotuje-li větev hyperboly kolem osy z , dostaneme jednodílný hyperboloid, který je parametrizován bodovou funkcí

$$X(u, v) = O + \frac{a}{\cos u} (\cos v, \sin v, 0) + b \operatorname{tg} u (0, 0, 1) = \left[\frac{a}{\cos u} \cos v, \frac{a}{\cos u} \sin v, b \operatorname{tg} u \right], \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (15)$$

Pro volbu $a = 2, b = 4, u \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ je plocha zobrazena na obr. 3.14.



Obr. 3.13



Obr. 3.14

b) Dvojdílný hyperboloid

Jedna část dvojdílného hyperboloidu vznikne rotací části hyperboly, která je parametrizována bodovou

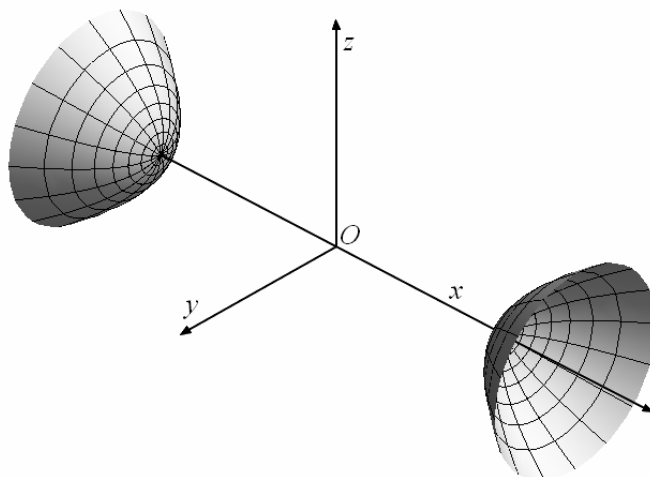
funkcí (15), ale $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, kolem osy x . Tato část je parametrizována bodovou funkcí

$$\begin{aligned} X(u, v) &= O + \frac{a}{\cos u} (1, 0, 0) + b \operatorname{tg} u (0, \cos v, \sin v) = \\ &= \left[\frac{a}{\cos u}, b \operatorname{tg} u \sin v, b \operatorname{tg} u \cos v \right], \quad u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Druhá část dvojdílného hyperboloidu vznikne rotací části hyperboly, která je parametrizována bodovou funkcí (15), kdy $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Tato část hyperboloidu je parametrizována bodovou funkcí

(16), ale $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), v \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Obě části plochy jsou pro volbu $a = 2, b = 1, u \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, jsou zobrazeny na obr. 3.15.



Obr. 3.15

Cvičení:

1. Parametrizujte rotační elipsoidy a rotační paraboloid. Potřebná parametrizace kuželoseček je uvedena v odstavci 2.3.

Rotační přímkové plochy:

Rotační přímkové plochy vznikají rotací přímky p . Přímka p je dána bodem $M = [m, n, q]$ a směrovým vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Přímka p je parametrizována bodovou funkcí

$$^1X(u) = O + (m + p_1 u)\vec{e}_1 + (n + p_2 u)\vec{e}_2 + (q + p_3 u)\vec{e}_3, u \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Pokud osa rotace $o = z$, pak rotaci báze tvořené vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ popisují (jak bylo odvozeno v odstavci 1.5) vektorové funkce

$$\vec{t}_1(v) = (\cos v, \sin v, 0), \quad \vec{t}_2(v) = (-\sin v, \cos v, 0), \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (18)$$

Rotační plocha, která vznikne rotací přímky p kolem osy $o = z$, je parametrizována bodovou funkcí (17), ve které vektory $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$ nahradíme vektorovými funkcemi $\vec{t}_1(v)$ a $\vec{t}_2(v)$ z (18). Tak dostaneme bodovou funkci

$$\begin{aligned} X(u, v) &= O + (m + p_1 u)(\cos v, \sin v, 0) + (n + p_2 u)(-\sin v, \cos v, 0) + (q + p_3 u)(0, 0, 1) = \\ &= [(m + p_1 u)\cos v - (n + p_2 u)\sin v, (m + p_1 u)\sin v + (n + p_2 u)\cos v, q + p_3 u], u \in \mathbb{R}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Plocha má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= (m + p_1 u)\cos v - (n + p_2 u)\sin v, \\ y &= (m + p_1 u)\sin v + (n + p_2 u)\cos v, \\ z &= q + p_3 u, \end{aligned} \quad u \in \mathbb{R}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (20)$$

a) Rotační kuželová plocha

Rotační kuželová plocha vznikne rotací přímky, která je s osou o rotace **různoběžná**. Pokud $o = z$, pak z (17) odvodíme, že přímka p je s osou z různoběžná, jestliže

$$(m + p_1 u = 0 \quad \wedge \quad n + p_2 u = 0) \Rightarrow \left(u = -\frac{m}{p_1} = -\frac{n}{p_2} \right) \Rightarrow (m p_2 = n p_1).$$

Podmínku různoběžnosti přímky $o = z$ a přímky p je možné odvodit např. pomocí determinantu. Splnění této podmínky znamená, že (20) je parametrické vyjádření rotační kuželové plochy.

