LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2.ŘÁDU

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. Obecné řešení lin. dif. rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty

1.1. Variace konstant.

Příklad 1.1. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \tag{1}$$

Obecné řešení lineární diferenciální rovnice (1) má tvar

$$\varphi(x) = \varphi_h(x) + \varphi_p(x),$$

kde $\varphi_h(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ je obecné řešení příslušné lineární diferenciální rovnice bez pravé strany

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{2}$$

a $\varphi_p(x)$ je nějaké pevné (partikulární) řešení rovnice (1).

Funkce $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ tvoří fundamentální systém rovnice (2), tj. jsou bází vektorového prostoru všech řešení rovnice (2)

Řešení rovnice (2) hledáme ve tvaru $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde λ je řešením charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Je tedy $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Partikulární řešení rovnice (1) budeme hledat metodou variace konstant, tj. ve tvaru $\varphi_p(x) = g_1(x)\varphi_1(x) + g_2(x)\varphi_2(x)$. Derivace hledaných funkcí g_1' a g_2' dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} g_1'(x)\varphi_1(x) + g_2'(x)\varphi_2(x) &= 0,\\ g_1'(x)\varphi_1'(x) + g_2'(x)\varphi_2'(x) &= f(x), \end{aligned}$$

kde $f(x)$ je pravá strana řešené lineární diferenciální rovnice.

V našem případě

$$\varphi_p(x) = g_1(x)\,\mathrm{e}^{-x} + g_2(x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

a

$$\begin{aligned} g_1'(x)\,\mathrm{e}^{-x} + g_2'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} &= 0,\\ g_1'(x)(-\mathrm{e}^{-x}) + g_2'(x)(-2\,\mathrm{e}^{-2x}) &= \tfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$g_1'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)}, \qquad g_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)}$$

a odtud

$$g_1(x) = \int \frac{e^x}{(1+e^x)} dx = \int \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t) = \ln(1+e^x)$$

a

$$g_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{(1+e^x)} dx = -\int \frac{t}{1+t} dt = -t + \ln(1+t) = -e^x + \ln(1+e^x).$$

Potom

$$\varphi_p(x) = e^{-x} \ln(1+e^x) + e^{-2x}(-e^x + \ln(1+e^x))$$

a

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^{-x} \ln(1+e^x) + e^{-2x}(-e^x + \ln(1+e^x))}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.2. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \tag{3}$$

Nejdříve najdeme obecné řešení rovnice bez pravé strany

$$y'' - 2y' + y = 0 \tag{4}$$

Řešením její charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

dostaneme $\lambda = 1$, což je její dvojnásobný kořen. Fundamentální systém tedy tvoří funkce $\varphi_1(x) = e^x$ a $\varphi_2(x) = x e^x$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x .$$

Jedno pevné partikulární řešení rovnice (3) najdeme opět metodou variace konstant, tj. ve tvaru

$$\varphi_p(x) = g_1(x) e^x + g_2(x) x e^x,$$

kde derivace neznámých funkcí získáme řešením soustavy

$$\begin{aligned} g_1'(x) e^x + g_2'(x) x e^x \qquad &= \ 0, \\ g_1'(x) e^x + g_2'(x)(e^x + x e^x) &= \tfrac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$g_1'(x) = -1, \qquad g_2'(x) = \frac{1}{x}$$

a odtud

$$g_1(x) = -x, \qquad g_2(x) = \ln|x|.$$

Je tedy

$$\varphi_p(x) = -x e^x + x \ln|x| e^x,$$

a
$$\underline{\underline{\varphi(x) = \mathrm{e}^x(c_1 + c_2x - x + x\ln|x|)}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.3. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*
$$y'' + y = \operatorname{tg} x \tag{5}$$

Nejdříve najdeme obecné řešení rovnice bez pravé strany
$$y'' + y = 0 \tag{6}$$
Charakteristická rovnice
$$\lambda^2 + 1 = 0$$
má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{12} = \pm\mathrm{i}$. Jim odpovídající fundamentální systém
$$\mathrm{e}^{(0\pm 1\cdot\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{0\cdot x}\left(\cos(1\cdot x) \pm \mathrm{i}\,\sin(1\cdot x)\right)$$
nahradíme reálným fundamentálním systémem
$$\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{0\cdot x}\cos(1\cdot x) = \cos x, \qquad \varphi_2(x) = \mathrm{e}^{0\cdot x}\sin(1\cdot x) = \sin x.$$
Potom
$$\varphi_h(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$$
je obecné řešení rovnice (6).

Partikulární řešení rovnice (5) budeme hledat ve tvaru
$$\varphi_p(x) = g_1(x)\cos x + g_2(x)\sin x,$$
kde derivace neznámých funkcí získáme řešením soustavy
$$\begin{aligned} g_1'(x)\cos x + g_2'(x)\sin x &= \phantom{\operatorname{tg}} 0, \\ -g_1'(x)\sin x + g_2'(x)\cos x &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$
Řešením této soustavy dostaneme
$$g_1'(x) = -\sin x\operatorname{tg} x, \quad g_2'(x) = \sin x$$
a odtud
$$g_1(x) = \int\frac{-\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x = \int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin^2 x - 1}\mathrm{d}x = \int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|,$$
$g_2(x) = -\cos x.$

Potom
$$\varphi_p(x) = \frac{1}{2}\cos x\cdot\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|,$$
a
$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}\cos x\cdot\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.4. *Najděme homogenní lineární diferenciální rovnici 2.řádu s konstantními koeficienty, jejíž fundamentální systém tvoří funkce* $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^x$ *a* $\varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

Hledaná rovnice bude mít tvar

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{7}$$

kde a_0 a a_1 jsou neznámé konstanty. Protože $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $\varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ jsou podle předpokladu řešením rovnice (7), musí platit

$$\begin{aligned} \varphi_1''(x) + \varphi_1'(x)a_1 + \varphi_1(x)a_0 &= 0,\\ \varphi_2''(x) + \varphi_2'(x)a_1 + \varphi_2(x)a_0 &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\, a_1 + \mathrm{e}^x\, a_0 &= 0,\\ 4\,\mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}\, a_1 + \mathrm{e}^{-2x}\, a_0 &= 0 \end{aligned}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 &= -1,\\ -2a_1 + a_0 &= -4. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme $a_0 = 1$, $a_1 = -2$. Hledaná rovnice má tedy tvar

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Mohli jsme také postupovat rychleji. Tvoří-li funkce $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{1\cdot x}$ a $\varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-2\cdot x}$ fundamentální systém hledané rovnice, má charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{8}$$

dva reálné kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -2$ a rovnici (8) můžeme napsat ve tvaru (polynom na levé straně napíšeme jako součin kořenových činitelů) ve tvaru

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

tj.

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Odtud pak

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

1.2. **Speciální pravá strana.**

Příklad 1.5. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1 \tag{9}$$

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ dostaneme $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{-3x} + c_2 \mathrm{e}^{2x}.$$

O speciální pravé straně diferenciální rovnice

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{10}$$

budeme mluvit v případě, že funkce f má tvar

$$f(x) = \mathrm{e}^{ax} \left(p_1(x)\cos(bx) + p_2(x)\sin(bx)\right), \tag{11}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a p_1, p_2 jsou polynomy stupně s a r.
Hledané partikulární řešení φ_p rovnice (10) má potom tvar

$$\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{ax} x^k \left(q_1(x)\cos(bx) + q_2(x)\sin(bx)\right), \tag{12}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy jejichž stupeň je maximálně rovem většímu z čísel s a r a k je násobnost kořene $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$ charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{13}$$

V případě, že komplexní číslo $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$ není kořenem charakteristické rovnice (13), je $k = 0$.

Pravá strana rovnice (9) má speciální tvar neboť

$$12x^2 + 2x + 1 = \mathrm{e}^{0x} \big((12x^2 + 2x + 1)\cos(0x) + 0\sin(0x)\big),$$

a komplexní číslo $\lambda = a + \mathrm{i}\, b = 0 + \mathrm{i}\, 0 = 0$ není kořenem charakteristické rovnice. Je tedy $k = 0$. Podle (12) je tedy

$$\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{0x} x^0 \big((Ax^2 + Bx + C)\cos(0x) + q_2(x)\sin(0x)\big) = Ax^2 + Bx + C.$$

(Polynom q_2 nás nebude zajímat, neboť jej budeme násobit číslem 0.) Podle předpokladu je φ_p řešení rovnive (9). Dosazením φ_p do rovnice (9) dostaneme podmínky pro neznámé konstanty A, B, C.

$$\varphi_p'(x) = 2Ax + B, \quad \varphi_p''(x) = 2A$$

a

$$2A + 2Ax + B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 12x^2 + 2x + 1.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme

$$\begin{aligned} -6A \qquad\qquad &= 12, \\ 2A - 6B \qquad &= 2, \\ 2A + B - 6C &= 1. \end{aligned}$$

Potom $A = -2$, $B = -1$, $C = -1$. Je tedy $\varphi_p(x) = -2x^2 - x - 1$ a odtud

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 \mathrm{e}^{-3x} + c_2 \mathrm{e}^{2x} - 2x^2 - x - 1}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.6. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - 3y' = 3x - 1 \tag{14}$$

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ dostaneme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Pravá strana rovnice (14) má podobně jako v (9)speciální tvar neboť

$$3x - 1 = \mathrm{e}^{0x}\left((3x-1)\cos(0x) + 0\sin(0x)\right),$$

Tentokrát však komplexní číslo $\lambda = a + \mathrm{i}\,b = 0 + \mathrm{i}\,0 = 0$ je kořenem charakteristické rovnice a to jednonásobným. Je tedy $k = 1$. Podle (12) je tedy

$$\varphi_p(x) = x^1(Ax + B).$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (14) a porovnámím koeficientů u stejných mocnin x dostaneme $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Je tedy $\varphi_p(x) = -\frac{1}{2}x^2$ a

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2}x^2,}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.7. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + 2y' + 5y = 8x\,\mathrm{e}^{x} \tag{15}$$

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ dostaneme $\lambda_1 = -1 + 2\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -1 - 2\mathrm{i}$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + c_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin 2x.$$

Rovnice (15) má opět speciální pravou stranu, neboť

$$8x\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{1x}\left(8x\cos(0x) + 0\sin(0x)\right),$$

přičemž $\lambda = a + \mathrm{i}\,b = 1 + \mathrm{i}\,0 = 1$ není kořenem charakteristické rovnice. Potom

$$\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{1x}\,x^0\left((Ax+B)\cos(0x) + q_2(x)\sin(0x)\right) = (Ax+B)\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (15) (a po úpravě), dostaneme porovnáním koeficientů u stejných mocnin x $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$. Je tedy $\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ a

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + c_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin 2x + \mathrm{e}^{x}\left(x - \frac{1}{2}\right),}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.8. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + y = x + \sin x \tag{16}$$

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ dostaneme $\lambda_{12} = \pm\mathrm{i}$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Rovnice (16) tentokrát nemá speciální pravou stranu. Pravá strana této rovnice je však dána jako součet dvou funkcí, znichž každá má tvar speciální pravé strany. Dále víme, že je-li φ_{p1} partikulární řešení rovnice

$$y'' + y = x \tag{17}$$

a φ_{p2} partikulární řešení rovnice

$$y'' + y = \sin x \tag{18}$$

je $\varphi_p = \varphi_{p1} + \varphi_{p2}$ partikulární řešení rovnice (16).

Analogickým postupem jako u rovnice (9) dostaneme $\varphi_{p1}(x) = x$. Pro rovnici (18) pak platí

$$\sin x = \mathrm{e}^{0x}\left(0\cos(1x) + 1\sin(1x)\right),$$

přičemž $\lambda = a + \mathrm{i}\,b = 0 + \mathrm{i}\,1 = \mathrm{i}$ je kořenem charakteristické rovnice a to jednonásobným. Potom

$$\varphi_{p2}(x) = \mathrm{e}^{0x}\,x^1\left(A\cos(1x) + B\sin(1x)\right) = x(A\cos x + B\sin x).$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (18) (a po úpravě), dostaneme porovnáním koeficientů u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Je tedy $\varphi_{p2}(x) = -\frac{1}{2}x\cos x$ a $\varphi_p(x) = x - \frac{1}{2}x\cos x$ Odtud

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x - \frac{1}{2}x\cos x,}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

1.3. **Řešení počáteční úlohy.**

Příklad 1.9. *Najděme řešení počáteční úlohy*

$$y'' + 9y = 8\cos x, \qquad (19)$$
$$y(\pi/3) = 0,\ y'(\pi/3) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nejdříve nalezneme obecné řešení rovnice (19).