Cvičení:

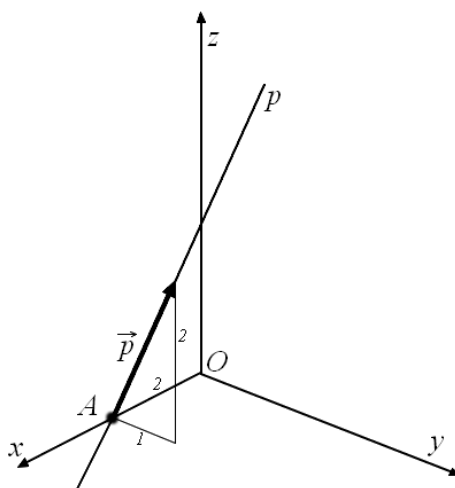
2. Přímka je dána body
 a) $M = [5, 0, 0]$ a $V = [0, 0, 10]$,
 b) $M = [3, 4, 0]$ a $V = [0, 0, 10]$.
 Napište parametrické vyjádření části rotační plochy, která vznikne rotací úsečky MV kolem osy z . Nakreslete obrázek a porovnejte části ploch ze zadání a) a b).
3. Přímka p je dána bodem $M = [4, 0, 0]$, leží v rovině xz a její odchylka od osy x je 45° . Odvoďte parametrizaci rotační plochy, která vznikne rotací přímky p jednak kolem osy z a jednak kolem osy x .

b) Rotační jednodílný hyperboloid

Jestliže přímka je s osou rotace **mimoběžná**, pak její rotací dostaneme rotační jednodílný hyperboloid, který má opět parametrické vyjádření (20).

Příklad:

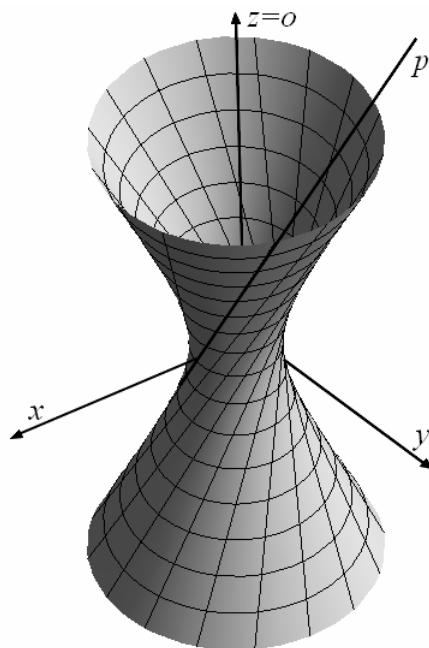
Kolem osy $o = z$ rotuje přímka p , která je dána bodem $A = [2, 0, 0]$ a směrovým vektorem $\vec{p} = (0, 1, 2)$, jak je zakresleno na obr. 3.16. Odvodíme parametrizaci rotační plochy.

**Obr. 3.16****Řešení:**

Přímka je s osou rotace mimoběžná, a proto rotační plocha je jednodílný rotační hyperboloid. Z (20) dostaneme její parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos v - u \sin v, \\ y &= 2 \sin v + u \cos v, \\ z &= 2u, \end{aligned} \quad u \in \mathbb{R}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (21)$$

Pro $u \in \langle -6, 6 \rangle$ jsme plochu zobrazili na obr. 3.17.

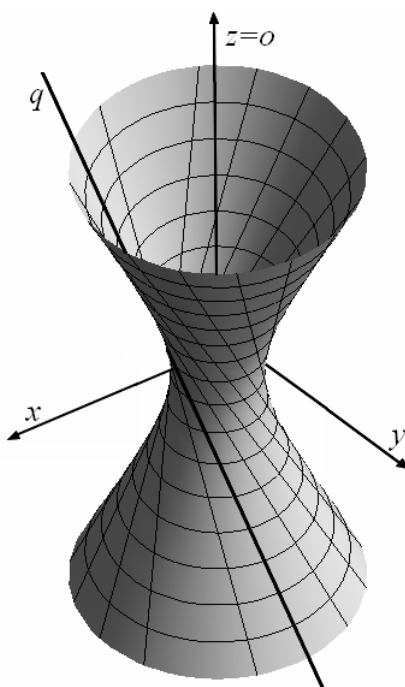


Obr. 3.17

Protože je plocha souměrná podle roviny xy , je jiné její parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos v - u \sin v, \\ y &= 2 \sin v + u \cos v, \\ z &= -2u, \end{aligned} \quad u \in \mathbb{R}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (22)$$

Při této parametrizaci rotuje přímka q , která je s přímkou p souměrná podle roviny xy . Část plochy pro $u \in \langle -6, 6 \rangle$ je zakreslena v obr. 3.18. Porovnejte jej s obr. 3.17.



Obr. 3.18

Máme už tedy tři parametrizace (15), (21) a (22) jednoho jednodílného rotačního hyperboloidu. Ve všech parametrizacích tvoří jednu soustavu parametrických křivek rovnoběžkové kružnice, jiné jsou parametrické křivky druhé soustavy (části hyperbol, přímky).

c) Rotační válcová plocha

Rotační válcovou plochu získáme rotací přímky, která je s osou rotace **rovnoběžná**.

Příklad:

Odvodíme parametrizaci rotační válcové plochy, která vznikne rotací přímky p , která je parametrizována bodovou funkcí

$${}^1X(u) = O + R\vec{e}_1 + u\vec{e}_3, \quad u \in R,$$

kolem osy z .

Řešení:

Rotační válcová plocha je parametrizována bodovou funkcí

$$X(u) = O + R\vec{t}_1(v) + u\vec{e}_3 = O + R(\cos v, \sin v, 0) + u(0, 0, 1) = [R\cos v, R\sin v, u], \quad u \in R, v \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Plocha má parametrické rovnice

$$x = R\cos v$$

$$y = R\sin v$$

$$z = u, \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad u \in R,$$

což jsou tytéž rovnice jako v příkladu, kdy jsme vytvořili rotační válcovou plochu jako translační plochu.

Rotace kolem obecné přímky:

Nyní ukážeme odvození parametrizace libovolné rotační plochy, kdy osa rotace nemusí být osou souřadnic.

Nechť osa rotace je libovolná přímka o , která prochází počátkem O a její směrový vektor je jednotkový vektor $\vec{t}_3$. Dále nechť $\vec{t}_1$ a $\vec{t}_2$ jsou vektory, které tvoří ortonormální bázi zaměřením roviny kolmé k ose rotace. Rotovat necháme rovinnou křivku M , která má parametrické vyjádření

$$x = x(u), y = 0, z = z(u), u \in I.$$

Křivku umístíme do roviny, která je určena osou rotace a přímkou, která prochází počátkem O a její směrový vektor je $\vec{t}_1$. Potom je křivka M parametrizována bodovou funkcí

$${}^1X(u) = O + x(u)\vec{t}_1 + z(u)\vec{t}_3, \quad u \in I. \quad (23)$$

Rotaci vektorů $\vec{t}_1$ a $\vec{t}_2$ kolem osy o popisují vektorové funkce

$$\vec{v}_1(v) = \cos v \vec{t}_1 + \sin v \vec{t}_2, \quad \vec{v}_2(v) = -\sin v \vec{t}_1 + \cos v \vec{t}_2, \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (24)$$

Rotační plocha, která vznikne rotací křivky M kolem osy o , je parametrizována bodovou funkcí (23), ve které vektor $\vec{t}_1$ nahradíme vektorovou funkcí $\vec{v}_1(v)$ z (24). Potom bodová funkce

$$X(u, v) = O + x(u)\vec{v}_1(v) + z(u)\vec{t}_3 = O + x(u)\cos v \vec{t}_1 + x(u)\sin v \vec{t}_2 + z(u)\vec{t}_3, \quad u \in I, v \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad (25)$$

je parametrizací rotační plochy.

Nahradíme-li počátek O bodem S , pak (25) je parametrizací rotační plochy posunuté o průvodní vektor $\vec{OS}$ bodu S .

Příklad:

Odvodíme parametrizaci rotační válcové plochy. Osa rotace je přímka o , která prochází počátkem O a její směrový vektor je vektor $\vec{p} = (1, 2, 1)$. Rotuje přímka p , která je s o rovnoběžná a má od ní vzdálenost 2.

Řešení:

Přímka p má parametrické vyjádření

$$x = u, \quad y = 2u, \quad z = u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Vektor $\vec{t}_3$ je normovaný vektor $\vec{p}$. Proto

$$\vec{t}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Vektor $\vec{t}_3$ doplníme vektory $\vec{t}_1$ a $\vec{t}_2$ na ortonormální bázi prostoru. Za vektory $\vec{t}_1$ a $\vec{t}_2$ vezměme např. vektory

$$\vec{t}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \quad \vec{t}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right).$$

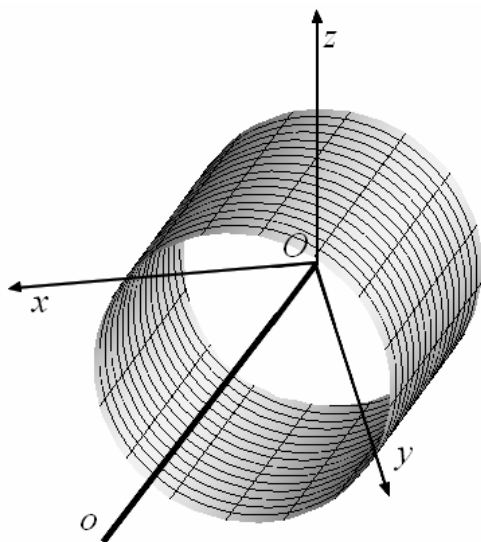
Přímka p , která bude rotovat, je parametrizována bodovou funkcí