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + 9 = 0$ dostaneme $\lambda_{12} = \pm 3\mathrm{i}$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Rovnice (19) má speciální pravou stranu neboť

$$8\cos x = \mathrm{e}^{0x} \left(8\cos(1x) + 0\sin(1x)\right),$$

přičemž $\lambda = a + \mathrm{i}\, b = 0 + \mathrm{i}\, 1 = \mathrm{i}$ není kořenem charakteristické rovnice. Potom

$$\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{0x} x^0 \left(A\cos(1x) + B\sin(1x)\right) = A\cos x + B\sin x.$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (19) (a po úpravě), dostaneme porovnáním koeficientů u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ $A = 1$, $B = 0$. Je tedy $\varphi_p(x) = \cos x$. Odtud dostaneme obecné řešení rovnice (19)

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \cos x \qquad (20)$$

a jeho derivací

$$y' = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x - \sin x. \qquad (21)$$

Dosazením počátečních podmínek z (19) do (20) a (21) dostaneme

$$0 = -c_1 + \tfrac{1}{2},$$
$$-\tfrac{\sqrt{3}}{2} = -3c_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odtud $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$. Dosazením do (20) dostáváme hledané řešení počáteční úlohy (19)

$$\underline{\underline{\varphi(x) = \frac{1}{2}\cos 3x + \cos x.}}$$

Příklad 1.10. *Najděme řešení počáteční úlohy*

$$y'' + 2y' - 3y = 16x\,\mathrm{e}^x, \qquad (22)$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Opět nejdříve nalezneme obecné řešení rovnice (22). Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ dostaneme $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 \, \mathrm{e}^x + c_2 \, \mathrm{e}^{-3x} .$$

Rovnice (22) má speciální pravou stranu neboť

$$16x \, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{1x} \left(16x \cos(0x) + 0 \sin(0x)\right),$$

přičemž $\lambda = a + \mathrm{i}\, b = 1 + \mathrm{i}\, 0 = 1$ je jednonásobným kořenem charakteristické rovnice. Potom

$$\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{1x} \, x^1 \left((Ax + B) \cos(0x) + q_2(x) \sin(0x)\right) = \mathrm{e}^x (Ax^2 + Bx).$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (22) (a po úpravě), dostaneme porovnáním koeficientů polynomů na levé a pravé straně rovnosti $A = 2$, $B = -1$. Je tedy $\varphi_p(x) = \mathrm{e}^x(2x^2 - x)$. Odtud dostaneme obecné řešení rovnice (22)

$$y = c_1 \, \mathrm{e}^x + c_2 \, \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^x(2x^2 - x) \tag{23}$$

a jeho derivací

$$y' = c_1 \, \mathrm{e}^x - 3c_2 \, \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^x(2x^2 - x) + \mathrm{e}^x(4x - 1). \tag{24}$$

Dosazením počátečních podmínek z (22) do (23) a (24) dostaneme

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ c_1 - 3c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Odtud $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Dosazením do (23) dostáváme hledané řešení počáteční úlohy (22)

$$\underline{\underline{\varphi(x) = \mathrm{e}^x(2x^2 - x + 1).}}$$

2. Okrajové úlohy

2.1. Řešení okrajové úlohy.

Příklad 2.1. *Najděme řešení okrajové úlohy*

$$u'' + 4u = 3\cos x + 6\sin x, \qquad (25)$$
$$u(0) = 0,\ \ u(\pi/4) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stejným postupem jako v příkladě 1.9 najdeme obecné řešení rovnice (25). Postupně dostaneme

$$u_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

a dále

$$u_p = \cos x + 2\sin x.$$

Obecné řešení rovnice (25) má tedy tvar

$$u = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \cos x + 2\sin x. \qquad (26)$$

Postupným dosazením okrajových podmínek z (25) do (26) dostaneme

$$0 = c_1 + 1,$$
$$\tfrac{\sqrt{2}}{2} = c_2 + \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}.$$

Odtud $c_1 = -1$, $c_2 = -\sqrt{2}$. Dosazením do (26) dostáváme právě jedno hledané řešení okrajové úlohy (25)

$$\underline{\underline{u = -\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x + \cos x + 2\sin x.}}$$

Příklad 2.2. *Najděme řešení okrajové úlohy*

$$u'' + 4u = 3\sin x, \qquad (27)$$
$$u(0) = 0,\ \ u(\pi) = 0.$$

Opět nejdříve najdeme obecné řešení rovnice (27). Postupně dostaneme

$$u_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

a dále

$$u_p = \sin x.$$

Obecné řešení rovnice (27) má tedy tvar

$$u = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \sin x. \qquad (28)$$

Postupným dosazením okrajových podmínek z (27) do (28) dostaneme

$$0 = c_1,$$
$$0 = 0 \cdot c_2.$$

Druhá z rovnic je splněna pro libovolné c_2. Položme $c_2 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Potom okrajová úloha (27) má nekonečně mnoho řešení

$$\underline{\underline{u = c\sin 2x + \sin x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.3. *Najděme řešení okrajové úlohy*

$$u'' + u = 4\sin x, \qquad (29)$$
$$u(0) = 0,\ u(\pi) = 0.$$

Podobným postupem jako v příkladě 1.8 najdeme obecné řešení rovnice (29)

$$u = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x. \qquad (30)$$

Postupným dosazením okrajových podmínek z (29) do (30) dostaneme

$$0 = c_1,$$
$$0 = 2\pi.$$

Druhá rovnost však není nikdy splněna, tj. úloha (29) nemá řešení.

Příklad 2.4. *Najděme řešení okrajové úlohy*

$$u'' + 4u = 10\sin 3x, \qquad (31)$$
$$u(0) = 1,\ u(\pi/2) = a$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Podobným postupem jako v příkladě 1.9 najdeme obecné řešení rovnice (31)

$$u = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - 2\sin 3x. \qquad (32)$$

Dosazením okrajových podmínek z (31) do (32) dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= \quad c_1, \\ a &= -c_1 + 2. \end{aligned}$$

Druhá rovnost však bude splněna pouze v případě, že $a = 1$. Pak bude mít úloha (31) nekonečně mnoho řešení

$$u = \cos 2x + c_2\sin 2x - 2\sin 3x,\ c_2 \in \mathbb{R}. \qquad (33)$$

Pokud bude $a \neq 1$ úloha (31) nebude mít řešení.