$${}^1X(u) = O + 2\vec{t}_1 + u\vec{t}_3, \quad u \in \mathbb{R}.$$

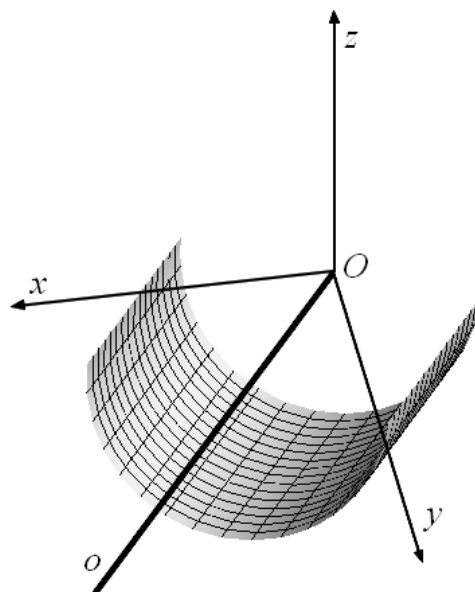
Rotační válcová plocha je podle (25) parametrizována bodovou funkcí

$$\begin{aligned} X(u, v) &= O + 2 \cos v \vec{t}_1 + 2 \sin v \vec{t}_2 + u \vec{t}_3 = \\ &= O + 2 \cos v \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right) + 2 \sin v \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right) + u \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \\ &= \left[\frac{4}{\sqrt{5}} \cos v - \frac{2}{\sqrt{30}} \sin v + \frac{u}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \cos v - \frac{4}{\sqrt{30}} \sin v + \frac{2u}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{30}} \sin v + \frac{u}{\sqrt{6}} \right], \quad u \in \mathbb{R}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Na obr. 3.19 jsme zobrazili část válcové plochy pro $u \in \langle 0, 8 \rangle$. Pro tutéž volbu u , ale pro $v \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ je na obr. 3.20 znázorněna polovina části rotační válcové plochy.

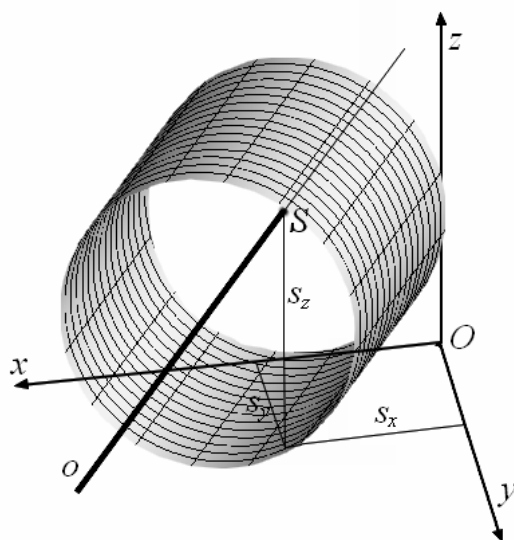


Obr. 3.19



Obr. 3.20

Na obr. 3.21 jsme počátek O nahradili bodem $S = [s_x, s_y, s_z]$.



Obr. 3.21

3.4 Šroubové plochy

Šroubové plochy vznikají šroubovým pohybem křivky. Šroubovým pohybem a šroubovicí jsme se zabývali v odstavci 2.4. Často užívané šroubové plochy, které se nazývají **cyklické**, vznikají šroubovým pohybem kružnice. Další užívané šroubové plochy jsou **přímkové** a, jak vystihuje název, vznikají šroubovým pohybem přímky. Obecně ale může být křivka, jejímž pohybem vytváříme šroubovou plochu, libovolná.

Cyklické šroubové plochy:

Odvodíme parametrizaci tří cyklických šroubových ploch, a to vinutého sloupku, plochy klenby sv. Jiljí a Archimédovy serpentiny.

a) Vinutý sloupek

Vinutý sloupek vzniká šroubovým pohybem kružnice, která leží v rovině kolmé k ose šroubového pohybu, ale její střed na ose šroubového pohybu neleží. Kartézskou soustavu souřadnic zvolíme tak, že osa šroubového pohybu je osa z a kružnice leží v souřadnicové rovině xy . Kružnice, označme ji Q , nechť je dána bodovou funkcí

$$^1X(v) = O + (r \cos v + a, r \sin v, 0), \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (26)$$