Příklad 2.5. *Najděme řešení okrajové úlohy*

$$u'' + \pi^2 u = 3\pi^2\cos 2\pi x, \qquad (34)$$
$$u'(0) = 2\pi,\ u(1/2) = a$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Podobně jako v předchozím příkladě najdeme obecné řešení rovnice (34)

$$u = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x - \cos 2\pi x. \tag{35}$$

Před dosazením okrajových podmínek nejříve najdeme u'

$$u' = -\pi c_1 \sin \pi x + \pi c_2 \cos \pi x + 2\pi \sin 2\pi x. \tag{36}$$

Dosazením okrajových podmínek z (34) do (36) a (35) dostaneme

$$\begin{aligned} 2 &= \quad c_2, \\ a &= \ c_2 + 1. \end{aligned}$$

Druhá rovnost však bude splněna pouze v případě, že $a = 3$. Pak bude mít úloha (34) nekonečně mnoho řešení

$$u = c_1 \cos \pi x + 2 \sin \pi x - \cos 2\pi x,\ c_1 \in \mathbb{R}. \tag{37}$$

Pokud bude $a \neq 3$ úloha (34) nebude mít řešení.

2.2. **Vlastní čísla.**

Příklad 2.6. *Najděme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy*

$$\begin{gathered} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = 0,\ u(l) = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Hledáme takové $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, pro které má úloha (38) netriviální řešení. (Pro $\lambda \leq 0$ má úloha pouze triviální řešení.)

Obecné řešení rovnice (38) má tvar

$$u = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x. \tag{39}$$

Dosazením okrajových podmínek (38) do (39) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= c_1, \\ 0 &= c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, l. \end{aligned}$$

Protože hledáme netriviální řešení, musí být $c_2 \neq 0$. Druhá rovnost tak bude splněna pouze v případě, že

$$\sin \sqrt{\lambda}\, l = 0 \implies \sqrt{\lambda}\, l = k\pi \implies \lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2}.$$

Čísla

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{40}$$

jsou hledaná vlastní čísla okrajové úlohy (38). Pro každé λ_k má úloha (38) nekonečně mnoho řešení

$$u_k = c \sin \frac{k\pi}{l}\, x, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{41}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je funkce (a každý její násobek)

$$u_k = \sin \frac{k\pi}{l}\, x. \tag{42}$$

hledanou vlastní funkcí příslušnou k vlastnímu číslu (40).

Příklad 2.7. *Najděme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy*

$$\begin{gathered} u'' + \lambda u = 0, \\ u'(0) = 0,\ u(l) = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Budeme postupovat stejně jako v příkladu 2.6. Najdeme obecné řešení rovnice (43)

$$u = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x. \tag{44}$$

a jeho derivaci

$$u' = -c_1\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, x + c_2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\, x. \tag{45}$$

Dosazením druhé okrajové podmínky do (44) a první okrajové podmínky do (45) dostaneme

$$\begin{gathered} 0 = c_2, \\ 0 = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\, l. \end{gathered}$$

Netriviální řešení úlohy (43) pak dostaneme pouze za podmínky

$$\cos \sqrt{\lambda}\, l = 0 \implies \sqrt{\lambda}\, l = (2k-1)\frac{\pi}{2} \implies \lambda = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4l^2}.$$

Vlastní čísla a příslušné vlastní funkce (a každý jejich násobek) úlohy (43) jsou

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4l^2}, \quad u_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2l}\, x, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Příklad 2.8. *Najděme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy*

$$\begin{gathered} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0. \end{gathered} \tag{47}$$

K nalezení vlastních čísel a vlastních funkcí úlohy (47) využijeme výsledku úlohy (38). Dosazením za $l = \pi$ do (40) a (42) dostaneme

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{\pi^2} = k^2, \quad u_k = \sin kx \quad k \in \mathbb{N}. \tag{48}$$

2.3. Řešitelnost okrajové úlohy.

Příklad 2.9. *Rozhodněme o řešitelnosti okrajové úlohy*

$$u'' + u = x + \sin x, \qquad u(0) = 0,\ u(\pi/2) = 0. \tag{49}$$

Připomeňme, že okrajová úloha

$$u'' + \lambda u = f(x), \qquad u(0) = 0,\ u(l) = 0. \tag{50}$$

je jednoznačně řešitelná právě tehdy, když λ není vlastní číslo příslušného homogenního problému. V případě, že λ je vlastní číslo příslušného homogenního problému, budeme mít úloha řešení pouze tehdy, když pro skalární součin vlastní funkce u příslušné vlastnímu číslu λ a funkce f (pravou stranu rovnice (50)) platí

$$(u, f) = 0, \text{ tj. } \int_0^l u(x)f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{51}$$

V tomto případě má úloha (50)) nekonečně mnoho řešení.
V případě, že $(u, f) \neq 0$, nemá úloha (50)) řešení.

Vlastní čísla příslušného homogenního problému k úloze (50)) jsou (příklad 2.6)

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(\pi/2)^2} = 4k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{52}$$

Číslo $\lambda = 1$ tedy není vlastní číslo příslušného homogenního problému a úloha (49) má právě jedno řešení.

Příklad 2.10. *Rozhodněme o řešitelnosti okrajové úlohy*

$$u'' + 4u = \cos 2x, \qquad u(0) = 0,\ u(\pi) = 0. \tag{53}$$

Vlastní čísla příslušného homogenního problému k úloze (53) jsou (viz. příklad 2.6)

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{\pi^2} = k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{54}$$

Číslo $\lambda = 4$ je v tomto případě vlastní číslo a to pro $k = 2$. Úloha tedy bude řešitelná pouze v tom případě, když skalární součin funkce $u_2(x) = \sin 2x$ (vlastní funkce příslušná vlastnímu číslu $\lambda_2 = 4$) a funkce $f(x) = \cos 2x$ (pravá strana rovnice (53) bude roven nule (funkce budou ortogonální). Je

$$(u_2, f) = \int_0^\pi \sin 2x \cos 2x \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^2 2x}{4}\right]_0^\pi = 0.$$

Protože je $(u_2, f) = 0$, má úloha (53) nekonečně mnoho řešení.