Střed kružnice Q je bod $S = [a, 0, 0]$, který se při šroubovém pohybu pohybuje po šroubovici, která má redukovanou výšku závitů v_0 . Označme tuto šroubovici P . Je dána bodovou funkcí

$$^2X(u) = O + (a \cos u, a \sin u, v_0 u), \quad u \in R. \quad (27)$$

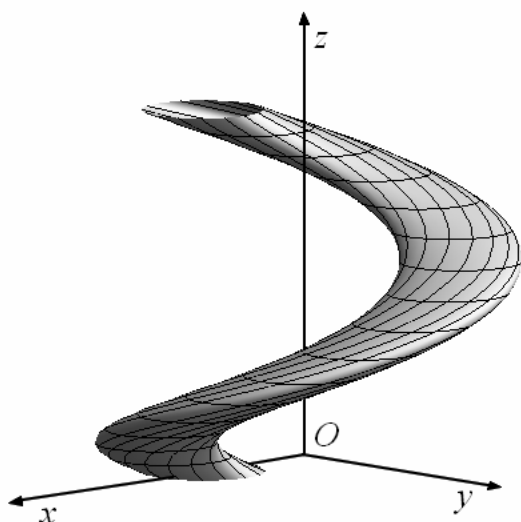
Vinutý sloupek je **translační plocha**, a proto je parametrizována bodovou funkcí

$$\begin{aligned} X(u, v) &= O + (a \cos u, a \sin u, v_0 u) + (r \cos v + a, r \sin v, 0) = \\ &= [a \cos u + r \cos v + a, a \sin u + r \sin v, v_0 u], \quad u \in R, v \in \langle 0, 2\pi \rangle, \end{aligned} \quad (28)$$

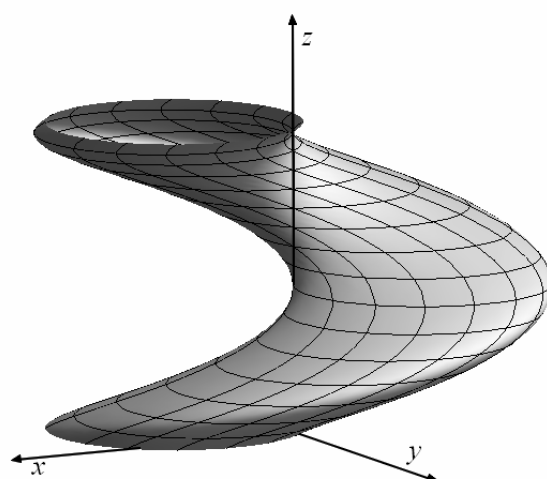
kterou vytvoříme tak, že v bodové funkci (26) resp. (27) nahradíme počátek O bodovou funkcí (27) resp. (26), jak bylo odvozeno v odstavci 3.2.

Obr. 3.22 a 3.23 zachycují část vinutého sloupku pro $a > r$ a pro $a = r$. Pro $a < r$ dochází k situaci, kdy plocha sebe samu protíná.

Parametrické křivky pro $v = \text{konst.}$ jsou **šroubovice** a parametrické křivky pro $u = \text{konst.}$ jsou **kružnice**, jak plyne z (28) a jak vidíme na obr. 3.22 a 3.23.



Obr. 3.22



Obr. 3.23

Cvičení:

1. Kružnice K má střed $S = [2, 0, 0]$ a poloměr $r = 2$. Napište parametrické vyjádření dvou závitů plochy vinutého sloupku, jestliže šroubový pohyb má osu $o = z$, výšku závitu $v = 8$ a je jednak pravotočivý, jednak levotočivý.
2. Zakreslete obě plochy ze cvičení 1. do jednoho obrázku.

b) Plocha klenby sv. Jiljí

Plocha klenby sv. Jiljí vzniká šroubovým pohybem kružnice K , která leží v rovině obsahující osu šroubového pohybu. Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, že osa šroubového pohybu je osa z a kružnice K leží v souřadnicové rovině xz . Jestliže $S = [a, 0, 0]$, $a > 0$, je střed a r poloměr kružnice K , pak K je parametrizována bodovou funkcí

$${}^1X(v) = S + r \cos v \vec{e}_1 + r \sin v \vec{e}_3 = O + (a + r \cos v) \vec{e}_1 + r \sin v \vec{e}_3, \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (29)$$

Šroubový pohyb je složením rotace kolem osy o a translace ve směru osy o . Otáčení kružnice K kolem osy $o = z$ můžeme realizovat tak, že v bodové funkci (4) nahradíme vektor $\vec{e}_1$ vektorovou funkcí

$$\vec{t}_1(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

a posouvání ve směru osy z realizujeme tak, že k bodové funkci (29) přičteme vektorovou funkci $v_0 u \vec{e}_3$. Takže bodová funkce

$$\begin{aligned} X(u, v) &= O + (a + r \cos v)(\cos u, \sin u, 0) + r \sin v(0, 0, 1) + v_0 u(0, 0, 1) = \\ &= [(a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v + v_0 u], \quad u \in \mathbb{R}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle, \end{aligned}$$

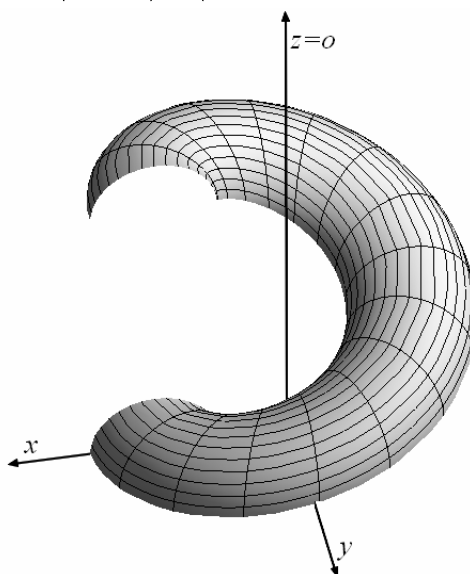
je parametrizací plochy.