Příklad 2.11. *Rozhodněme o řešitelnosti okrajové úlohy*

$$u'' + 16u = \cos 8x, \tag{55}$$
$$u(0) = 0,\ u(\pi/4) = 0.$$

Vlastní čísla příslušného homogenního problému k úloze (55) jsou (viz. příklad 2.6)

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(\pi/4)^2} = 16k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{56}$$

Číslo $\lambda = 16$ je vlastní číslo a to pro $k = 1$. Úloha (55) tedy bude mít řešení pouze v tom případě, když skalární součin funkce $u_1(x) = \sin 4x$ (vlastní funkce příslušná vlastnímu číslu $\lambda_1 = 16$) a funkce $f(x) = \cos 8x$ (pravá strana rovnice (55)) bude roven nule (funkce budou ortogonální). Je

$$(u_1, f) = \int_0^{\pi/4} \sin 4x \cos 8x \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin t \cos 2t \mathrm{d}t =$$
$$= \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin t (2\cos^2 t - 1) \mathrm{d}t = -\tfrac{1}{4} \left[\tfrac{2\cos^3 t}{3} - \cos t \right]_0^{\pi} = -\tfrac{1}{6}.$$

Protože je $(u_1, f) \neq 0$, úloha (55) nemá řešení.

Příklad 2.12. *Rozhodněme o řešitelnosti okrajové úlohy*

$$u'' + \lambda u = \sin 3x, \tag{57}$$
$$u(0) = 0,\ u(\pi) = 0$$

v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vlastní čísla příslušného homogenního problému k úloze (57) jsou (příklad 2.6)

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{\pi^2} = k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{58}$$

1. Jestliže λ nebude vlastní číslo, tj. $\lambda \neq k^2,\ k \in \mathbb{N}$, potom úloha (57) bude jednoznačně řešitelná.
2. Jestliže $\lambda = \lambda_k$ kde $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$ pak úloha bude mít nekonečně mnoho řešení a nebo řešení mít nebude. K vlastnímu číslu $\lambda_k = k^2$ existuje vlastní funkce $u_k = \sin kx$ a $f(x) = \sin 3x$ je pravá strana rovnice (57), přičemž platí $f = u_3$, tedy funkce f je současně vlastní funkce příslušného homogenního problému k úloze (57)) pro $\lambda_3 = 9$. Úloha (57) bude tedy v tomto případě řešitelná, když:

$$(u_k, f) = (u_k, u_3) = 0.$$

Tato podmínka bude splněna vždy, když $k \neq 3$. Vlastní funkce totiž tvoří ortogonální systém a platí

$$(u_k, u_l) = 0 \text{ pro } k \neq l, \quad \text{resp.} \quad (u_k, u_l) \neq 0 \text{ pro } k = l,\ k, l \in \mathbb{N}. \tag{59}$$

Odtud pak:
a) Jestliže $\lambda = \lambda_k$ kde $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 3$ má úloha (57) nekonečně mnoho řešení.
b) Jestliže $\lambda = 9$ (tj. $k = 3$), nemá úloha (57) řešení.

Příklad 2.13. *Rozhodněme o řešitelnosti okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u &= \sin 4x + 2\sin 8x, \\ u(0) = 0,\ & u(\pi/2) = 0 \end{aligned} \tag{60}$$

v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

Budeme postupovat stejně jako v příkladu 2.12. Nejdříve najdeme vlastní čísla a vlastní funkce příslušného homogenního problému k úloze (60).

$$\lambda_k = 4k^2, \quad u_k = \sin 2kx. \tag{61}$$

Dále je $f(x) = \sin 4x + 2\sin 8x$, tj. $f = u_2 + 2u_4$. Potom:
1) Jestliže $\lambda \neq \lambda_k$, kde $\lambda_k = 4k^2$, $k \in \mathbb{N}$, má úloha (60) právě jedno řešení.
2) Jestliže $\lambda = \lambda_k$, kde $\lambda_k = 4k^2$, $k \in \mathbb{N}$, potom

$$(u_k, f) = (u_k, u_2 + 2u_4) = (u_k, u_2) + 2(u_k, u_4).$$

Podle (59)
a) Pro $k \neq 2 \wedge k \neq 4$ je $(u_k, u_2) + 2(u_k, u_4) = 0$ a úloha (60) má nekonečně mnoho řešení.
b) Pro $k = 2$ je $(u_2, u_2) + 2(u_2, u_4) = (u_2, u_2) \neq 0$ a úloha (60) nemá řešení.
c) Pro $k = 4$ je $(u_4, u_2) + 2(u_4, u_4) = 2(u_4, u_4) \neq 0$ a úloha (60) nemá řešení.

Příklad 2.14. *Rozhodněme o řešitelnosti okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} u'' + 64u &= 2\sin 12x + \cos 8x, \\ u(0) = 0,\ & u(\pi/4) = 0. \end{aligned} \tag{62}$$

Vlastní čísla příslušného homogenního problému mají tvar

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(\pi^2/16)} = 16k^2.$$

Je zřejmé, že pro $k = 2$ je $\lambda_2 = 16 \cdot 4 = 64$ a u funkce u v úloze (62) stojí druhé vlastní číslo. To ale znamená, že úloha (62) nemá jednoznačné řešení.

O tom, zda tato úloha má nekonečně mnoho řešení a nebo nemá řešení, rozhodne skalární součin (u_2, f), kde $u_2 = \sin 8x$ je vlastní funkce příslušná vlastnímu číslu $\lambda_2 = 64$ a $f(x) = 2\sin 12x + \cos 8x$ je pravá strana rovnice (62).

Předně pro $k = 3$ je $\lambda_3 = 16 \cdot 9 = 144$ třetí vlastní číslo a $u_3 = \sin 12x$ je třetí vlastní funkce. Označíme-li $g(x) = \cos 8x$, je pak $f = 2u_3 + g$. Potom (a využitím toho, že $(u_2, u_3) = 0$)

$$\begin{aligned}(u_2, f) = (u_2, 2u_3 + g) &= 2(u_2, u_3) + (u_2, g) = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin 8x \cos 8x \,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

a to znamená, že úloha (62) má nekonečně mnoho řešení.

Příklad 2.15. *Rozhodněme o řešitelnosti okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} u'' + 9\pi^2 u &= 3\sin 4\pi x + x + 1, \\ u(0) = 0,&\ u(1) = 0. \end{aligned} \tag{63}$$

Vlastní čísla příslušného homogenního problému mají tvar

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{1^2} = k^2\pi^2.$$

Je zřejmé, že pro $k = 3$ je $\lambda_3 = 9\pi^2$ a u funkce u v úloze (63) stojí třetí vlastní číslo. Opět úloha (63) nemá jednoznačné řešení.

O tom, zda tato úloha má nekonečně mnoho řešení a nebo nemá řešení bude zase rozhodovat skalární součin (u_3, f), kde $u_3 = \sin 3\pi x$ je vlastní funkce příslušná vlastnímu číslu $\lambda_3 = 9\pi^2$ a $f(x) = 3\sin 4\pi x + x + 1$ je pravá strana rovnice (63).

Pro $k = 4$ je $\lambda_4 = 16\pi^2$ čtvrté vlastní číslo a $u_4 = \sin 4\pi x$ je čtvrtou vlastní funkcí. Označíme-li $g(x) = x + 1$, je pak $f = 3u_4 + g$. Potom (a využitím toho, že $(u_3, u_4) = 0$)

$$\begin{aligned}(u_3, f) = (u_3, 3u_4 + g) &= 3(u_3, u_4) + (u_3, g) = \\ &= \int_0^1 (x+1)\sin 3\pi x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \neq 0\end{aligned}$$

a to znamená, že úloha (63) nemá řešení.

2.4. **Okrajové úlohy v operátorovém tvaru.**

Příklad 2.16. *Ukažme, že operátor* **A** *příslušný okrajové úloze*

$$\begin{aligned} -u'' + (1 + x)u &= x, \\ u(0) = 0,&\ u(1) = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

je pozitivní.

Operátor $\mathbf{A}$ je definován předpisem

$$\mathbf{A}u = -u'' + (1+x)u \tag{65}$$

s definičním oborem

$$D_{\mathbf{A}} = \left\{u \in C^2\left(\langle 0,1\rangle\right) : u(0)=0,\ u(1)=0\right\}. \tag{66}$$

Chceme-li dokázat, že operátor $\mathbf{A}$ je pozitivní, musíme nejdříve ukázat, že je symetrický, tj. platí

$$\forall u,v \in D_{\mathbf{A}} : (\mathbf{A}u, v) = (u, \mathbf{A}v). \tag{67}$$

Zvolme tedy libovolné $u, v \in D_{\mathbf{A}}$. Potom

$$(\mathbf{A}u, v) = \int_0^1 (-u'' + (1+x)u)\, v \,\mathrm{d}x = \int_0^1 -u''v \,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+x)uv \,\mathrm{d}x.$$

Užitím metody per partes na první z integrálů dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^1 -u''v \,\mathrm{d}x &= [-u'v]_0^1 - \int_0^1 (-u')v' \mathrm{d}x = \\ &= (-u'(1)v(1) + u'(0)v(0)) + \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x = \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x\ ,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\varphi' = -u'' \qquad \psi = v,\\ \varphi = -u' \qquad \psi' = v'.\end{aligned}$$

(Protože $v \in D_{\mathbf{A}}$, je $v(0)=0, v(1)=0$ a $(-u'(1)v(1) + u'(0)v(0)) = 0$.) Je tedy

$$(\mathbf{A}u, v) = \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+x)uv \,\mathrm{d}x. \tag{68}$$

Podobným způsobem nyní upravíme pravou stranu rovnosti (67). Opět zvolme libovolné $u, v \in D_{\mathbf{A}}$. Potom

$$(u, \mathbf{A}v) = \int_0^1 (u(-v'' + (1+x)v)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 -v''u \,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+x)vu \,\mathrm{d}x.$$

Opět užitím metody per partes na první z integrálů dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^1 -v''u \,\mathrm{d}x &= [-v'u]_0^1 - \int_0^1 (-v')u' \mathrm{d}x = \\ &= (-v'(1)u(1) + v'(0)u(0)) + \int_0^1 v'u'\mathrm{d}x = \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x\ ,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\varphi' = -v'' \qquad \psi = u,\\ \varphi = -v' \qquad \psi' = u'.\end{aligned}$$

(Protože $u \in D_{\mathbf{A}}$, je $u(0)=0, u(1)=0$ a $(-v'(1)u(1) + v'(0)u(0)) = 0$.) Je tedy

$$(u, \mathbf{A}v) = \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+x)uv \,\mathrm{d}x. \tag{69}$$

Z (68) a (69) vidíme, že platí (67), tj.

$$\forall u, v \in D_{\mathbf{A}} : (\mathbf{A}u, v) = (u, \mathbf{A}v)$$

a operátor **A** je symetrický.

Ukažme nyní, že operátor **A** je pozitivní, tj. platí

$$\forall u \in D_{\mathbf{A}} : (\mathbf{A}u, u) \geq 0 \wedge (\mathbf{A}u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0,\ \forall x \in \langle 0, 1\rangle. \tag{70}$$

Zvolme $\forall u \in D_{\mathbf{A}}$. Potom podle (68) je

$$(\mathbf{A}u, u) = \int_0^1 u'u'\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+x)uu\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (u')^2\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+x)u^2\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

protože součet integrálů z nezáporných funkcí je nezáporný. A tento součet se rovná 0 pouze tehdy, když oba integrály se současně rovnají 0. Ale to nastane pouze v případě, že $u(x) = 0,\ \forall x \in \langle 0, 1\rangle$. Podmínka (70) platí a operátor **A** je pozitivní.

Příklad 2.17. *Ukažme, že operátor* **A** *příslušný okrajové úloze*

$$\begin{aligned} -u'' + (x^2+1)u &= \cos x, \\ u(-1) = 0,\ u'(2) &= 0 \end{aligned} \tag{71}$$

je pozitivní.