Jeden závit plochy klenby sv. Jiljí má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= (a + r \cos v) \cos u, \\ y &= (a + r \cos v) \sin u, \\ z &= r \sin v + v_0 u, \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Na obr. 3.24 jsme zobrazili část plochy klenby vzniklou šroubovým pohybem půlkružnice. Její parametrické vyjádření je

$$\begin{aligned} x &= (4 + 2 \cos v) \cos u, \\ y &= (4 + 2 \cos v) \sin u, \\ z &= 2 \sin v + 1.6u, \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \langle 0, \pi \rangle. \end{aligned}$$



Obr. 3.24

Cvičení:

3. Kružnice K , která leží v souřadnicové rovině xz , má střed $S = [6, 0, 7]$ a poloměr $r = 3$. Pravotočivý šroubový pohyb má osu $o = z$, výšku závitu $v = 12$. Odvoďte parametrizaci $\frac{1}{4}$ závitu části plochy klenby, která vznikne šroubovým pohybem „dolní“ půlkružnice kružnice K .
4. Půlkružnice K je parametrizována bodovou funkcí ${}^1X(v) = [1.5 \cos v, 0, 1.5 \sin v]$, $v \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Napište parametrizaci dvou závitů plochy, která vznikne levotočivým šroubovým pohybem půlkružnice K . Osa šroubového pohybu je z a redukovaná výška závitu $v_0 = 2$.

c) Archimédova serpentina

Plocha nazývaná Archimédova serpentina vzniká šroubovým pohybem kružnice K , která leží v normálových rovinách šroubovice, po které se pohybuje střed kružnice K . Střed kružnice K (o poloměru r) je bod $S = [a, 0, 0]$, který nechť se pohybuje po pravotočivé šroubovici parametrizované bodovou funkcí

$${}^1X(u) = O + (a \cos u, a \sin u, v_0 u), \quad u \in R.$$

Vektorovými funkcemi

$$\vec{n}(u) = (-\cos u, -\sin u, 0) \text{ a } \vec{b}(u) = \left(\frac{v_0 \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{-v_0 \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \right)$$

z Frenetova průvodního repéru šroubovice (viz kapitola 2, odstavec 2.5) jsou určeny normálové roviny šroubovice v bodech ${}^1X(u)$.

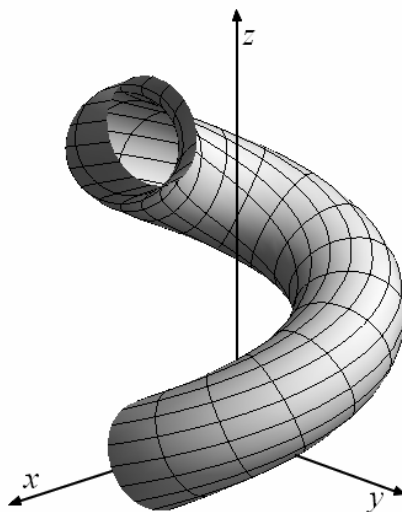
Archimédova serpentina je parametrizována bodovou funkcí

$$\begin{aligned} X(u, v) &= {}^1X(u) + r \cos v \vec{n}(u) + r \sin v \vec{b}(u) = \\ &= O + (a \cos u, a \sin u, v_0 u) + r \cos v (-\cos u, -\sin u, 0) + r \sin v \left(\frac{v_0 \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{-v_0 \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \right), \\ u &\in R, \quad v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Jeden závit Archimédovy serpentiny má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= a \cos u - r \cos v \cos u + \frac{rv_0 \sin v \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \\ y &= a \sin u - r \cos v \sin u - \frac{rv_0 \sin v \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \\ z &= v_0 u + \frac{ar \sin v}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Pro volbu konstant $a = 4, r = 2, v_0 = \frac{6}{\pi}$, je jeden závit Archimédovy serpentiny znázorněn na obr. 3.25.



Obr. 3.25

Cvičení:

5. Napište parametrické vyjádření jednoho závitu Archimédovy serpentiny, která vznikne šroubovým pohybem kružnice K o poloměru $r = 2$. Střed výchozí polohy kružnice K je bod $S = [4, 0, 0]$. Šroubový pohyb je dán osou $o = z$, redukovanou výšku závitu $v_0 = 2$ a je levotočivý.

Přímkové šroubové plochy

Přímkové šroubové plochy vznikají šroubovým pohybem přímky p . Podle vzájemné polohy přímky p a osy o šroubového pohybu dělíme přímkové šroubové plochy na:

- **otevřené**, jestliže p a o jsou mimoběžné,
- **uzavřené**, jestliže p a o jsou různoběžné,
- **přímé (kolmé)**, jestliže p a o jsou kolmé,
- **šikmé** jestliže p a o nejsou kolmé.