Operátor **A** je definován předpisem

$$\mathbf{A}u = -u'' + (x^2+1)u \tag{72}$$

s definičním oborem

$$D_{\mathbf{A}} = \left\{ u \in C^2\left(\langle -1, 2\rangle\right) : u(-1) = 0,\ u'(2) = 0 \right\}. \tag{73}$$

Budeme postupovat podobně jako v příkladu 2.16. Ukážeme nejdříve, že operátor **A** je symetrický, tj. platí

$$\forall u, v \in D_{\mathbf{A}} : (\mathbf{A}u, v) = (u, \mathbf{A}v). \tag{74}$$

Zvolme tedy libovolné $u, v \in D_{\mathbf{A}}$. Potom

$$(\mathbf{A}u, v) = \int_{-1}^2 \big(-u'' + (x^2+1)u\big)\,v\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 -u''v\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^2 (x^2+1)uv\,\mathrm{d}x.$$

Opět užitím metody per partes na první z integrálů dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 -u''v\,\mathrm{d}x &= [-u'v]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 (-u')v'\mathrm{d}x = \\ &= (-u'(2)v(2) + u'(-1)v(-1)) + \int_{-1}^2 u'v'\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 u'v'\mathrm{d}x\ , \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \varphi' &= -u'' \qquad \psi = v, \\ \varphi &= -u' \qquad \psi' = v'. \end{aligned}$$

($u, v \in D_{\mathbf{A}}$, $v(-1) = 0, u'(2) = 0$ a $(-u'(2)v(2) + u'(-1)v(-1)) = 0$.)
Je tedy

$$(\mathbf{A}u, v) = \int_{-1}^{2} u'v' \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)uv \, \mathrm{d}x. \tag{75}$$

A podobně upravíme pravou stranu rovnosti (74) Zvolme libovolné $u, v \in D_{\mathbf{A}}$. Potom

$$(u, \mathbf{A}v) = \int_{-1}^{2} \big(u(-v'' + (x^2 + 1)v\big) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} -v''u \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (x^2+1)vu \, \mathrm{d}x.$$

A opět užitím metody per partes na první z integrálů dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} -v''u \, \mathrm{d}x &= [-v'u]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} (-v')u' \mathrm{d}x = \\ &= (-v'(2)u(2) + v'(-1)u(-1)) + \int_{-1}^{2} v'u' \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} u'v' \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

($u, v \in D_{\mathbf{A}}$, $u(-1) = 0, v'(2) = 0$ a $(-v'(2)u(2) + v'(-1)u(-1)) = 0$.)
Je tedy

$$(u, \mathbf{A}v) = \int_{-1}^{2} u'v' \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)uv \, \mathrm{d}x \tag{76}$$

a operátor $\mathbf{A}$ je symetrický.

A nyní zase podobným postupem jako v příkladu 2.16 ukažme, že operátor $\mathbf{A}$ je pozitivní, tj. platí

$$\forall u \in D_{\mathbf{A}} : (\mathbf{A}u, u) \geq 0 \wedge (\mathbf{A}u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0, \ \forall x \in \langle -1, 2 \rangle. \tag{77}$$

Zvolme $\forall u \in D_{\mathbf{A}}$. Potom podle (75) je

$$(\mathbf{A}u, u) = \int_{-1}^{2} u'u' \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (x^2+1)uu \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (u')^2 \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (x^2+1)u^2 \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

protože součet integrálů z nezáporných funkcí je nezáporný. A tento součet se rovná 0 pouze tehdy, když oba integrály se současně rovnají 0. Ale to nastane pouze v případě, že $u(x) = 0$, $\forall x \in \langle -1, 2 \rangle$. Podmínka (77) platí a operátor $\mathbf{A}$ je pozitivní.

Příklad 2.18. *Ukažme, že operátor* $\mathbf{A}$ *příslušný okrajové úloze*

$$\begin{aligned} -u'' + g(x)u &= f(x), \\ u(a) = 0, \ u(b) &= 0, \end{aligned} \tag{78}$$

kde funkce f *a* g *jsou funkce spojité na intervalu* $\langle a, b \rangle$ *a* $g(x) \geq 0$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$, *je pozitivní.*

Při řešení této obecné úlohy budeme postupovat analogicky jako v příkladu 2.16. Operátor $\mathbf{A}$ je definován předpisem

$$\mathbf{A}u = -u'' + g(x)u \tag{79}$$

s definičním oborem

$$D_{\mathbf{A}} = \left\{u \in C^2\langle a, b\rangle : u(a) = 0,\ u(b) = 0\right\}. \tag{80}$$

Budeme-li chtít dokázat, že operátor $\mathbf{A}$ je pozitivní, musíme opět nejdříve ukázat, že je symetrický, tj. platí

$$\forall u, v \in D_{\mathbf{A}} : (\mathbf{A}u, v) = (u, \mathbf{A}v). \tag{81}$$

Zvolme tedy libovolné $u, v \in D_{\mathbf{A}}$. Potom

$$(\mathbf{A}u, v) = \int_a^b (-u'' + g(x)u)\, v \,\mathrm{d}x = \int_a^b -u''v \,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)uv \,\mathrm{d}x.$$

Užitím metody per partes na první z integrálů dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^b -u''v \,\mathrm{d}x &= [-u'v]_a^b - \int_a^b (-u')v'\mathrm{d}x = \\ &= (-u'(b)v(b) + u'(a)v(a)) + \int_a^b u'v'\mathrm{d}x = \int_a^b u'v'\mathrm{d}x\ ,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\varphi' &= -u'' \qquad \psi = v,\\ \varphi &= -u' \qquad \psi' = v'.\end{aligned}$$

(Protože $v \in D_{\mathbf{A}}$, je $v(a) = 0, v(b) = 0$ a $(-u'(b)v(b) + u'(a)v(a)) = 0$.) Je tedy

$$(\mathbf{A}u, v) = \int_a^b u'v'\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)uv \,\mathrm{d}x. \tag{82}$$

Podobným způsobem nyní upravíme pravou stranu rovnosti (81). Opět zvolme libovolné $u, v \in D_{\mathbf{A}}$. Potom

$$(u, \mathbf{A}v) = \int_a^b (u(-v'' + g(x)v)\ \mathrm{d}x = \int_a^b -v''u \,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)vu \,\mathrm{d}x.$$

Opět užitím metody per partes na první z integrálů dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^b -v''u \,\mathrm{d}x &= [-v'u]_a^b - \int_a^b (-v')u'\mathrm{d}x = \\ &= (-v'(b)u(b) + v'(a)u(a)) + \int_a^b v'u'\mathrm{d}x = \int_a^b u'v'\mathrm{d}x\ ,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\varphi' &= -v'' \qquad \psi = u,\\ \varphi &= -v' \qquad \psi' = u'.\end{aligned}$$

(Protože $u \in D_{\mathbf{A}}$, je $u(a) = 0, u(b) = 0$ a $(-v'(b)u(b) + v'(a)u(a)) = 0$.) Je tedy

$$(u, \mathbf{A}v) = \int_a^b u'v'\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)uv\,\mathrm{d}x. \tag{83}$$

Z (82) a (83) vidíme, že platí (81), tj.

$$\forall u, v \in D_{\mathbf{A}} : (\mathbf{A}u, v) = (u, \mathbf{A}v)$$

a operátor $\mathbf{A}$ je symetrický.

Nyní ukažme, že operátor $\mathbf{A}$ je pozitivní, tj. platí

$$\forall u \in D_{\mathbf{A}} : (\mathbf{A}u, u) \geq 0 \wedge (\mathbf{A}u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0,\ \forall x \in \langle a, b\rangle. \tag{84}$$

Zvolme $\forall u \in D_{\mathbf{A}}$. Potom podle (82) je

$$(\mathbf{A}u, u) = \int_a^b u'u'\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)uu\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u')^2\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)u^2\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

protože součet integrálů z nezáporných funkcí je nezáporný. A tento součet se rovná 0 pouze tehdy, když oba integrály se současně rovnají 0. Ale to nastane pouze v případě, že $u(x) = 0,\ \forall x \in \langle a, b\rangle$. Podmínka (84) platí a operátor $\mathbf{A}$ je pozitivní.

Příklad 2.19. *Najděme hodnotu funkcionálu energie F příslušného okrajové úloze*

$$\begin{gathered} -u'' + x^2u = x, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{gathered} \tag{85}$$

s operátorem $\mathbf{A}$ pro funkci $u_1(x) = x(1-x)$.

Podle příkladu 2.18 víme, že operátor

$$\mathbf{A}u = -u'' + x^2u \tag{86}$$

s definičním oborem

$$D_{\mathbf{A}} = \left\{u \in C^2\left(\langle 0, 1\rangle\right) : u(0) = 0,\ u(1) = 0\right\}. \tag{87}$$

je pozitivní. Funkcionál energie pro okrajovou úlohu $\mathbf{A}u = f$, kde $\mathbf{A}$ je pozitivní operátor s definičním oborem $D_{\mathbf{A}}$, má tvar

$$Fu = (\mathbf{A}u, u) - 2(f, u). \tag{88}$$

Protože $u_1 \in D_{\mathbf{A}}$, dostaneme dosazením $u_1(x) = x(1-x)$ $(u_1''(x) = -2)$ do (86)

$$\mathbf{A}u_1 = 2 + x^2 \cdot x(1-x) = 2 + x^3(1-x)$$

dále do (88)

$$\begin{aligned} Fu_1 = (\mathbf{A}u_1, u_1) \quad &- \quad 2(f, u_1) = \int_0^1 (2 + x^3(1-x)) \cdot x(1-x)\mathrm{d}x - \\ &- \quad 2\int_0^1 x \cdot x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{211}{105} - 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{129}{70}\,. \end{aligned}$$

Příklad 2.20. *Najděme minimální hodnotu funkcionálu energie F příslušného okrajové úloze*

$$(89)\qquad \begin{aligned} -u'' + 9u &= 9x^2 - 9x - 2, \\ u(0) = 0,\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Podle věty o minimu kvadratického funkcionálu víme, že pokud je funkce u^* řešením okrajové úlohy $\mathbf{A}u = f$, kde $\mathbf{A}$ je pozitivní operátor s definičním oborem $D_{\mathbf{A}}$ (podle příkladu 2.18 je operátor $\mathbf{A}$ příslušný úloze (89) pozitivní), pak tato funkce minimalizuje funkcionál energie příslušný této úloze a naopak, pokud u^* minimalizuje funkcionál energie dané okrajové úlohy, pak tato funkce je řešením této úlohy.

Tato věta umožňuje hledat řešení okrajové úlohy tak, že najdeme funkci $u^* \in D_{\mathbf{A}}$, která minimalizuje funkcionál energie příslušný dané úloze. (Toto je princip řešení okrajových úloh tzv. variačními metodami). Naopak, známe-li řešení okrajové úlohy $u^* \in D_{\mathbf{A}}$, pak tato funkce minimalizuje příslušný funkcionál energie. A to je právě náš případ.

Podobně jako v příkladech 1.1 až 2.3 najdeme řešení úlohy (89). (Diferenciální rovnice 2.řádu s konstatními koeficienty se speciální pravou stranou.) Nejdříve najdeme řešení rovnice bez pravé strany. Charakteristická rovnice $-\lambda^2 + 9\lambda = 0$ má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -3$. Odtud

$$u_h = c_1\,\mathrm{e}^{3x} + c_2\,\mathrm{e}^{-3x}$$

je řešením rovnice bez pravé strany. Daná rovnice má speciální pravou stranu a tedy partikulární řešení rovnice (89) budeme hledat ve tvaru

$$u_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (89) a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$. Obecné řešení rovnice (89) má tedy tvar

$$u_h = c_1\,\mathrm{e}^{3x} + c_2\,\mathrm{e}^{-3x} + x^2 - x.$$

Dosazením okrajových podmínek do obecného řešení najdeme hledané řešení.

Řešením úlohy (89) je funkce $u^* \in D_{\mathbf{A}}$

$$(90)\qquad u^*(x) = x^2 - x, \quad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

Je tedy (viz příklad 2.19)

$$\begin{aligned} Fu^* = (\mathbf{A}u^*, u^*) \quad &- \quad 2(f, u^*) = \int_0^1 (-2 + 9\cdot(x^2 - x))\mathrm{d}x - \\ &- \quad 2\int_0^1 (9x^2 - 9x - 2)\cdot(x^2 - x)\mathrm{d}x = -\frac{19}{30} \end{aligned}$$

hledaná minimální hodnota funkcionálu energie.