Nejčastěji používaná šroubová plocha je plocha přímá a uzavřená, která se nazývá **přímý šroubový konoid**. Podrobnější komentář si zaslouží také **plocha tečen šroubovice**, protože je jedinou rozvinutelnou šroubovou plochou.

K odvození parametrizace přímkové šroubové plochy použijeme vektorových funkcí Frenetova průvodního repéru šroubovice. Mějme danu šroubovici, která je parametrizována bodovou funkcí

$$^1X(u) = O + (a \cos u, a \sin u, v_0 u), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Vektorovými funkcemi

$$\begin{aligned}\vec{t}(u) &= \left(-\frac{a \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{v_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \right), \\ \vec{n}(u) &= (-\cos u, -\sin u, 0), \\ \vec{b}(u) &= \left(\frac{v_0 \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{-v_0 \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \right)\end{aligned}\quad (32)$$

jsou dány vektory Frenetova průvodního repéru v bodech ${}^1X(u)$.

Přímka p necht' je dána bodem S a směrovým vektorem $\vec{p} = m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2 + q\vec{e}_3$. Přímka p je parametrizována bodovou funkcí

$${}^2X(v) = S + v\vec{p} = S + v(m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2 + q\vec{e}_3), \quad v \in R. \quad (33)$$

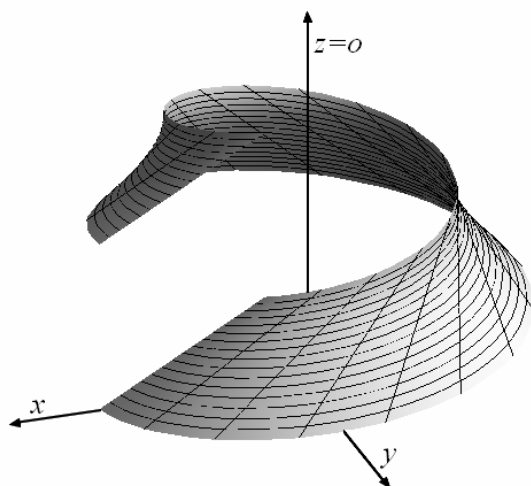
Bodovou funkcí, kterou je parametrizována přímková šroubová plocha, získáme tak, že v bodové funkci (33) nahradíme bod S bodovou funkcí ${}^1X(u)$ z (31) a vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ kanonické báze vektorovými funkcemi $\vec{t}(u), \vec{n}(u)$ a $\vec{b}(u)$ z (32). Takže přímková šroubová plocha je parametrizována bodovou funkcí

$$\begin{aligned}X(u, v) &= O + (a \cos u, a \sin u, v_0 u) + v\{m\vec{t}(u) + n\vec{n}(u) + q\vec{b}(u)\} = O + (a \cos u, a \sin u, v_0 u) + \\ &+ v\left\{m\left(-\frac{a \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{v_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}\right) + n(-\cos u, -\sin u, 0) + q\left(\frac{v_0 \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{-v_0 \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}\right)\right\}, \\ u &\in R, v \in R.\end{aligned}$$

Jeden závit plochy má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned}x &= a \cos u + v\left(-\frac{a m \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} - n \cos u + \frac{q v_0 \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}\right), \\ y &= a \sin u + v\left(\frac{a m \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} - n \sin u - \frac{q v_0 \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}\right), \\ z &= v_0 u + v\left(\frac{m v_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} + \frac{a q}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}\right),\end{aligned}\quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in R. \quad (34)$$

Na obr. 3.26 je zakreslena část jednoho závitu přímkové pravotočivé šroubové plochy s osou $o = z$ a redukovanou výškou závitu $v_0 = \frac{2}{\pi}$. Šroubovaná přímka p je určena bodem $S = [5, 0, 0]$ a má směrový vektor $\vec{p} = (1, 1, 1)$. Ze vzájemné polohy osy šroubového pohybu a přímky p plyne, že se jedná o **šikmou otevřenou přímkovou šroubovou plochu**.



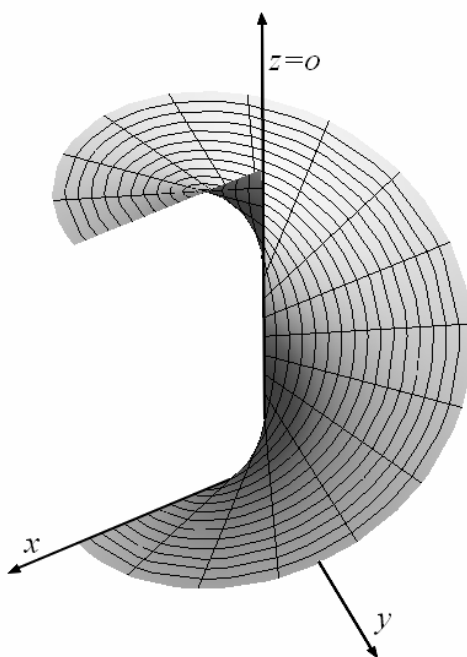
Obr. 3.26

a) **Přímá uzavřená přímková šroubová plocha – přímý šroubový konoid**

Přímou uzavřenou přímkovou šroubovou plochu tvoří hlavní normály dané šroubovice. Směrové vektory hlavních normál jsou dány vektorovou funkcí $\vec{n} = \vec{n}(u)$ ze vztahů (32). Proto parametrické vyjádření plochy dostaneme z (34), kde $m = q = 0$ a $n \neq 0$. Číslo n můžeme volit, a proto zvolme $n = 1$. Jeden závit plochy má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= a \cos u - v \cos u, \\ y &= a \sin u - v \sin u, \\ z &= v_0 u, \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Na obr. 3.27 je zakreslena část plochy mezi šroubovicí bodu $S = [5, 0, 0]$ a osou šroubového pohybu $o = z$. Redukovaná výška závitu $v_0 = \frac{6}{\pi}$, šroubový pohyb je pravotočivý.



Obr. 3.27

Částí přímých šroubových konoidů se užívá jako geometrický model přechodových komunikací a je základem šroubových schodišť.

Cvičení:

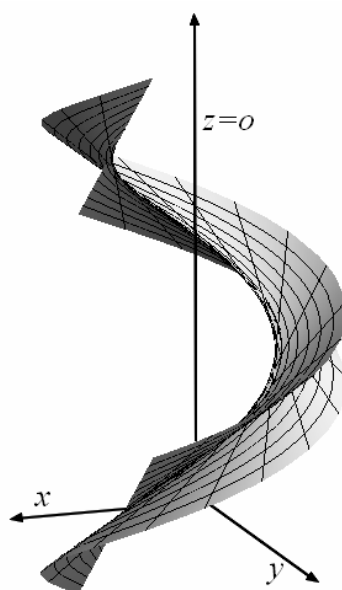
- Parametrizujte polovinu závitu přímého šroubového konoidu, který vzniká pravotočivým šroubovým pohybem úsečky AB , $A=[4,0,0]$, $B=[2,0,0]$. Šroubový pohyb je dán osou $o=z$ a výškou závitu $v=8$.
- Parametrizujte $\frac{3}{4}$ závitu části přímého šroubového konoidu, který vzniká levotočivým šroubovým pohybem úsečky AB , $A=[0,1,0]$, $B=[0,3,0]$. Šroubový pohyb je dán osou $o=z$ a redukovanou výškou závitu $v_0=1.6$. Popsanou část konoidu uvažujte jako základ šroubového schodiště, které je zastřešeno částí plochy klenby sv. Jiljí. Výška tvořících půlkružnic plochy klenby nad schodištěm je 4. Parametrizujte uvedenou část plochy klenby.

b) Plocha tečen šroubovice

Jediný typ přímkových šroubových ploch, které jsou rozvinutelné, jsou plochy tečen šroubovice. Vzhledem k poloze tečen šroubovice a osy šroubového pohybu se jedná o šikmou otevřenou šroubovou plochu. Parametrické vyjádření jednoho závitu plochy tečen šroubovice určíme z (34), kde $n=q=0$ a $m \neq 0$. Zvolme $m=1$. Potom parametrické vyjádření jednoho závitu plochy je

$$\begin{aligned} x &= a \cos u - v \frac{a \sin u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \\ y &= a \sin u + v \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \\ z &= v_0 u + v \frac{v_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}, \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (35)$$

Plocha tečen šroubovice bodu $S=[5,0,0]$ je zakreslena na obr. 3.28 (1 závit, pravotočivý šroubový pohyb s osou $o=z$ s redukovanou výškou závitu $v_0 = \frac{6}{\pi}$). Zobrazená část je tvořena pohybem úsečky, která má střed na šroubovici bodu S . Dráha tohoto bodu vytváří na ploše tzv. **hranu vratu**.



Obr. 3.28

Užitím skalárního součinu ukažte, že pro každé $u \in \mathbb{R}$ je úhel směrového vektoru tečny šroubovice a směrového vektoru osy $o = z$ šroubovice konstantní. To znamená, že je konstantní odchylka tečen šroubovice od roviny xy . Proto je šroubovice tzv. **spádová křivka** a plocha tečen šroubovice je **plochou konstantního spádu** vzhledem k rovině xy .

Cvičení:

8. Polovina závitu šroubovice je dána bodovou funkcí $X(u) = O + (3\cos u, 3\sin u, u)$, $u \in \langle 0, \pi \rangle$.
- Parametrizujte plochu tečen dané části šroubovice.
 - Parametrizujte křivku L tvořenou průsečíky tečen dané části šroubovice s rovinou xy .
 - Parametrizujte pouze část plochy tečen mezi šroubovicí a křivkou L .
 - Určete odchylku tečen šroubovice od roviny xy .